Новые понятия равновесий и методы поиска решений конфликтных задач с побочными интересами участников*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. Для почти неизученного класса конфликтных задач с побочными интересами участников предлагаются новые понятия равновесия и методология поиска решений подобных задач.

Ключевые слова: *конфликтные задачи, побочные доходы игроков.*

Введение

Работа посвящена разработке основ общей теории игр [1–14] и, в особенности, — основ нового направления [7] этой общей теории, названного конфликтными задачами с побочными интересами.

В данной работе для игр с побочными интересами участников предлагается ряд новых понятий равновесия (не вносящих в игру каких-либо искусственно навязываемых участникам норм поведения). В общую теорию конфликтных равновесий эти новые равновесия вводят специфические понятия слабой конфликтной устойчивости, поскольку в них любой попытке участника (или участников) улучшить свое состояние ставится в соответствие не какая-либо угроза, а всего лишь требование, чтобы исходное состояние оставалось паретовским по отношению к тем или иным противопоставляемым ему состояниям. При дефиците понятий равновесия в общей теории конфликтных равновесий [1–14] оказывается возможной неединственность решения конфликтных задач даже в отсутствие какой-либо симметрии в них. Предлагаемые же естественные ослабленные равновесия позволяют заполнить бреши между уже известными конфликтными равновесиями [1–14], предоставляя, к примеру, возможность выбора более предпочтительной для участников (по крайней мере, с точки зрения паретовских качеств) ситуации из двух или нескольких ситуаций, неразличимых с позиций уже известных понятий конфликтных равновесий.

* Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН «Интеллектуальные информационные технологии, системный анализ и автоматизация» и РФФИ, проект № 12-01-00961-а.

Демонстрируется, что теорию задач с побочными интересами участников (или, другими словами — задач с частично пересекающимися игровыми множествами) удается строить, дополняя общую теорию конфликтных равновесий [1–6, 8–12], построенную для задач на едином для всех участников игровом множестве, рядом новых понятий конфликтного равновесия и оптимальности и специфическими понятиями сильных угроз [7, 13, 14], необходимыми в связи с особой спецификой задач на пересекающихся игровых множествах, в которых оказывается возможной пустота наислабейшего A-равновесия, всегда существующего и являющегося гарантией существования решения в любых традиционных задачах на едином для всех участников игровом множестве.

Заметим, что теория [8–12] позволила не только разрешить большую часть проблем классической теории игр [1–6] — существование, единственность и устойчивость решения в любых бескоалиционных, коалиционных, кооперативных, антагонистических, как статических, так и динамических играх, рассматривавшихся на едином для всех участников игровом множестве, но позволила также при не очень значительном своем усложнении решать по существу совершенно не изученные задачи с частично пересекающимися игровыми множествами участников [7, 10, 13].

1. Особенности игровых задач с побочными интересами участников

В [7, 10, 11, 13] были сделаны первые попытки построения общей теории неизученных конфликтных задач, в которых платежные функции определены не на едином для всех участников игровом множестве, а на их индивидуальных множествах, лишь частично пересекающихся с игровыми множествами других участников. Подобная постановка задачи моделирует, в частности, реально наблюдаемую картину, когда у каждого из участников произвольного конфликта имеются еще и побочные интересы (например, дополнительные доходы), которые явно не связаны с областью конфликта. Проведенное исследование показало, что суммарный доход каждого участника, слагающийся из доходов, получаемых им как в зоне конфликта, так и вне ее, может существенно зависеть от поведения участников как в зоне конфликта, так и вне ее.

Существенной, усложняющей поиск решения, особеностью подобных задач является то, что в них множество A, к сожалению, может оказываться пустым. Чтобы преодолеть эту неприятность, потребовалось как соответствующее (весьма естественное) обобщение этого множества, так и некоторые дополнительные понятия оптимальности и равновесности, оказавшиеся весьма полезными не только для задач с пересекающимися игровыми множествами участников, но и для любых задач. Это расширило возможности поиска единственного наисильнейшего равновесия. Исходным понятием для построения любых систем конфликтных равновесий в задачах с побочными интересами (т. е. на пересекающихся игровых множествах) служит введенное обобщенное понятие A-равновесия, учитывающее разные типы угроз.

Понятно, что в конфликтных задачах, обладающих какой-либо явной или скрытой симметрией, даже теоретически нет оснований надеяться на существование единственного решения. Однако любая сколько-нибудь асимметричная задача должна иметь единственное решение. И если в асимметричной задаче найти единственное наисильнейшее равновесие не удается, то это безусловное указание на то, что число используемых при поиске решения понятий равновесия недостаточно, чтобы выявить среди них это единственное наисильнейшее равновесие. Предлагаемые новые понятия равновесия — это еще шаг к решению этой проблемы.

Подчеркнем, что каждый из участников получает доходы только на своем индивидуальном игровом множестве (поле деятельности), которое лишь частично пересекается с игровыми множествами других участников. Явные конфликтные ситуации возникают лишь на пересечениях игровых множеств участников (и коалиций из них), а на не пересекающихся частях своих индифидуальных игровых множеств участники получают доходы, которые мы называем побочными. Причем эти побочные доходы оказываются все же косвенно зависимыми от поведения других участников.

Допускается образование любых коалиций, но всегда наиболее предпочтительной для всех участников все же оказывается кооперация, общий дохов в которой делится между участниками в зависимости от реализующихся состояний конфликтного равновесия.

Заметим, что необходимость введения понятия сильных угроз явилась следствием наличия побочных доходов у участников, причем оказалось, что побочные доходы могут существенно влиять на поведение участников в зоне конфликта.

Поскольку в классической теории игр изучались только задачи на общем для всех участников игровом множестве и не рассматривались задачи с побочными интересами участников, то сначала в элементарной форме на простейшем наглядном примере рассмотрим присущие подобным задачам особенности.

Пусть каждый из двух предпринимателей ведет свой бизнес в разных областях экономики: первый, например, получает доходы от нефтяного и туристического бизнеса, а второй — от нефтяного, автомобильного и текстильного бизнеса. И пусть, ради упрощения, у первого из них имеются всего две стратегии поведения, а у второго — три. Следующие две матрицы назовем платежными функциями (или функционалами) участников:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & \cdot \\ 3 & \cdot & 5 \end{bmatrix}.$$

Стратегия перового участника — это выбор им одной из двух строк в своей платежной функции J_1, а стратегия второго участника — выбор им одного из трех столбцов своей платежной матрицы J_2. Если, например, первый выбирает первую строку, а второй — второй столбец, то первый получает доход в размере 2 (например, 2 миллиона рублей), а второй — доход 4 (4 миллиона рублей). Если же первый участник выбирает первую строку, а второй — третий столбец, то участники ничего не получают и игра в этом случае считается несостоявшейся (подобные игры нередко называют играми с запрещенными ситуациями, т. е. ситуация a_{13} в рассматриваемой игре по существу не является игровой и как бы не существует). И наконец, если первый игрок выбирает вторую строку, а второй игрок — второй столбец, то первый игрок выигрывает 3, а второй ничего не получает (т. е. как бы оказывается вне игры). Эта последняя ситуация как раз и отличает игры с побочными интересами от классических игр на едином для всех игроков множестве и потребовала введения нового понятия — сильных угроз [7, 10, 11, 13].

Чтобы пояснить смысл сильной угрозы, рассмотрим, к примеру, ситуацию a_{12}, в которой первый игрок имеет возможность получить выигрыш, равный 2. Однако если его этот выигрыш не устраивает, то он, в принципе, имеет возможность улучшить его, например, отказавшись от первой стратегии, при которой эта ситуация реализуется, и выбрать свою вторую стратегию, которая (при неизменности второй стратегии второго игрока) привела бы игру в ситуацию a_{22}, в которой выигрыш первого игрока стал бы равным 3 (т. е. больше, чем в ситуации a_{12}). Однако, если бы первый игрок именно так и поступил, то у второго игрока имеется право сделать ответный ход из ситуации a_{22} в любую из ситуаций второй строки, например, в ситуацию a_{21}, в которой второй игрок получил бы выигрыш 3, а первый оказался бы вне игры (в отмеченой точкой ситуации a_{21} на платежной матрице J_1 первого игрока). Т. е. подобна (сильная) угроза выводит партнера из игры при положительном выигрыше угрожающего участника (в данном случае — второго игрока), применяющего эте угрозу. Эти сильные угрозы возможны только в играх с побочными интересами участников и невозможны в классических играх на общем для игровов игровом поле (поскольку в играх на едином для всех игроков множестве могут быть запрещенные ситуации только одновременно для всех участников и невозможна описанная ситуация).

Слабые же угрозы возможны в любых играх. Суть этих угроз ясна из следующего рассмотрения этого примера. Если второй участник не согласен с ситуацией a_{12}, в которой его выигрыш равен 4, то он имеет возможность заменить свою вторую стратегию на первую, перейдя в ситуацию a_{11}, в которой его выигрыш равен 7. Однако первый имеет возможность наказать его, не считаясь с тем, что сам он при этом получит (в связи с чем эти стратегии наказания и были названы слабыми [7–14]), переведя игру в ситуацию a_{21}, в которой выигрыш второго снижается до значения 3, т. е. до значения, не большего, чем в исходной ситуации a_{12} (заметим, что если бы и в ситуации a_{21} тоже стояло число 4, равное значению в исходной ситуации a_{12}, то эта угроза считалась бы реальной, поскольку угроза предполагает, что сопернику не удастся получить больше, чем в исходной ситуациии).

Отметим, что явный конфликт между участниками имеет место только на пересечении матриц $J_1 \cap J_2$, т. е. в трех ситуациях a_{11}, a_{12}, a_{23}), в которых доходы обоих участников одновременно не являются пустыми и задаются матрицами

$$J_1^G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}, \quad J_2^G = \begin{bmatrix} 7 & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 5 \end{bmatrix}.$$

Однако отсюда вовсе не следует, что конфликт в исходной игре может быть разрешен только из рассмотрения этих последних платежных матриц, поскольку решающую роль имеют именно сильные угрозы (и участников ничто не остановит против их использования), в то время как конфликтное равновесие для матриц J_i^G возможно всего лишь в классе слабых угроз.

2. Новые равновесия для задач с побочными интересами участников

Чтобы не загромождать изложение весьма громоздкими деталями, связанными с возможными коалиционными объединениями N участников и упростить понимание предлагаемых новых B^{Pa}-, $\bar{D}^{Pa}$- и ряда других понятий равновесия, вводимых нами для задач с побочными интересами участников, ограничимся следующим допущением.

Допущение 1. *Пусть Q_i, $i = 1, \dots, N$, — метрические пространства и $Q = Q_1 \times \dots \times Q_N$; G_i — компактные множества в пространстве Q, причем $G = G_1 \cap \dots \cap G_N \neq \emptyset$, а $G' = G_1 \cup \dots \cup G_N$; и пусть на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал) $J_i(q)$, $i = 1, \dots, N$; $q = (q_1, \dots, q_N)$, $q^i = q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N$; G^i — суммарное игровое множество всех участников, кроме i-го; J^i — суммарная платежная функция всех игроков, кроме i-го.*

i-й участник имеет возможность выбирать свою стратегию q_i из проекции $Pr_{Q_i}G'$ множества G' на пространство Q_i или из сечения $G'(q^i)$ и стремится обеспечить максимум своей платежной функции (функционала) $J_i(q)$, определенной лишь на его индивидуальном игровом множестве $G_i \subseteq Q$. Интересы одновременно всех игроков явно сталкиваются только на множестве G, а на множестве $G_i \setminus (G_i \cap G^i)$ i-й участник имеет свои побочные доходы, не связанные явно с бизнесом на множестве G^i. Как показывается ниже на примерах, побочные доходы любого участника могут оказывать существенное влияние на его суммарные личные доходы и на его совместный бизнес с другими участнками.

Приведем придварительно следующие 5 понятий равновесия из [7], без которых невозможно понимание предлагаемых на их основе новых, более сильных понятий равновесия.

Исходным понятием для построения любых систем конфликтных равновесий в задачах, в которых i-й игрок ищет максимум своей платежной функции J_i на своем индивидуальном игровом множестве $G_i \subseteq Q$, имеющем непустое пересечение G с аналогичным суммарным игровым множеством G^i остальных участников, максимизирующих свою совместную платежную функция J^i, служит следующее обобщение понятия A-равновесия.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G_i$ назовем A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q^{*i} остальных участников допустимой для i-го игрока оказывается только одна стратегия $q_i^* = G_i(q^{*i})$ или если любой стратегии $q_i \in G_i(q^{*i}) \setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i$ остальных участников, такую, чтобы имело место следующее отношение:

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \hat{q}^i \in G_i(q_i) \tag{1}$$

(этот случай назовем задачей 1-го типа);
или такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \hat{q}^i \in G'(q_i) \tag{2}$$

(этот случай назовем задачей типа 2, которая отличается от задачи типа 1 тем, что в ней, помимо угроз $\hat{q}^i$, используемых в (1), допускаются еще и («сильные») угрозы на множестве $G'(q_i) \setminus G_i(q_i)$, на котором угрожающая коалиция из $N-1$-й игроков получает доход, а i-игрок ничего не получает);
или если любой стратегии $q_i \in G(q^{*i}) \setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i$ остальных участников, такую, чтобы имело место отношение:

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \hat{q}^i \in G(q_i) \tag{3}$$

(этот случай назовем задачей 3-го типа, характеризующейся тем, что в данном случае рассматривается вспомогательная игра только на пересечении G всех множеств G_i).

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия в задаче, соответственно, 1-го, 2-го или 3-го типа, если условия, соответственно, (1), (2) или (3) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для всех $i = 1, \ldots, N$, т. е. если $q^* \in A_1 \cap \ldots \cap A_N = A$.

Замечание 1. Из определения 1 следует, что в задачах 1-го и 3-го типа угрозы естественные (слабые), а в задаче 2-го типа — сильные, «сила» которых проявляется в том, что в игровых задачах на частично пересекающихся игровых множествах угрожающая i-му игроку коалиция имеет возможность реализовывать свои угрозы не только в сечениях $G_i(q_i)$ игрового множества G_i i-го участника, но и в более широких сечениях $G'(q_i) \supseteq G_i(q_i)$, в которых эта коалиция имеет совместный доход, а наказуемый i-й участник ничего не получает.

Поскольку в задачах с частично пересекающимися интересами участников множество A может оказаться пустым (за исключением задачи 3-го типа), то это вынуждает искать какое-то еще более слабое равновесие, которое было бы непустым и в какой-то мере заменило собой A-равновесие. В связи с этим введем следующие определения 2–5 понятий оптимальности (равновесия), ослабляющие требования (1), (2).

Определение 2. *Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем P_i^b-экстремальной, если при любой попытке $q_i \in G_i(q^{ib}) \setminus q_i^b$ i-го участника увеличить свой выигрыш по отношению к выигрышу в ситуации q^b за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^b является «индивидуально паретовской»* [8, с.145], *т. е. точкой Парето (на множестве $J_1(G_1) \times \ldots \times J_N(G_N)$) по отношению хотя бы к одной из точек сечения $G'(q_i)$. Ситуацию q^b назовем P^b-оптимальной (или P^b-равновесием), если она P_i^b-экстремальна для всех $i = 1, \ldots N$.*

В задачах с частично пересекающимися интересами участников в случае, когда множество A оказывается пустым, на его роль может претендовать множество P^b или же нижеследующие его усиления, даваемые определениями 3–5.

Следующее определение является некоторым усилением предыдущего, отличаясь от последнего тем, что в нем оптимальность по Парето имеет место не по отношению к какой-либо точке сечения $G'(q_i)$, а по отношению к какой-либо точке сечения $G_i(q_i)$ ($\subset G'(q_i)$).

Определение 3. *Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем P_i^a-экстремальной, если при любой попытке $q_i \in G_i(q_k^a) \setminus q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш по отношению к выигрышу в ситуации q^a за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^a является точкой Парето по отношению хотя бы к одной из точек сечения $G_i(q_i)$. Ситуацию q^a назовем P^a-оптимальной (или P^a-равновесием), если она P_i^a-экстремальна для $i = 1, \ldots N$.*

Следующее определение является некоторым усилением предыдущего.

Определение 4. *Ситуацию $q^a \in G_i$ назовем $\bar{P}_i^a$-экстремальной, если при любой попытке $q_i \in G_i(q^{ai}) \setminus q_i^a$ i-го участника увеличить свой выигрыш по отношению к выигрышу в ситуации q^a за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^a является точкой Парето по отношению ко всем точкам сечения $G_i(q_i)$. Ситуацию q^a назовем $\bar{P}^a$-оптимальной (или $\bar{P}^a$-равновесием), если она $\bar{P}_i^a$-экстремальна для $i = 1, \ldots N$.*

Следующее определение является усилением предыдущего.

Определение 5. *Ситуацию $q^b \in G_i$ назовем $\bar{P}_i^b$-экстремальной, если при любой попытке*

$q_i \in G_i(q^{ib}) \setminus q_i^b$ i-го участника увеличить свой выигрыш по отношению к выигрышу в ситуации q^b за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^b является точкой Парето по отношению ко всем точкам сечения $G'(q_i)$. Ситуацию q^b назовем $\bar{P}^b$-оптимальной (или $\bar{P}^b$-равновесием), если она $\bar{P}_i^b$-экстремальна для $i = 1, \dots N$.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in P_i^b$ назовем B_i^{Pb}-экстремальной, если на множестве $J(G) = J_1(q) \times \dots \times J_N(q)$ она определяет точку $J(q^*)$, являющуюся оптимальной по Парето по отношению лишь к точкам $J(q_i^*, q^i)$, где $q^i \in P_i^b(q_i^*)$. Назовем ситуацию $q^* \in G$ B^{Pb}-равновесием, если $q^* \in B_1^{Pb} \cap \dots \cap B_N^{Pb} = B^{Pb}$, где B_i^{Pb} — множество всех B_i^{Pb}-экстремальных ситуаций.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in P_i^a$ назовем B_i^{Pa}-экстремальной, если на множестве $J(G) = J_1(q) \times \dots \times J_N(q)$ она определяет точку $J(q^*)$, являющуюся оптимальной по Парето по отношению лишь к точкам $J(q_i^*, q^i)$, где $q^i \in P_i^a(q_i^*)$. Назовем ситуацию $q^* \in G$ B^{Pa}-равновесием, если $q^* \in B_1^{Pa} \cap \dots \cap B_N^{Pa} = B^{Pa}$, где B_i^{Pa} — множество всех B_i^{Pa}-экстремальных ситуаций.

Аналогично определяются множества $B^{\bar{P}b}$- и $B^{\bar{P}a}$-равновесий, на которых аналогичным образом можно определить и их дальнейшее усиление, например, вида:

Определение 8. Назовем ситуацию $q^* \in B_i^{Pb}$ $\bar{D}_i^{Pb}$-экстремальной, если на множестве B_i^{Pb} она оказывается точкой Парето. Назовем ситуацию q^* $\bar{D}^{Pb}$-равновесием, если $q^* \in \bar{D}_1^{Pb} \cap \dots \cap \bar{D}_N^{Pb} = \bar{D}^{Pb}$, где $\bar{D}_i^{Pb}$ — множество всех $\bar{D}_i^{Pb}$-экстремальных ситуаций.

Аналогично определяются $\bar{D}^{Pa}$-, $\bar{D}_i^{\bar{P}b}$- и $\bar{D}_i^{\bar{P}a}$-равновесия.

Заметим, что проще всего понять равновесия из определений 2–8, если обратиться к рассмотренным ниже примерам, на которых детально демонстрируются процедуры поиска этих равновесий.

Теорема 1. *Между понятиями оптимальности из определений 2–8 имеют место следующие отношения:*

$$P^b \supseteq P^a \supseteq \bar{P}^a \supseteq \bar{P}^b \supseteq B^{\bar{P}b} \supseteq \bar{D}^{Pb},$$

а также множество других, аналогичных им.

Доказательство этой теоремы по существу оказывается следствием определений 2–8 и мы не станем его приводить.

Для решения приведенных ниже примеров нам потребуются, по крайней мере, еще два следующих определения [7–14], обобщением первого из которых как раз и являются B^{Pb}-, $B^{\bar{P}b}$-, B^{Pa}- и $B^{\bar{P}a}$-равновесия.

Определение 9. *Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия остальных игроков удовлетворяет условию*

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*), i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in B_1 \cap \dots \cap B_N$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 10. *Ситуацию $q^* \in A$ назовем D_i^A-экстремальной, если*

$$\max_{q_i \in A(q^{i*})} J_i\left(Arg \max_{q^i \in A(q_i)} J^i(q_i, q^i)\right) = J_i(q^*), \quad i = 1, \dots, N. \tag{5}$$

Назовем ситуацию q^* D^A-равновесием, если $q^* \in D_1^A \cap \dots \cap D_N^A$.

Замечание 2. Представляется вполне естественным принять, что определения 2–8 в своей совокупности предлагают к рассмотрению еще и некоторый 4-й тип вспомогательной задачи, дополняющий три типа задач (1), (2) и (3) из определения 1.

Предложение 1. В общем случае, если в игровой задаче с несовпадающими и пересекающимися игровыми множествами G_i:

1 — сильные угрозы (2) недопустимы (по соглашению между всеми участниками) и множество A в естественном классе слабых угроз (1) (т. е. в задаче 1-го типа) оказывается пустым, то наисильнейшие равновесия (и решение задачи в том или ином смысле) могут быть найдены, по крайней мере, для задачи 3-го типа (т. е. на пересечении G игровых множеств в естественном классе слабых угроз (1)), с учетом также и результатов задачи 4-го типа, определенной в предыдущем замечании;

2 — сильные угрозы (2) недопустимы и множество A в задаче 1-го типа не пусто, то следует в качестве основного использовать решение задачи 1-го типа (со всеми возможными его итерациями [7–10]), а для оценки влияния побочных интересов на решение исходной игры использовать решение задачи 3-го типа; причем в случае несовпадения решений задач 1-го и 3-го типов за основу принять решение задачи 1-го типа, а решения задач 3-го и 4-го типов рассматривать лишь как возможную коррекцию этого решения; случай же совпадения решений 1-го и 3-го

типов говорит об отсутствии какого-либо заметного влияния побочных доходов на решение игры;

3 — сильные угрозы (2) допустимы и при этом множество A в задаче (1) оказывается пустым, то в качестве основного решения исходной задачи следует рассматривать решение задачи 2-го типа (2), а решение задачи 3-го типа (3), если оно не совпадает с решением задачи 2-го типа (2), рассматривать (с учетом также и задачи 4-го типа) лишь с точки зрения возможности корректировки с его помощью решения задачи 2-го типа; причем если в задачах 2-го и 3-го типов сильнейшие равновесия оказываются одинаковыми, то это означает, что побочные доходы участников явно не влияют на решение игры;

4 — сильные угрозы (2) допустимы и множество A в задаче 1-го типа не пусто, то следует найти решения задач 1-го, 2-го и 3-го типов; и если окажется, что в них наисильнейшие равновесия одни и те же, то это означает, что на решение исходной задачи по существу не влияют ни типы угроз, ни побочные интересы участников, что наиболее благоприятно для них; в случае же различающихся равновесий в задачах 1-го, 2-го и 3-го типов участникам следует рассматривать в качестве основного решение задачи 2-го типа, а решения задач 1-го, 3-го и 4-го типов использовать лишь в качестве корректировочных.

И конечно же, в реальных условиях следует иметь в виду, что конкуренты в конфликтной задаче наверняка используют сильные угрозы, независимо от предварительной договоренности в отношении них. Так что ставка всегда должна делаться на возможность использования сильных угроз.

Пример 1. Рассмотрим статическую игру с двумя участниками, в которой каждый из них максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 6 & \cdot & 5 \\ \cdot & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ \cdot & 6 & 2 \\ 5 & \cdot & 3 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Оба игрока располагают тремя стратегиями: первый игрок выбирает одну из трех строк, а 2-й — один из трех столбцов. В этой задаче

$G_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}, a_{33})$,

$G_2 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{33})$,

$G = (a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{33})$,

а игровое множество $W' = W_1 \cup W_2$ включает все 9 элементов (ситуаций) в вышеприведенных матрицах.

Найдем сначала наиболее слабые равновесия A_1, A_2 и A, т. е. равновесия в задаче 1-го типа (1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot \end{bmatrix} A = \emptyset.$$

Поскольку в игре (6) с побочными интересами участников множество A наиболее слабых равновесий (никогда не бывающее пустым в играх на едином

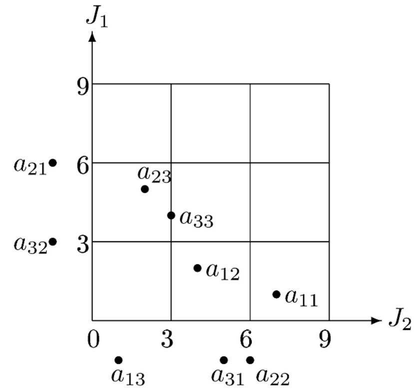

Рис. 1

для всех участников игровом множестве) оказалость пустым, то обратимся к поиску еще более слабых понятий равновесия из определений 2–5. Так как искать эти равновесия, исходя из их определений, без помощи геометрического отображения матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2), почти невозможно, то необходимо прежде всего построить эти отображения (см. рис. 1).

Множество предлагаемых новых $\bar{P}^b$-, $B^{\bar{P}b}$ и $\bar{D}^{\bar{P}b}$-равновесий задается следующими элементами

$$\bar{P}_1^b = \begin{bmatrix} + & + & \cdot \\ + & \cdot & + \\ \cdot & + & + \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_2^b = \begin{bmatrix} + & + & \cdot \\ \cdot & + & + \\ + & \cdot & + \end{bmatrix} \bar{P}^b = \begin{bmatrix} + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix},$$

$$B_1^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{33}),$$

$$B_2^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{33}),$$

$$B^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{33}) = \bar{D}^{\bar{P}b}.$$

Продемонстрируем, как ищутся равновесия из определений 2–8. Например, элемент a_{21} принадлежит множеству $\bar{P}_1^b$, так как он является максимальным в 1-ом столбце матрицы J_1, и 1-й игрок не в состоянии его улучшить при доступном ему переходе в какой-либо другой элемент этого столбца. А элемент a_{11} также принадлежит множеству $\bar{P}_1^b$ потому, что при попытке 1-го игрока перейти в более выгодную для него ситуацию a_{21} исходная ситуация a_{11} оказывается паретовской по отношению к элементам всей второй строки, что видно из рис. 1. Элементы матрицы $\bar{P}_2^b$ ищутся аналогично, но с учетом того, что 2-й игрок может улучшать свою исходную ситуацию только по горизонтали (в строках матрицы J_2). Так что ситуация a_{13} могла бы принадлежать множеству $\bar{P}_2^b$ только при условии, если бы она оказалась точкой Парето по отношению ко всем элементам 1-го столбца и, независимо от этого, — ко всем элементам второго столбца, чего, однако, как видно из рис. 1, не наблюдается. А ситуация a_{23} принадлежит множеству $\bar{P}_2^b$, так как она оказывается паретовской по отношению ко всем элементам 2-го столбца.

Элементы множества $B_1^{\bar{P}b}$ находятся, если раздельно в каждой из строк матрицы $\bar{P}_1^b$ определять паретовские множества, а затем суммировать все полученные в каждой строке множества Парето. Например, в 3-й строке матрицы $\bar{P}_1^b$ содержатся элементы a_{32} и a_{33}, которые образуют двухточечное множество на рис. 1, причем на этой паре точек только точка a_{33} оказывается точкой Парето. Множество $B_2^{\bar{P}b}$ ищется аналогично, но только не в строках, а в столбцах матрицы $\bar{P}_2^b$.

Чтобы найти наисильнейшее равновесие и решение исходной игры (6) и выяснить, в какой мере это решение зависит от побочных интересов участников, найдем сначала равновесия в классе сильных угроз (2) (обозначая множество A-равновесий для случая сильных угроз (2) в виде A^s). Поиск этих равновесий облегчается тем, что матрицы A_1^s, A_2^s и A_3^s являются расширением уже найденных выше матриц A_1, A_2 и A_3:

$$A_1^s = \begin{bmatrix} + & + & \cdot \\ + & \cdot & + \\ \cdot & + & + \end{bmatrix}, A_2^s = \begin{bmatrix} + & + & + \\ \cdot & + & + \\ + & \cdot & + \end{bmatrix} A^s = \begin{bmatrix} + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix}.$$

Далее, на основе определения 9, накладываем матрицу A_1^s (как трафарет) на матрицу J_2 и в каждой строке матрицы A_1^s среди ее элементов, помеченных крестиком, находим максимальный элемент (максимальные, если их несколько одинаковых), объединение которых по всем строкам дает множество $B_1^s = (a_{11}, a_{23}, a_{33})$. Аналогично находится $B_2^s = (a_{11}, a_{12}, a_{23})$, а $B^s = B_1^s \cap B_2^s = (a_{11}, a_{23})$. Из (5) находим множество $D^{As} = (a_{11}, a_{23})$, определяющее наисильнейшую эквивалентную пару равновесий в классе сильных угроз (2).

Поскольку во вспомогательной игре с сильными угрозами (2) имеет место не одно, а два эквивалентных наисильнейших равновесия (a_{11}, a_{23}), то справедливый дележ кооперативного дохода в этой вспомогательной игре, достигаемый в ситуации a_{11} и равный 8, определяется в зависимости от возможных доходов участников в равновесных ситуациях и, согласно формулам (4.3) из [10, с. 175], дается формулами:

$$x_1 = 8\frac{1+5}{1+5+7+2} = \frac{16}{5}, \quad x_2 = 8\frac{7+2}{15} = \frac{24}{5}.$$

Рассмотрим теперь игру (6) на пересечении $G_1 \cap G_2 = G$, т. е. именно на том множестве, на котором игроки явно вступают в конфликт друг с другом (причем в наиболее естественном и единственно возможном в этом случае классе слабых угроз (1)):

$$J_1^G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 5 \\ \cdot & \cdot & 4 \end{bmatrix}, \quad J_2^G = \begin{bmatrix} 7 & 4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Для вспомогательной игры (7) находим:

$$A_1^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix}, A_2^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix} A^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix};$$

$$B_1^G = B_2^G = B^G = (a_{11}, a_{23}).$$

Поскольку во вспомогательной игре (7) наисильнейшие равновесия оказались теми же, что и во вспомогательной игре в классе сильных угроз, то, следовательно, и кооперативный дележ оказывается тем же.

Таким образом, оказалось, что в игре (6) побочные доходы участников по существу не влияют на решение, несмотря на значительность этих доходов, что весьма благоприятно для ее участников. Однако во многих случаях влияние побочных доходов на решение игры оказывается существенным, как это демонстрирует следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим статическую игру с двумя участниками, в которой каждый из них максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ \cdot & 5 & \cdot \\ 6 & \cdot & 3 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & 3 \\ 5 & \cdot & 1 \\ \cdot & 6 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Как и в предыдущем примере, оба игрока располагают тремя стратегиями: первый игрок выбирает одну из трех строк, а 2-й — один из трех столбцов.

Прежде всего найдем наиболее слабые равновесия A_1, A_2 и A, т. е. равновесия в задаче 1-го типа (1):

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ + & \cdot\cdot & \\ \cdot & + & \cdot \end{bmatrix} A = \emptyset.$$

Так как в игре (8) множество A наиболее слабых равновесий оказалость пустым, то определим еще более слабые равновесия из определений 2–8, воспользовавшись рис. 2, который находится аналогично рис. 1.

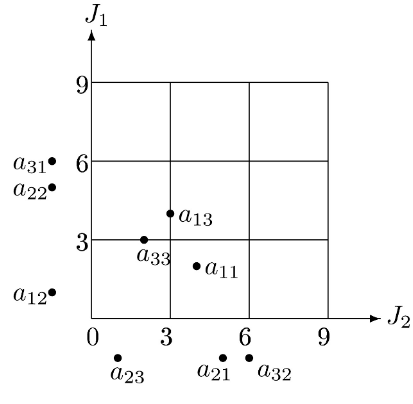

Рис. 2

Множество предлагаемых новых $\bar{P}^b$-, $B^{\bar{P}b}$- и $\bar{D}^{\bar{P}b}$-равновесий задается следующими элементами

$$\bar{P}_1^b = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \bar{P}_2^b = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \bar{P}^b = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$B_1^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}),\ B_2^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{21}, a_{32}),$$
$$B^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}),\ \bar{D}_1^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{31}),$$
$$\bar{D}_2^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}, a_{32}),\ \bar{D}^{\bar{P}b} = (a_{11}, a_{13}).$$

Сильнейшими равновесиями в классе вспомогательных — индивидуально-паретовских равновесий — оказались две ситуации (a_{11}, a_{13}).

Найдем теперь наиболее важные равновесия (в классе сильных угроз (2)):

$$A_1^s = \begin{bmatrix} + & + & + \\ \cdot & + & \cdot \\ + & \cdot & + \end{bmatrix}, A_2^s = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ + & \cdot & + \\ \cdot & + & + \end{bmatrix} A^s = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix}.$$

$$\begin{gathered} B_1^s = (a_{11}, a_{33}), B_2^s = (a_{11}, a_{13}), \\ B^s = B_1^s \cap B_2^s = a_{11} = D^{As}. \end{gathered} \tag{9}$$

Очевидно, что наисильнейшим равновесием в классе сильных угроз оказалась единственная ситуация a_{11}. Оценим кооперативный дележ во вспомогательной игре в классе сильных угроз. Поскольку кооперативный выигрыш участников реализуется в ситуации a_{13} и равен 7, то кооперативный дележ дается следующими формулами (см. [10, с. 174]), получаемыми на основе найденного единственного наисильнейшего равновесия a_{11} в этой вспомогательной игре:

$$x_1^s = 7 \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{3}, \quad x_2^s = 7 \cdot \frac{4}{6} = \frac{14}{3}. \tag{10}$$

Чтобы найти решение исходной игры (8) и оценить влияние на это решение побочных доходов участников, остается еще рассмотреть вспомогательную игру на пересечении $G_1 \cap G_2 = W$, т. е. именно на том множестве, на котором игроки явно вступают в конфликт друг с другом:

$$J_1^G = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix}, \quad J_2^G = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Для вспомогательной игры (11) находим:

$$A_1^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & + \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix}, A_2^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix} A^G = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + \end{bmatrix};$$
$$B_1^G = B_2^G = (a_{11}, a_{33}) = B^G.$$

Поскольку во вспомогательной игре (11), в отличие от вспомогательной игры (9) с сильными угрозами, наисильнейшими равновесиями оказались две ситуации (a_{11}, a_{33}), то и кооперативный дележ оказывается другим. По формулам [10, с. 175] получаем следующий дележ

$$x_1^G = 7 \cdot \frac{2+3}{11} = \frac{35}{11}, \quad x_2^G = 7 \cdot \frac{4+2}{11} = \frac{42}{11}, \tag{12}$$

немного отличающийся от дележа (10).

Таким образом, различие в наисильнейших равновесиях во вспомогательных задачах (9) и (11) и получаемые вследствие этого разные дележи участников в кооперативной игре указывают на влияние побочных доходов игроков на результат игры. Согласно предложению 1 базовым дележом следует признать дележ (10), а дележ (12) можно рассматривать в качестве корректировочного, учитывающего влияние побочных доходов игроков.

Изменяя платежные матрицы (8), нетрудно сформулировать игры, в которых влияние побочных доходов оказывается весьма значительным.

3. Динамические конфликтные задачи с побочными интересами участников

Рассмотрим конфликтующие динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник ($i = \overline{1, N}$), используя чистые $u_i(t)$ или смешанные стратегии $q_i(u_i, t)$, стремится обеспечить максимум своего функционала (критерия):

$$J_i(q) = \int_T d\,t \int_{W_i(t)} f_0^i\,(u, x, t) dq, i = \overline{1, N} \tag{13}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \int_{W'(t)} f\,(u, x, t) dq, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subset E^1, \tag{14}$$

$$(u, t) \in W' \subset U \times T, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} x_j(t_0) = x_j^0, j = \overline{1, n}, \quad x_k(t_1) = x_k^1, \\ k \in K \subset \{\overline{1, n}\} \end{gathered} \tag{16}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ — евклидово n-мерное пространство; $U = \bigcup_{k=1}^N U_k$; U_k — конечномерное пространство, $k = \overline{1, N}$; $u = (u_1, \dots, u_N)$; $W' = \bigcup_{k=1}^N W_k$; $W = \bigcap_{k=1}^N W_k$; W_i — компактные множества в U; $q_i(u_i, t)$ — смешанная стратегия i-го участника; $q(u, t) = q_1(u_1, t) \dots q_N(u_N, t)$; $W(t)$ и $W'(t)$ — сечения множеств W и W' в момент $t \in T = [t_0, t_1]$; $\widehat{U}_i = Pr_{U_i} W'$ — проекция множества W' на U_i; Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i, t)$ i-го участника в задаче (13)–(15) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W' на множество $\widehat{U} = \widehat{U}_1 \times \ \dots \times \widehat{U}_N$; $q^i = q_1 \dots q_{i-1} q_{i+1} \dots q_N$; $J^i = \sum_{k=1}^N J_k - J_i$.

Пусть G' — подмножество множества $Q = \prod_{i=1}^{N} Q_i$, образованное только такими стратегиями $q(u,t)$, которые позволяют обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи, из которых ограничения (16) вводят в задачу (13)–(16) неявную зависимость между стратегиями участников, а ограничения (16) — явную в связи с чем множество G' включает в себя почти (в смысле меры Лебега) в каждый момент $t \in T$ только такие меры $q(\cdot,t)$, носители которых лежит в $W'(t)$. Аналогично определяются множества G_i и G.

Допущение 2. *Пусть $T = [t_0, t_1]$ — ограниченный фиксированный отрезок вещественной оси E^1; множество W — компакт в $U \times T$; отображение $\hat{f} = (f_0^1, ..., f_0^N, f_1, ..., f_n)$: $U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u,x,\cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot,\cdot,t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $|\hat{f}|$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x|+1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t)$: $T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (9); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица:*

$$|\hat{f}(u,\bar{x},t) - \hat{f}(u,x,t)| \le b(t)|\bar{x} - x|$$

для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Прежде всего следует отметить, что найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач, практически нереально. Если же A-равновесие несколько видоизменить, назвав его видоизмененный аналог A^c-равновесием, то найти убобные для приложений необходимые условия оказывается вполне возможным. A^c-равновесие получается из определения 1 A-равновесия для игровых задач на пересекающихся множествах добавлением в последнее после перечисления требований (1)–(3) некоторого дополнительного требования, содержащегося в следующем определении.

Определение 11. Ситуация q^* в дифференциальной игре (13)–(16) является A_i^c-экстремальной, если каждое из отношений (1)–(3) выполняется при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t) \ne q^{*i}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \ne q_i^*(t)$. Ситуацию $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} A_i^c$ назовем A^c-равновесием в задаче соответственно 1-го, 2-го и 3-го типов, если, соответственно, требования (1), (2) и (3) удовлетворяются в точке q^* для всех $i = \overline{1,N}$, т. е. если $A^c = A_1^c \cap ... \cap A_N$.

Если в формулировку задачи не входят произведения фазовых координат и управлений и задача линейна по фазовым координатам, то можно принять $A^c = A$. Для поиска решений дифференциальных игр с побочными интересами участников можно воспользоваться некоторыми модификциями необходимых условий существования равновесий, полученных в [7, 11], в частности, например, следующей модификацией теоремы 4.2.1 из [11], позволяющей свести решение исходной дифференциальной игры к решению некоторых вспомогательных («локальных») статических игр, в которых платежными функциями оказываются гамильтонианы исходной дифференциальной игры [7, 11].

Теорема 2. *Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче (13)–(16) с N участниками, удовлетворяющее допущению 1. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), ..., p_n^i(t))$, $p_0^i = 1$, $i = \overline{1,N}$ удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям*

$$\dot{p}_k^i = -\int \int_{W_i(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*, \quad k = \overline{1,n},$$

$$i = \overline{1,N}, \quad p_j^i(t_1) = 0, \quad j \notin K.$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \dots, f_n)$,

гамильтонианы $H^i = \int_{W_i(t)} p^i f^i dq^*$ непрерывны в T;

A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$[H^i](\hat{q}^i, q_i) \le [H^i](q^*),$$

$$q_i \in G(q^{*i}), \quad \hat{q}^i \in G(q_i), \quad i = \overline{1,N}.$$

Теорема 2 позволяет сводить поиск решения весьма сложных (по сравнению со статическими задачами) дифференциальных игр к поиску решения всего одной или нескольких статических игр.

Литература

1. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. М.: Физматлит, 1960.
2. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 2. P. 286–295.
3. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономические поведениме. М.: Наука, 1970.
4. *Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980.
5. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
6. *Вилкас Э. И.* Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.
7. *Смольяков Э. Р.* Управление конфликтами с побочными интересами участников. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013.

8. *Смольяков Э. Р.* Теория антагонизмов и дифференциальные игры. М.: URSS, 2000.
9. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: URSS, 2005.
10. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010.
11. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010.
12. *Смольяков Э. Р.* Равновесные модели при несовпадающих интересах участников М.: Наука, 1986.
13. *Смольяков Э. Р.* Дифференциальные игры на частично пересекающихся множествах // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1793–1802.
14. *Смольяков Э. Р.* Конфликтные индивидуально-паретовские равновесия // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 1. С. 139–145.

Смольяков Эдуард Римович. Профессор МГУ. Д. ф.-м. н. Окончил в 1962 г. МФТИ. Количество печатных работ: более 240 (в т. ч. 14 монографий). Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма. E-mail: ser-math@rambler.ru

Смольяков Владимир Эдуардович. Гл. специалист ИСА РАН. Окончил в 2005 г. Международную академию оценки и консалтинга. Количество печатных работ: 18 (в т. ч. 1 монография). Область научных интересов: моделирование систем, психология. E-mail: ser-math@rambler.ru