

# Математические проблемы динамики неоднородных систем

## Магистральные траектории в экономике и сингулярные возмущения\*

Ю. Э. Даник, М. Г. Дмитриев

**Аннотация.** На основе методов теории сингулярных возмущений рассмотрен подход к нахождению приближенного оптимального решения задач экономической динамики, траектории которых имеют магистральный характер. Предложен алгоритм построения равномерных нулевых асимптотических приближений к оптимальному управлению приводящему к сбалансированным траекториям роста для модели, объединяющей в себе свойства динамических моделей Леонтьева и Неймана. Построен числовой пример.

**Ключевые слова:** *магистралы, экономическая динамика, оптимальное управление, сингулярные возмущения, модели Леонтьева, Неймана.*

### Введение

Основным объектом изучения в моделях экономической динамики и равновесия является траектория экономической системы во времени, т. е. последовательность элементов фазового пространства, которая описывает допустимое развитие системы, порожденное соответствующими экономическими механизмами. Среди всех траекторий могут выделяться оптимальные в смысле некоторых критериев оценки качества. Поиск оптимальных траекторий экономической динамики естественно вести на основе формализма теории оптимального управления. Один из возможных численных приемов — сведение задачи нахождения оптимальной траектории к задаче оптимизации [8, 9]. Однако даже при небольшом горизонте планирования и небольших размерностях векторов выпуска соответствующая задача может иметь высокую размерность.

В математической экономике имеется один класс задач, связанный с оптимальными траекториями, который стал изучаться в литературе до эпохи бурного развития и внедрения современной теории оптимального управления. Этот класс задач связан с теоремами о магистралах, которые фактически являются теоремами о близости оптимальных траекторий управляемых систем экономической динамики к некоторым предельным конструкциям в соответствующих задачах управления на достаточно больших временных интервалах. В таком случае решение оптимизационной задачи можно аппроксимировать траекторией, состоящей из трех участков: участка выхода на магистраль, участка, расположенного в окрестности или на этой магистрали, и участка перехода от магистрали в окрестность конечной точки. Здесь отдельным классом с более тонкими утверждениями является класс магистральных теорем, связанных с траекториями максимального сбалансированного роста.

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00692).

Теоремы о магистралях доказывались в литературе, как для дискретных, так и для непрерывных моделей экономической динамики [1–7].

Оптимизационные задачи управления на достаточно большом временном интервале можно изучать в рамках т. н. теории сингулярных возмущений [10–14]. Например, сингулярные возмущения в дискретных задачах оптимального управления появляются вследствие малого шага или большого числа шагов на конечном интервале, а в непрерывных — из-за наличия при производной в модели малого параметра, который появляется из-за сжатия большого интервала, например, к единичному.

Магистрали в сингулярно возмущенных задачах управления [14, 15] традиционно связывают с решениями предельных оптимизационных задач, когда параметр возмущений становится равным нулю. При вырождении получается уже алгебраическая система, к решению которой и стремится, внутри интервала времени, решение исходной задачи. Это приводит к появлению зон быстрого изменения решения вблизи границы интервала и так называемых непрерывных и кусочно непрерывных магистралей, решений предельных систем, внутри интервала. Решение исходной (возмущенной) задачи строится в виде асимптотического разложения по параметру  $\mu$ , состоящего из трех участков — регулярного ряда по  $\mu$  с добавлением левого и правого пограничных рядов. Члены пограничных рядов существенны в окрестностях тех граничных точек, где заданы дополнительные условия для исходного уравнения, не выполняющиеся для предельной задачи.

Здесь предлагается алгоритм построения приближения к оптимальным траекториям с магистральными свойствами на основе техники сингулярных возмущений для моделей экономической динамики, на примере построения нулевого асимптотического приближения для одной модификации известной динамической модели Леонтьева. Эта модель объединяет в себе не только учет баланса выпуска, затрат, потребления и развития фондов, но также, как и в модели Неймана, связывает затраты с выпуском и содержит в явном виде управление интенсивностями технологических процессов.

### 1. Дискретные модели с малым шагом

Прежде чем перейти к рассмотрению моделей экономической динамики и построению для них оптимальных траекторий, опишем применение техники сингулярных возмущений для дискретных моделей с малым шагом. Дискретные задачи оптимального управления с малым шагом относятся к динамическим задачам большой размерности и являются

сингулярно возмущенными, так как в решении исходной модели могут находиться участки быстрого изменения решений вблизи границ интервала. При численном решении таких задач при уменьшении шага встает проблема ограниченной оперативной памяти ЭВМ или неприемлемых затрат машинного времени. В работе [16] был предложен способ построения асимптотики решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями, получивший название прямая схема. Этот метод был распространен в работе [17] на дискретные задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на значения управлений

$$\begin{aligned} x(t + \mu) &= f(x, u, t), \\ x(0) &= x^0, \quad x \in R^n, u \in R^r, \\ I(u) &= \varphi(x(N)) \rightarrow \min_u, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $t \in T_\mu = \{t : t = k\mu, k = 0, 1, \dots, N - 1\} \in [0, 1]$ ,  $N = \frac{1}{\mu}$ ,  $\mu > 0$  — малый шаг.

Асимптотическое приближение к решению  $z(t, \mu)$  задачи (1) ищется с помощью метода пограничных функций [11] в виде суммы трех рядов

$$\begin{aligned} z(t, \mu) &= \\ &= \bar{z}(t, \mu) + Pz(\tau_0, \mu) + Qz(\tau_1, \mu), \quad z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\bar{z}(t, \mu) = \bar{z}_0(t) + \mu\bar{z}_1(t) + \dots + \mu^k\bar{z}_k(t)$  — регулярный ряд;  $Pz(\tau_0, \mu) = Pz(\tau_0) + \mu P_1 z(\tau_0) + \dots + \mu^k P_k z(\tau_0)$  — левый пограничный ряд, существенный в начале временного интервала, с коэффициентами, зависящими от  $\tau_0 = t/\mu$ ,  $\tau_0 = 0, 1, 2, \dots$ ;  $Qz(\tau_1, \mu) = Qz(\tau_1) + \mu Q_1 z(\tau_1) + \dots + \mu^k Q_k z(\tau_1)$  — правый пограничный ряд, существенный в конце временного интервала, с коэффициентами, зависящими от  $\tau_1 = (t - T)/\mu$ ,  $\tau_1 = 0, -1, -2, \dots$

Суть прямой схемы состоит в прямой подстановке разложения (2) в условия задачи (1), последующим разложением условий в асимптотический ряд по степеням  $\mu$  и решением получающихся при этом вариационных задач. При этом предполагается, что имеются экспоненциальные оценки для членов пограничных рядов  $\|P_i x(\tau_0)\| \leq qe^{-\alpha\tau_0}$ ,  $\|Q_i x(\tau_1)\| \leq qe^{-\alpha\tau_1}$ , где  $\alpha > 0$ ,  $\tau_0 = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\tau_1 = 0, -1, -2, \dots$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

### 2. Краткий обзор линейных дискретных моделей экономической динамики

Здесь будем считать, что шаг достаточно малый или число шагов на конечном временном интервале достаточно велико. Сначала приведем описание динамической модели Леонтьева. В этой модели

весь производственный сектор разбит на  $n$  отраслей, каждая из которых производит продукцию только одного типа, при этом считается, что каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей.

Пусть временной шаг в модели есть малый параметр  $\mu$ , т. е. положим  $\mu = \frac{1}{N}$ , где  $N \gg 1$ ,  $t = k\mu$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , тогда модель Леонтьева описывается следующей системой

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t) + B[x(t + \mu) - x(t)] + d(t), \\ x(0) &= x_0, \quad t = 0, \mu, \dots, (N - 1)\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор выпуска,  $d(t)$  — вектор конечного спроса, неотрицательная квадратная ( $n \times n$ ) матрица  $A$  — матрица прямых материальных затрат,  $B$  — неотрицательная ( $n \times n$ ) матрица фондоемкости, где  $b_{ij}$  показывает прирост фондов  $j$ -й отрасли из продукции  $i$ -й отрасли, т. е. количество  $i$ -ого продукта, которое должно быть в наличии на каждую единицу продукции, производимой сектором  $j$ . Если матрица  $B$  невырожденная, а элементы матриц  $A$  и  $B$  известны и не зависят от времени, тогда (3) можно преобразовать к виду [18]

$$\begin{aligned} x(t + \mu) &= B^{-1}[(E - A + B)x(t) - d(t)], \\ x(0) &= x_0, \quad t = 0, \mu, \dots, (N - 1)\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Приближенное решение начальной задачи для (4) также можно получить на основе асимптотики метода пограничных функций (2), рассмотренного выше. Это возможно в том случае, если собственные числа основной функциональной матрицы (в общем случае якобиана правой части вырожденной системы)  $B^{-1}(I - A + B)$  находятся внутри единичного круга ( $|\lambda_i(t)| < 1$ ). Но предположение о невырожденности матрицы  $B$  зачастую не выполняется. Это объясняется тем, что не каждый сектор экономики выпускает продукцию производственного назначения и поэтому некоторые из строк матрицы  $B$  могут быть нулевыми. Для этого случая в [18] предлагается способ получения рекурсивного уравнения для вектора выпуска  $x(t)$ .

Теперь обсудим, следуя [8], другую модель экономической динамики — **модель фон Неймана расширяющейся экономики**. Производственный процесс в модели фон Неймана представляет собой композицию конечного числа технологических процессов (ТП), преобразующих некоторое количество продукции, имеющейся в начале периода, в другое количество продукции в конце периода, разность между которыми дает накопление. Заметим, что здесь возможен выпуск нескольких видов товаров одним

технологическим процессом. Модель имеет вид

$$\begin{aligned} x(t + \mu) &= x(t) + (B_* - A_*)u(t), \\ x(0) &= x_0, \quad t = 0, \mu, 2\mu, \dots, (N - 1)\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_*$  — ( $m \times r$ ) неотрицательная матрица затрат,  $a_{ij}$  — затраты  $i$ -ого товара при единичной интенсивности  $j$ -ого ТП, вектор  $a^{(j)} = (a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m)$ , — вектор затрат при единичной интенсивности  $j$ -ого ТП.  $B_*$  — ( $m \times r$ ) неотрицательная матрица выпуска,  $b_{ij}$  — производительность  $j$ -ого ТП по выпуску  $i$ -ого товара, т. е. количество  $i$ -ого товара, произведенного  $j$ -ым технологическим процессом при его единичной интенсивности.  $b_{(i)} = (b_{ij}, j = 1, 2, \dots, r)$ , — вектор выпуска  $i$ -ого товара при единичной интенсивности всех ТП. В каждом столбце матрицы затрат  $A_*$  и в каждой строке матрицы выпуска  $B_*$  имеется хотя бы один ненулевой элемент.  $(B_* - A_*)u(t)$  — вектор чистого выпуска к концу периода  $T$ , где  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$  — вектор интенсивностей всех ТП.  $j$ -ая компонента вектора управления  $u_j(t)$  есть интенсивность использования  $j$ -го ТП в течение периода  $[t, t + \mu]$ ,  $t = 0, \mu, \dots, (N - 1)\mu$ ,  $j = \overline{1, r}$ . На вектор управления накладываются следующие прямые ограничения  $d_*(t) \leq u(t) \leq d^*(t)$ ,  $t = 0, \mu, 2\mu, \dots, (N - 1)\mu$ .

Модель фон Неймана называется продуктивной, если система неравенств  $(B - A)u \geq c$ ,  $u \geq 0$  имеет решение при любом неотрицательном векторе  $c$ . Модель замкнута — только объемы продукции, имеющейся к началу текущего периода, становятся затратами данного периода, т. е.  $Au(t) \leq x(t)$ ,  $t \geq 0$ . Потребление в модели в чистом виде отсутствует — потребление рассматривается как производственный процесс, воспроизводящий труд. Все затраты считаются воспроизводимыми.

В рамках модели фон Неймана, в частности, изучают задачу о нахождении производственных программ, при которых экономический рост максимален [8]

$$(p, x(1)) \rightarrow \max_u \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x(t + \mu) &= x(t) + (B - A)u(t), \\ t &= 0, \mu, 2\mu, \dots, (N - 1)\mu \end{aligned} \quad (7)$$

$$Au(t) \leq x(t), \quad t = 0, \mu, 2\mu, \dots, (N - 1)\mu \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_*(t) \leq u(t) \leq d^*(t), \\ t &= 0, \mu, 2\mu, \dots, (N - 1)\mu, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $p$  — вектор цен.

Допустимая производственная программа, удовлетворяющая ограничениям (8), (9)  $u^0(t)$ ,  $t \geq 0$  называется **оптимальной**, если соответствующая траектория  $x^0(t)$ ,  $t \geq 0$ , из (7) доставляет максимум целевой функции (6).

При исследовании модели фон Неймана выделяются специальные траектории, когда объемы всех затрат и выпусков растут с одинаковым темпом, так называемые сбалансированные траектории.

Для упрощения, заменим в задаче (6)–(9) ограничения (9) на

$$u(t) \geq 0, \quad t = 0, \mu, 2\mu, \dots, (N-1)\mu. \quad (10)$$

Пусть  $u(t)$  — допустимая сбалансированная производственная программа роста в задаче (6)–(8), (10)  $u(t) = \gamma^t u$  с параметрами  $\gamma > 1$ ,  $u = u(0)$ , где  $\gamma$  — темп сбалансированного роста, тогда траектория  $x(t)$ , соответствующая этой сбалансированной программе роста и начальному условию  $x^0 = \frac{(B-A)u}{\gamma-1} = x_c(u)$  будет являться сбалансированной траекторией роста.

Оказывается [8], что каким бы ни был начальный запас товаров  $x^0$ , траектория  $x(t)$ , соответствующая сбалансированной программе роста, будет стремиться к сбалансированной траектории роста. Также известно, что если в модели фон Неймана существует невырожденное положение равновесия  $\{u^*, p^*, \gamma^*\}$ , то сбалансированная траектория определяется лучом фон Неймана  $\{x: x = \beta x_c^*, \beta \geq 0\}$ , где  $x_c^*(u) = \frac{(B-A)u^*}{\gamma^*-1}$ , а  $u^*$ ,  $\gamma^*$  участвуют в невырожденном положении равновесия и все оптимальные траектории группируются около этого луча. Аналогично, можно рассматривать задачи и с другими критериями, например, с критерием минимизации квадратичного отклонения выпуска в конечный момент от заданного и т. д.

Оптимизационную задачу (6)–(9), например, можно решить методом линейного программирования, но при увеличении числа шагов размерность соответствующей задачи ЛП возрастает и возникает интерес к методам, у которых трудоемкость расчетов не связана с этим обстоятельством. Здесь покажем, что численные методы, построенные, в частности, на основе учета в модели возможных сингулярных возмущений, могут успешно соперничать с традиционными подходами.

Но, оказывается, что в классической модели фон Неймана мы имеем полный критический случай, под которым будем, в отличие от частичного критического случая [10], понимать ситуацию, когда все собственные значения основной функциональной матрицы сингулярно возмущенной задачи [14] лежат на границе единичного круга. В этом случае асимптотику метода пограничных функций использовать нельзя. Действительно, при вырождении в системе (5) полностью исчезает переменная состояния  $x$ . Поэтому для применения метода пограничных функций к динамическим экономическим мо-

делям в случае наличия траекторий сбалансированного роста, модифицируем модель Леонтьева, объединяя ее с моделью Неймана.

### 3. Модифицированная динамическая модель Леонтьева

Введем в классическую динамическую модель Леонтьева, помимо потребления и развития фондов, также и управление, под которым будем понимать вектор интенсивностей всех технологических процессов. Для упрощения рассуждений, вместо критерия (6) введем  $J(u) = (x(1) - x_{\text{зад}})^T F(x(1) - x_{\text{зад}}) \rightarrow \min_u$ , где матрица  $F$  является положительно определенной.

Теперь объединяя (3) и (5), получаем возмущенную задачу

$$P_\mu : J(u) = (x(1) - x_{\text{зад}})^T F(x(1) - x_{\text{зад}}) \rightarrow \min_u \quad (11)$$

$$x(t + \mu) = Ax(t) + (E + B)(B_* - A_*)u(t) + d(t), \quad (12)$$

$$x(0) = x^0, \quad d(0) = d^0,$$

$$A_* u(t) \leq x(t), \quad (13)$$

$$u(t) \geq 0, \quad x(t) \geq 0, \quad (14)$$

где  $d(t) = \beta^t d(0)$ ,  $\beta \geq 0$  — темп сбалансированного роста потребления.

Здесь смысл критерия (11) — выбор из допустимых пар  $(x(t), u(t))$  таких, которые будут обеспечивать наилучшее приближение в конечный момент к некоторым заданным плановым показателям; систему (12) можно трактовать как уравнение динамического баланса, накладывающее ограничение на вектор выпуска в каждый момент времени, при этом, к началу следующего периода, имеющийся объем продукции, может обеспечить потребление в объеме  $d(t)$ ;  $(B_* - A_*)u(t)$  — чистый прирост продукции по сравнению с предыдущим периодом;  $B(B_* - A_*)u(t)$  — необходимое вложение в фонды для производства этого объема чистого выпуска;  $Ax(t)$  — затраты на поддержку функционирования технологических процессов по производству выпуска; ограничение (13) вводится для соизмерения затрат с выпуском.

Очевидно, что, в пределе, при устремлении малого параметра к нулю, система (12) распадается на две системы — первая, как следует из (7), связана с моделью Неймана,

$$0 = (B_* - A_*)u(t), \quad (15)$$

а вторая, с помощью (3), преобразуется к виду, в точности, совпадающему со статической моделью Леон-

твева  $x(t) = Ax(t) + d(t)$ , где, в случае продуктивности матрицы  $A$ , имеем

$$x(t) = (E - A)^{-1}d(t). \tag{16}$$

При этом в отличие от модели Неймана в новой модели при вырождении в уравнении динамики (12) будет продолжать присутствовать переменная состояния  $x$ , а значит из вырожденной задачи можно при определенных условиях находить вид предельной траектории. Таким образом, модифицированная модель Леонтьева обладает свойствами, как статической модели Леонтьева, так и модели Неймана и позволяет преодолевать затруднения, связанные с поиском оптимального решения с помощью техники сингулярных возмущений.

#### 4. Алгоритм построения равномерных нулевых приближений сбалансированных траекторий роста

Применим прямую схему для нахождения приближенного асимптотического решения полученной вариационной задачи  $P_\mu$  в модифицированной модели Леонтьева. Подставляем разложение (2) в (12)–(14) и в целевую функцию (11) и раскладываем их в соответствующие ряды.

В функционале (11) имеем

$$\begin{aligned} J(u) &= J_0(t) + \mu J_1 + \dots = \\ &= (\bar{x}_0(T) + Q_0x(0) - x_{\text{зад}})^T F(\bar{x}_0(T) + Q_0x(0) - x_{\text{зад}}) + \\ &\quad + \mu J_1 + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

В (12) получаем

$$\begin{aligned} &\bar{x}_0(t) + \mu \dot{\bar{x}}_0(t) + \dots + \\ &+ \mu \bar{x}_1(t) + \mu^2 \dot{\bar{x}}_1(t) + \dots + \\ &+ \Pi_0x(\tau_0 + 1) + \mu \Pi_1x(\tau_0 + 1) + \dots + \\ &+ Q_0x(\tau_1 + 1) + \mu Q_1x(\tau_1 + 1) + \dots = \\ &= A[\bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \dots + \\ &\quad + \Pi_0x(\tau_0) + \mu \Pi_1x(\tau_0) + \dots + \\ &\quad + Q_0x(\tau_1) + \mu Q_1x(\tau_1) + \dots] + \\ &+ (E + B)(B_* - A_*) \cdot \\ &\quad \cdot [\bar{u}_0(t) + \mu \bar{u}_1(t) + \dots + \\ &\quad + \Pi_0u(\tau_0) + \mu \Pi_1u(\tau_0) + \dots + \\ &\quad + Q_0u(\tau_1) + \mu Q_1u(\tau_1) + \dots] + d(t) \end{aligned} \tag{18}$$

$\bar{x}_0(0) + \mu \bar{x}_1(0) + \dots + \Pi_0x(0) + \mu \Pi_1x(0) + \dots = x^0$ . Соответственно для ограничений (13)–(14) получаем

$$A_*(\bar{u}_0(t) + \dots + \Pi_0u(\tau_0) + \dots + Q_0u(\tau_1) + \dots) \leq$$

$$\leq \bar{x}_0(t) + \dots + \Pi_0x(\tau_0) + \dots + Q_0x(\tau_1) + \dots ;$$

$$\bar{u}_0(t) + \dots + \Pi_0u(\tau_0) + \dots + Q_0u(\tau_1) + \dots \geq 0;$$

$$\bar{x}_0(t) + \dots + \Pi_0x(\tau_0) + \dots + Q_0x(\tau_1) + \dots \geq 0,$$

где  $t = 0, \mu, 2\mu \dots, (N - 1)\mu$ ,  $\tau_0 = 0, 1, 2 \dots$ ,  $\tau_1 = 0, -1, -2, \dots$

Не останавливаясь на высших приближениях, рассмотрим подробно нулевое приближение. Для этого приравняем члены при нулевой степени  $\mu$ , отдельно зависящие от  $t$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  слева и справа в полученных равенствах и неравенствах, сформируем три задачи  $P_0$ ,  $\Pi_0P$ ,  $Q_0P$  декомпозиции для поиска элементов решения.

Задача  $P_0$  для определения магистральных участков:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0(t) &= (E - A)^{-1}(E + B)(B_* - A_*)\bar{u}_0(t) + \\ &\quad + (E - A)^{-1}d(t) \end{aligned} \tag{19}$$

$$A_*\bar{u}_0(t) \leq \bar{x}_0(t), \tag{20}$$

$$\bar{u}_0(t) \geq 0, \quad \bar{x}_0(t) \geq 0, \tag{21}$$

$$(B_* - A_*)\bar{u}_0(t) = 0. \tag{22}$$

Задача  $\Pi_0P$  для левого пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \Pi_0x(\tau_0 + 1) &= A\Pi_0x(\tau_0) + \\ &\quad + (E + B)(B_* - A_*)\Pi_0u(\tau_0), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\bar{x}_0(0) + \Pi_0x(0) = x^0, \tag{24}$$

$$A_*(\bar{u}_0(t) + \Pi_0u(\tau_0)) \leq \bar{x}_0(t) + \Pi_0x(\tau_0), \tag{25}$$

$$\bar{u}_0(t) + \Pi_0u(\tau_0) \geq 0, \quad \bar{x}_0(t) + \Pi_0x(\tau_0) \geq 0 \tag{26}$$

И, наконец, задача  $Q_0P$  для правого пограничного слоя:

$$\begin{aligned} J(u) &= (\bar{x}_0(T) + Q_0x(0) - x_{\text{зад}})^T \cdot \\ &\quad \cdot F(\bar{x}_0(T) + Q_0x(0) - x_{\text{зад}}) \rightarrow \min_{Q_0u(\tau_1), Q_0x(0)} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} Q_0x(\tau_1) &= A^{\tau_1}(x_{\text{зад}} - \bar{x}_0(1)) - \\ &\quad - \sum_{s=\tau_1}^{-1} A^{\tau_1-s-1}(E + B)(B_* - A_*)Q_0u(s) \end{aligned} \tag{28}$$

$$A_*(\bar{u}_0(t) + Q_0u(\tau_1)) \leq \bar{x}_0(t) + Q_0x(\tau_1) \tag{29}$$

$$\bar{u}_0(t) + Q_0u(\tau_1) \geq 0, \quad \bar{x}_0(t) + Q_0x(\tau_1) \geq 0 \tag{30}$$

Теперь перейдем к анализу полученных задач. Если матрица  $(B_* - A_*)$  вырождена, а именно в этом случае можно говорить о сбалансированном росте, тогда, очевидно, имеем

$$\bar{u}_0(t) = c(t)u_A, \tag{31}$$

где  $u_A$  — собственный вектор матрицы  $(B_* - A_*)$ , соответствующий нулевому собственному значению,

а  $c(t)$  — пока неизвестная в каждый момент времени скалярная функция. Из (16) следует, что

$$\bar{x}_0(t) = (E - A)^{-1}d(t). \quad (32)$$

При этом  $\bar{x}_0(t) = (E - A)^{-1}d(t)$  и  $\bar{u}_0(t)$  должны в каждый момент времени удовлетворять ограничениям, следующим из (20), (21), (24)–(26), (27), (29), (30).

Итак, из задачи  $P_0$  находится магистральный участок траектории  $\bar{x}_0(t) = (E - A)^{-1}d(t)$  и вектор управления  $\bar{u}_0(t)$  с точностью до некоторой константы в каждый момент времени.

Замечаем, что из-за специфики функционала в задачах  $P_0$  и  $\Pi_0 P$  отсутствуют критерии, т. е. фактически они есть соответствующие наборы ограничений для элементов решения на левом конце и внутри временного интервала.

Система ограничений для множества допустимых переходов в окрестность магистрали на левом конце временного интервала с учетом (23), (31), (32), выглядит следующим образом

$$A_*(c(t)u_A + \Pi_0 u(\tau_0)) \leq (E - A)^{-1}d(t) + A^{\tau_0} \Pi_0 x(0) + \sum_{s=0}^{\tau_0-1} A^{\tau_0-s-1} (E + B)(B_* - A_*) \Pi_0 u(s), \quad (33)$$

$$\Pi_0 x(0) = x^0 - (E - A)^{-1}d(0), \quad (34)$$

$$(E - A)^{-1}d(t) + \Pi_0 x(\tau_0) \geq 0, \quad (35)$$

$$c(t)u_A + \Pi_0 u(\tau_0) \geq 0, \quad c(t)u_A \geq 0.$$

Только задача  $Q_0 P$  есть задача оптимального управления. Видно, что в точке  $x_0^T = \bar{x}_0(T) + Q_0 x(0) = x_{\text{зад}}$  достигается глобальный минимум функционала (11) и отсюда автоматически получаем неизвестное начальное условие для нулевого члена правого пограничного ряда  $Q_0 x(0) = x_{\text{зад}} - \bar{x}_0(1)$ . Но для нахождения оптимального управления  $Q_0 u(\tau_1)$  здесь информации недостаточно из-за «бедности» исходного критерия.

Итак, для правого пограничного слоя с учетом (23), (31), (32) имеем

$$Q_0 x(\tau_1) = A^{\tau_1} (x_{\text{зад}} - (E - A)^{-1}d(1)) - \sum_{s=\tau_1}^{-1} A^{\tau_1-s-1} (E + B)(B_* - A_*) Q_0 u(s), \quad (36)$$

$$A_*(c(t)u_A + Q_0 u(\tau_1)) \leq (E - A)^{-1}d(t) + Q_0 x(\tau_1), \quad (37)$$

$$c(t)u_A + Q_0 u(\tau_1) \geq 0, \quad (E - A)^{-1}d(t) + Q_0 x(\tau_1) \geq 0. \quad (38)$$

До сих пор в литературе [15] при использовании прямой схемы изучались задачи, где для всех элементов асимптотических приближений получались задачи оптимального управления и оптимизации, имеющие

единственное решение, но из-за специфики критерия (11) здесь либо вообще критерий не возникает в соответствующих задачах, либо полученные задачи имеют неединственное решение.

Так как решения, всех приведенных выше задач декомпозиции, зависят от одной неизвестной дискретной функции  $c(t)$  с числом компонент  $N$  сведем поиск приближенного дискретного оптимального управления в исходной задаче с числом  $N \times r$  неизвестных значений компонент вектора управления к поиску наилучшего допустимого равномерно нулевого приближения

$$u_0(t, \mu, c(t)) = \bar{u}_0(t, c(t)) + \Pi_0 u\left(c(t), \frac{t}{\mu}\right) + Q_0 u\left(c(t), \frac{t}{\mu}\right). \quad (39)$$

Таким образом, с одной стороны, такой подход в  $r$  раз сокращает размерность вспомогательной оптимизационной задачи при переходе от задачи управления к задаче оптимизации, а с другой — позволяет предложить и дополнительные процедуры последовательного улучшения полученного приближения в рамках формирующейся структуры. Здесь, учитывая предполагаемый экспоненциальный характер убывания пограничных функций можно не в ущерб точности вычислений полагать пограничные функции тождественно равными нулю на определенной части отрезка на удалении от соответствующих границ, что сокращает объем вычислений и облегчает нахождение допустимых управлений.

## 5. Численный пример

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух отраслей (ТП) и производящую два вида продукции. Требуется решить задачу (11)–(14) при следующих данных

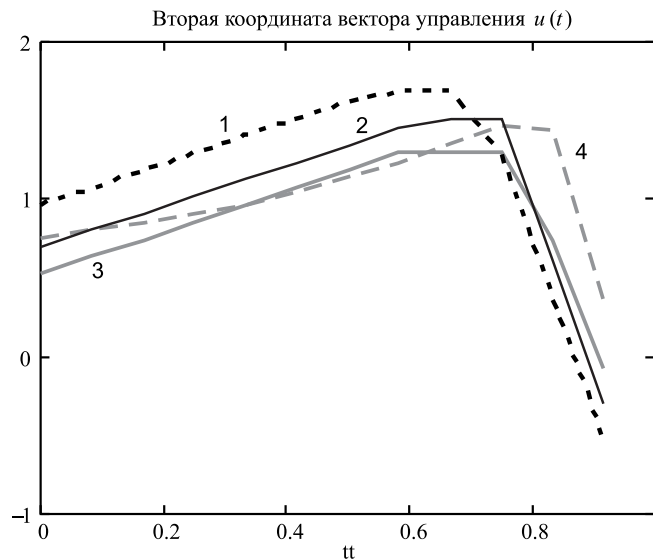
$$A = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,33 \\ 0,37 & 0,45 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,13 \\ 0,1 & 0,11 \end{pmatrix},$$

$$A_* = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad B_* = \begin{pmatrix} 0,535 & 0,178 \\ 0,089 & 0,625 \end{pmatrix},$$

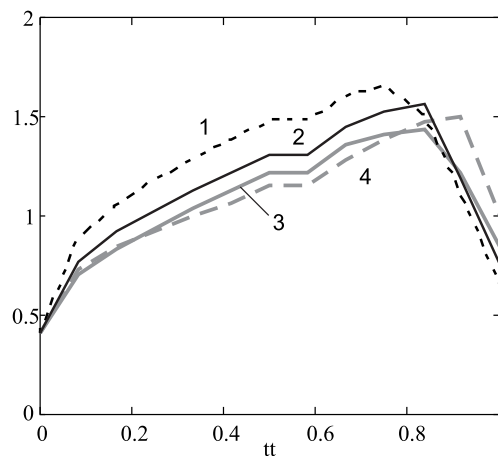
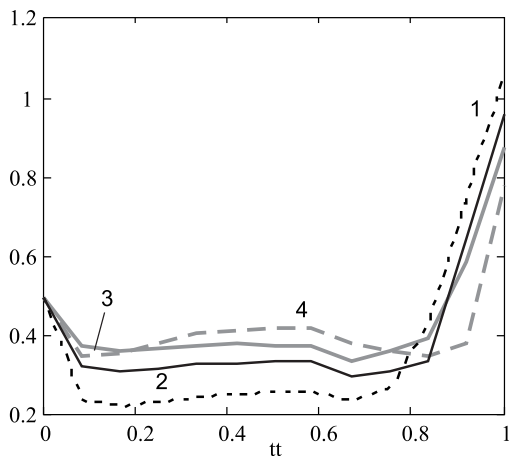
$$x^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}, \quad x_{\text{зад}} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d^0 = \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = 1,005, \quad N = 9, \quad t \in [0, 1].$$

Решаем исходную задачу, при постепенном увеличении числа шагов ( $N = 7, 8, 9$ ), используя структуру нулевого приближения (39). В силу «жесткости» при



- 1 — первая итерация нулевого асимптотического приближения (расчет на 7 шагах)
- 2 — вторая итерация нулевого асимптотического приближения (расчет на 8 шагах)
- 3 — третья итерация нулевого асимптотического приближения (расчет на 9 шагах)
- 4 — точное управление (расчет на 12 шагах)



- 1 — первая субоптимальная траектория (расчет на 7 шагах)
- 2 — вторая субоптимальная траектория (расчет на 8 шагах)
- 3 — третья субоптимальная траектория (расчет на 9 шагах)
- 4 — точная траектория (расчет на 12 шагах)

Рис. 1

вычислениях сингулярно возмущенных задач оптимального управления (см. [19, 20]) реализация алгоритмов их решения на стандартных пакетах не всегда устойчива (здесь мы проводили вычисления в среде MathCad), поэтому использование качественной информации о решении сингулярно возмущенной задачи управления, полученной при малом числе шагов, помогает решать исходные задачи с большим числом шагов и с большим числом фазовых ограничений. Здесь мы обрабатывали достаточно

грубо визуальную информацию и использовали ее для формирования коррекции предыдущего управления (39), полученного для заданного числа шагов, с целью построения управления для большего числа шагов. Коррекции нулевого приближения для простоты выполнялись только для второй координаты вектора управления.

Из графиков видно (рис. 1), что траектории в процессе улучшения равномерного нулевого приближения к управлению приближаются к точным,

и при этом сумма квадратов отклонений между точной траекторией и получающимися субоптимальными траекториями вдоль приведенных трех приближений оптимального управления принимает последовательно значения: 0,732; 0,16; 0,0098.

## 6. Заключение

В работе приведен краткий обзор дискретных моделей оптимальной экономической динамики, связанных с траекториями, имеющими т. н. магистральные участки вследствие достаточно большого количества шагов. Впервые показывается возможность использования в сингулярно возмущенных задачах оптимального управления с большим количеством фазовых ограничений техники сингулярных возмущений на основе прямой схемы построения асимптотических приближений. Предложена дискретная модель экономической динамики, сочетающая свойства динамических моделей Леонтьева и Неймана. Для дискретных задач оптимального управления в задачах экономической динамики с малым шагом предложен эффективный алгоритм приближенного решения и его последовательного улучшения на основе соотношений нулевого равномерного асимптотического приближения.

## Литература

1. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972.
2. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
3. *Дмитрук Н. М.* Метод магистральных задач построения оптимальной политики в динамических моделях экономики. Труды Ин-та математ. НАН Беларуси. Мн., 2000. Т. 7. С. 44–50.
4. *Черемных Ю. Н.* Математические модели развития народного хозяйства. М.: Издательство Московского университета, 1986.
5. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
6. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
7. *Гусев Д. Е., Якубович В. А.* Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации // Вестник ЛГУ. Сер. 1, 1983. № 2. С. 20–27.
8. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику: Конструктивная теория: Учебное пособие. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2014.
9. *Панюков А. В.* Математическое моделирование экономических процессов: Учебное пособие. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2015.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1978.
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
12. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
13. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах. // Фундаментальная и прикладная математика, 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
14. *А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. М.: ВИНТИ, 1982. № 20. С. 3–77
15. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
16. *Дмитриев М. Г.* Пограничный слой в задачах оптимального управления // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Киберн. 1983. № 4. С. 63–69.
17. *Гаипов М. А.* Асимптотика решений некоторых задач оптимального управления с сингулярно возмущенными связями: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Гаипов Мухамедкули Акалович. Иркутск, 1992.
18. *Luenberger D. G., Arbel A.* Notes and comments singular dynamic Leontief systems // Econometrica, 1977. Vol. 45. № 4.
19. *Горнов А. Ю., Дмитриев М. Г., Тятюшкин А. И.* Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем // Деп. в ВИНТИ. 1985. 8441–В85.
20. *Горнов А. Ю., Дмитриев М. Г., Зароднюк Т. С.* Повышение эффективности поиска оптимального управления в нелинейных задачах на основе выбора начального приближения // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления, ВСПУ-2014. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 2408–2414.

**Даник Юлия Эдуардовна.** Преподаватель НИУ ВШЭ. Окончила в 2014 г. НИУ ВШЭ. Область научных интересов: сингулярные возмущения, оптимальное управление дискретными системами, построение регуляторов, стабилизация дискретных управляемых систем, модели экономической динамики, методы интеллектуальной обработки данных. E-mail: yuliadanik@gmail.com

**Дмитриев Михаил Геннадьевич.** Гл. н. с. ИСА РАН. Д. ф.-м. н., профессор. Окончил в 1969 г. Днепропетровский ГУ. Количество печатных работ: более 200. Область научных интересов: теория сингулярных возмущений и ее приложения. E-mail: mdmitriev@mail.ru