Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию*

В. М. Азанов, Ю. С. Кан

Аннотация. Рассматривается задача импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли (ИСЗ), вращающегося по околокруговой орбите. Целью коррекции является перевод ИСЗ на круговую орбиту. Математическая модель процесса коррекции представляется в виде дискретной стохастической системы управления с вероятностным терминальным критерием качества. Ошибки отработки расчетной величины корректирующего импульса имеют равномерное распределение. Задача оптимального управления для случая двух шагов по времени аналитически решается с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: *стохастическое оптимальное управление, дискретные системы, вероятностный критерий, искусственный спутник Земли, двигатель большой тяги.*

Введение

Задачи оптимального управления по вероятностным критериям качества составляют предмет изучения специального раздела теории стохастического оптимального управления. К числу вероятностных критериев относятся функционал вероятности и функционал квантили. Функционал вероятности представляет собой вероятность непревышения некоторым точностным функционалом заданного допустимого уровня. Сам точностный функционал при этом характеризует точность системы управления, но зависит от траектории стохастической системы.

Функционал квантили является, в некотором смысле, обратной характеристикой по отношению к функционалу вероятности. Физический смысл функционала квантили в том, что он, будучи верхней доверительной границей для точностного функционала, по сути характеризует гарантированную по вероятности точность системы управления.

Примером указанных выше задач является задача коррекции траектории движения ИСЗ, вращающегося по околокруговой орбите [2, 8–10]. Цель коррекции заключается в превращении орбиты ИСЗ в круговую с заданным периодом, при этом предполагается использовать КДУ большой тяги, позволяющую с малой задержкой осуществлять корректирующие импульсы.

В данной статье рассмотрена задача оптимальной двухимпульсной коррекции движения ИСЗ с помощью двигателя большой тяги в дискретном времени. Критерием является вероятность попадания терминального состояния в интервал фиксированной длины. Случайные ошибки отработки КДУ большой тяги предполагаются равномерно распределенными. Соответствующая задача оптимального управления аналитически решается методом динамического программирования.

1. Постановка задачи

Геостационарные ИСЗ играют важнейшую роль в современных системах связи. Для земного наблюдателя они должны казаться неподвижными. Однако из-за ошибок различной природы (например, ошибок выведения) ИСЗ, который должен быть геостационарным, постепенно смещается, дрейфует по

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15–08–02833, № 14–07–00089).

отношению к земному наблюдателю. Для устранения такого дрейфа время от времени орбита спутника подвергается коррекции, чтобы постепенно ликвидировать дрейф ИСЗ. Для коррекции орбиты предполагается использовать корректирующую двигательную установку (КДУ) большой тяги, позволяющую практически мгновенно осуществлять корректирующие импульсы.

Рассмотрим задачу управления с учетом случайных воздействий в дискретном времени $k=\overline{0,N+1}$. В соответствии с [10], введем обозначения: z_k^1 — текущее угловое расстояние между k-ым прохождением через апогей и требуемым положением на круговой орбите; z_k^2 — угловая скорость дрейфа в k-ый момент времени прохождения апогея, измеряемая угловым смещением ИСЗ за один оборот; t_k — количество оборотов по орбите; u_k — величина k-ого корректирующего импульса, пересчитанная в скорость дрейфа; ω_k — случайный коэффициент, $\omega_k \sim R[-\varepsilon,\varepsilon]$, характеризующий неточность отработки расчетной величины корректирующего импульса u_k. Будем рассматривать случай $\varepsilon<1$. Математическая модель процесса управления ИСЗ имеет вид [9]:

$$\begin{cases} z_{k+1}^1 = z_k^1 + t_k z_k^2, \\ z_{k+1}^2 = z_k^2 + u_k\left(1+\omega_k\right), \end{cases} \tag{1}$$

начальные условия: $z_0^1 = z^1$, $z_0^2 = 0$. Процесс корректирования считается законченным, если после проведения последней ($k=N$) коррекции выполняются следующие терминальные ограничения, образующие расчетную область

$$\left|z_{N+1}^1\right| \le \varphi,\ \ \left|z_{N+1}^1 + t z_{N+1}^2\right| \le \varphi,$$

где t — требуемое время пребывания ИСЗ, в окрестности требуемой долготы, φ — скаляр, характеризующий длину расчетной области. Будем предполагать, что ИСЗ является геостационарным, если находится в расчетной области.

Введем в рассмотрение функционал вероятности:

$$P_\varphi\left(u(\cdot)\right) = P\left(\max\left\{\left|z_{N+1}^1\right|,\left|z_{N+1}^1 + t z_{N+1}^2\right|\right\} \le \varphi\right), \tag{2}$$

Поставим задачу нахождения оптимального управления $u_k(\cdot) = (u_0,..,u_N)$, максимизирующего функционал (2):

$$P_\varphi\left(u(\cdot)\right) \to \max_{u(\cdot)}. \tag{3}$$

Задача (3) относится к классу задач оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. К таким задачам применим метод динамического программирования, что подробно обосновано в [10].

2. Синтез оптимального управления

В соответствии с методом динамического программирования, введем функцию выигрыша

$$\begin{aligned} &W_k^\varphi\left(z^1,z^2\right) = \\ &= \sup_{u_k(\cdot),\dots,u_N(\cdot)} P\Big(\max\left\{\left|z_{N+1}^1\right|,\left|z_{N+1}^1 + t z_{N+1}^2\right|\right\} \le \\ &\le \varphi \Big| z_k^1 = z^1, z_k^2 = z^2\Big). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $N=1$. Тогда для $k=1$ функция выигрыша имеет вид

$$W_1^\varphi\left(z_1^1,z_1^2\right) = \max_{u_1} M\left[W_2^\varphi\left(z_2^1,z_2^2\right)\Big|z_1^1,z_1^2\right],$$

$M[\cdot]$ — математическое ожидание. Граничные условия:

$$W_2^\varphi\left(z_2^1,z_2^2\right) = \begin{cases} 1, & \max\left\{\left|z_2^1\right|,\left|z_2^1 + t z_2^2\right|\right\} \le \varphi, \\ 0, & \max\left\{\left|z_2^1\right|,\left|z_2^1 + t z_2^2\right|\right\} > \varphi. \end{cases}$$

Оптимальное управление определяется в результате решения конечномерной задачи

$$u_1^* = \arg\max_{u_1} M\left[W_2^\varphi\left(z_2^1,z_2^2(u_1)\right)\Big|z_1^1,z_1^2\right],$$

Преобразуем выражение для функции выигрыша на $k=1$ шаге

$$W_1^\varphi\left(z_1^1,z_1^2\right) = \max_{u_1} P\Big(\max\left\{\left|z_1^1 + t_1 z_1^2\right|,\left|z_1^1 + \left(t+t_1\right) z_1^2 + t u_1\right.\right.$$

Перепишем его в виде

$$W_1^\varphi\left(z_1^1,z_1^2\right) = \begin{cases} \max\limits_{u_1} P\Big(\left|z_1^1 + \left(t+t_1\right)z_1^2 + t u_1\left(1+\omega_1\right)\right| \le \varphi\Big), \\ \qquad \left|z_1^1 + t_1 z_1^2\right| \le \varphi, \\ 0, \\ \qquad \left|z_1^1 + t_1 z_1^2\right| > \varphi. \end{cases}$$

Из последнего выражения видно, что задача оптимизации на шаге $k=1$ имеет вид

$$u_1^* = \arg\max_{u_1} P\Big(\left|z_1^1 + \left(t+t_1\right)z_1^2 + t u_1\left(1+\omega_1\right)\right| \le \varphi\Big). \tag{4}$$

Утверждение 1.

Оптимальное управление на шаге $k=1$ *имеет вид*

$$u_1^*\left(z_1^1,z_1^2\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-\varphi-\left(z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right)}{t\left(1+\varepsilon\right)}, & z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\geq\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\\ \dfrac{\varphi-\left(z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right)}{t\left(1-\varepsilon\right)}, & \varphi\leq z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\leq\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\\ 0, & -\varphi\leq z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\leq\varphi,\\ \dfrac{-\varphi-\left(z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right)}{t\left(1-\varepsilon\right)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}\leq z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\leq-\varphi,\\ \dfrac{\varphi-\left(z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right)}{t\left(1+\varepsilon\right)}, & z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\leq-\dfrac{\varphi}{\varepsilon}.\end{cases} \quad (5)$$

Доказательство утверждения 1 приведено в приложении.

Утверждение 2.

1) *Пусть выполнено* $\dfrac{\left|z_1^1+t_1z_1^2\right|}{\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|}<\varepsilon,$ *тогда функция выигрыша на шаге* $k=1$ *имеет вид*

$$W_1^{\varphi}\left(z_1^1,z_1^2\right)=$$

$$=\begin{cases}1, & \varphi\geq\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|\varepsilon,\\ \dfrac{\varphi}{\varphi+\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|}\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}, & \left|z_1^1+t_1z_1^2\right|<\varphi<\\ & <\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|\varepsilon,\\ 0, & \varphi\leq\left|z_1^1+t_1z_1^2\right|.\end{cases} \quad (6)$$

2) *Пусть выполнено* $\dfrac{\left|z_1^1+t_1z_1^2\right|}{\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|}\geq\varepsilon,$ *тогда функция выигрыша на* $k=1$ *имеет вид*

$$W_1^{\varphi}\left(z_1^1,z_1^2\right)=\begin{cases}1, & \left|z_1^1+t_1z_1^2\right|\leq\varphi,\\ 0, & \left|z_1^1+t_1z_1^2\right|>\varphi.\end{cases} \quad (7)$$

Доказательство утверждения 2 приведено в приложении.

Для того, чтобы охарактеризовать найденное оптимальное управление, рассмотрим три случая.

Случай 1, когда $\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|\leq\varphi$, не интересен, поскольку требуемая конечная точность выполнена и коррекции проводить вообще не требуется. Однако в данном случае имеет место некая зона нечувствительности $u_1=0$. Такая зона нечувствительности играет важную роль в задаче коррекции траектории движения ИСЗ, поскольку не предполагает расхода топлива при совершении коррекции. Это является преимуществом использования вероятностного критерия, нежели среднеквадратического (см. раздел 4).

Случай 2, когда выполняется неравенство $\varphi\leq\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|\leq\dfrac{\varphi}{\varepsilon}$, является основным на $k=1$ шаге. Оптимальное управление в этом случае обеспечивает значение 1 критерию вероятности.

Случай 3, когда $\left|z_1^1+\left(t+t_1\right)z_1^2\right|\geq\dfrac{\varphi}{\varepsilon}$, означает, что требуемая точность не может быть достигнута при проведении одной коррекции, следовательно необходимо проведение дополнительных коррекций.

3. Сравнение вероятностной, среднеквадратической, минимаксной и обобщенной минимаксной задач

На рис. 1 представлены графики оптимального управления $u_1^*\left(z_1\right)$ (5), оптимального в минимаксной задаче управления $u_1^S\left(z_1\right)$ [8], оптимального в среднеквадратической задаче $u_1^M\left(z_1\right)$ [9] и оптимального в обобщенной минимаксной задаче $u_1^E\left(z_1\right)$ [10].

Отметим, что среднеквадратический подход подразумевает грубую аппроксимацию терминальных ограничений $\left|z_{N+1}^1\right|\leq\varphi$, $\left|z_{N+1}^1+tz_{N+1}^2\right|\leq\varphi$, в результате которой расчетная область в виде параллелограмма оказывается вписанным в него эллипсом. Также среднеквадратический подход уступает остальным указанным с точки зрения физического смысла задачи. Это касается случая, когда спутник уже находится в расчетной области (или оказался в ней после проведения соответствующей коррекции) и скорости дрейфа не хватит, чтобы вывести его оттуда за заданное время. Данный случай описывается зоной нечувствительности, приведенной в предыдущем разделе. Оптимальное управление $u_1^E\left(z_1\right)$ обладает этим преимуществом, однако его вычисление для случая двух коррекций затруднительно.

Особое внимание следует уделить минимаксной задаче коррекции. Можно отметить статью [7], в которой проведено сравнение вероятностного и минимаксного подходов по значениям критериев оптимальности. В [7] указано, что относительный средний эффект использования вероятностного критерия почти на сорок процентов оптимистичнее минимаксного.

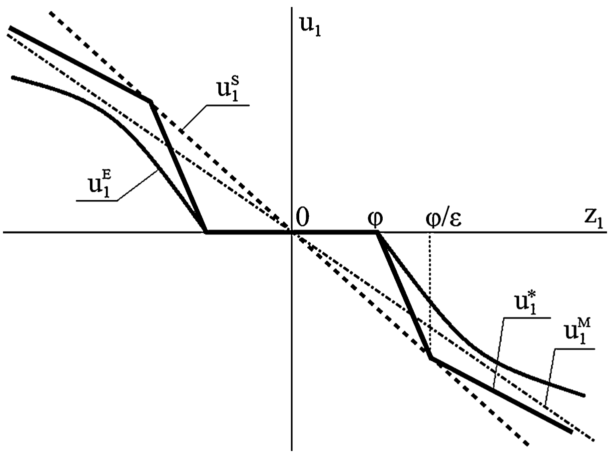

Рис. 1

Рассмотрим минимаксную задачу коррекции [8]. В данном случае помехи ω_k не случайны, а известен лишь диапазон их изменения, задаваемый множеством

$$S=\left\{x:\ \left|x_k\right|\le\epsilon_k,\quad k=\overline{0,N}\right\},$$

где $\epsilon_k<1$. Минимаксная задача заключается в поиске такой последовательности управления

$$u=\left\{u_k\left(z_k\right)\right\},\quad k=\overline{0,N},$$

которая гарантирует достижение некоторой точности

$$\left|z_{N+1}\right|\le\phi,$$

здесь ϕ — максимально допустимая величина конечного промаха. Минимаксная задача имеет вид

$$u^S\left(\cdot\right)=\arg\min_{u(\cdot)}\max_{\omega_k\in S}\left|z_{N+1}\right|,\qquad k=\overline{0,N}.$$

Минимаксная стратегия коррекции для $N=1$ на шаге $k=1$ имеет вид [8]

$$u_1^S\left(\mathrm{z}_1\right)=\begin{cases}\dfrac{-z_1}{t}, & z_1\ge\dfrac{\phi}{\epsilon_1},\\ \dfrac{\phi-z_1}{t\left(1-\epsilon\right)}, & \phi\le z_1\le\dfrac{\phi}{\epsilon_1},\\ 0, & -\phi\le z_1\le\phi,\\ \dfrac{-\phi-z_1}{t\left(1-\epsilon\right)}, & -\dfrac{\phi}{\epsilon_1}\le z_1\le-\phi,\\ \dfrac{-z_1}{t}, & z_1\le-\dfrac{\phi}{\epsilon_1}.\end{cases}$$

Нетрудно заметить, что оптимальное управление (5) схоже с оптимальным в минимаксной задаче управлением $u_1^S\left(\mathrm{z}_1\right)$, причем для $z_1\in\left[-\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\ \dfrac{\varphi}{\varepsilon}\right]$, $\varphi=\phi$, $\varepsilon=\epsilon_1$ выполняется $u_1^*\left(\mathrm{z}_1\right)=u_1^S\left(\mathrm{z}_1\right)$. В этом случае оптимальное значение критерия вероятности равно 1.

4. Двухимпульсная коррекция

Далее, действуя в соответствии со схемой динамического программирования, найдем функцию выигрыша на $k=0$ шаге:

$$W_0^\varphi\left(z_0^1,z_0^2\right)=\max_{u_0}M\left[W_1^\varphi\left(z_1^1,z_1^2\left(u_0\right)\right)\middle|z_0^1,z_0^2\right].$$

Теорема 1.

Пусть выполнены условия второго пункта утверждения 2, тогда оптимальное управление на шаге $k=0$ имеет вид

$$u_0^*\left(z_0^1,z_0^2\right)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{-\varphi-\left(z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right)}{t_1\left(1+\varepsilon\right)}, & z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\ge\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\\ \dfrac{\varphi-\left(z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right)}{t_1\left(1-\varepsilon\right)}, & \varphi\le z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\le\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\\ 0, & -\varphi\le z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\le\varphi,\\ \dfrac{-\varphi-\left(z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right)}{t_1\left(1-\varepsilon\right)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}\le z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\le-\varphi,\\ \dfrac{\varphi-\left(z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right)}{t_1\left(1+\varepsilon\right)}, & z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\le-\dfrac{\varphi}{\varepsilon},\end{cases}$$

функция выигрыша на шаге $k=0$ определяется выражением

$$W_0^\varphi\left(z_0^1,z_0^2\right)=$$
$$=\begin{cases}1, & \varphi\ge\left|z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right|\varepsilon,\\ \dfrac{\varphi}{\varphi+\left|z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right|}\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}, & \varphi<\left|z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2\right|\varepsilon.\end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Случай, приведенный в теореме 1, интересен тем, что допускает обобщение исходной задачи до случая $k=N$ шагов.

Рассмотрим случай, когда выполняется первое условие утверждения 2. Введем обозначения

$$z_0=z_0^1+\left(t+t_1+t_0\right)z_0^2,\quad z_0^*=z_0^1+\left(t_1+t_0\right)z_0^2.$$

Перепишем функцию выигрыша на $k=1$ шаге, преобразуя z_1^1, z_1^2 в соответствии с (1)

$$W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)= \\ =\begin{cases} 1, & \varphi \geq \left|z_0+\left(t+t_1\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right|\varepsilon, \\ \dfrac{\varphi}{\varphi+\left|z_0+\left(t+t_1\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right|}\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}, & \left|z_0^*+t_1u_0\left(1+\omega_0\right)\right|<\varphi \leq \\ & \leq \left|z_0+\left(t+t_1\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right|\varepsilon, \\ 0, & \varphi \leq \left|z_0^*+t_1u_0\left(1+\omega_0\right)\right|. \end{cases} \tag{8}$$

Задача поиска оптимального управления на шаге $k=0$ имеет вид

$$u_0^* = \arg\max_{u_0} M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right) \middle| z_0^*, z_0\right].$$

Отметим, что в работе [2] для нахождения $M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right) \middle| z_0^*, z_0\right]$ использовался подход [4]. Однако полученная формула и ее вывод слишком громоздкие. В данной работе используется методика [1], что позволяет значительно упростить вывод математического ожидания функции $W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)$.

Введем обозначение

$$M^{\varphi}\left(z_0, u_0, \omega_0\right) = M\left[\frac{\varphi}{\varphi+\left|z_0+\left(t+t_1\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right|}\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right].$$

Математическое ожидание функции $W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)$ в соответствии с методикой [1] определяется выражением

$$M\left[W_1^{\varphi}(z_0^*, z_0, u_0)\right] = P\left(\left|z_0+\left(t_1+t\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right| \leq \frac{\varphi}{\varepsilon}\right)+ \\ +M^{\varphi}\left(z_0, u_0, \omega_0\right)P\begin{pmatrix} \left|z_0+\left(t_1+t\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right| \geq \dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \left|z_0^*+t_1u_0\left(1+\omega_0\right)\right| \leq \varphi \end{pmatrix}.$$

Последнее выражение является аналогом выражения для $M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)\right]$ в работе [2].

Без ограничения общности рассмотрим случай $u_0<0$. С учетом начальных условий, выражение для $M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)\right]$ может быть переписано в виде

$$M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^*, z_0, u_0\right)\right] = M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^1, u_0\right)\right]= \\ =P\left(\frac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1 \leq \omega_0 \leq \frac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1\right)+ \\ +M^{\varphi}\left(z_0^1, u_0, \omega_0\right)P\begin{pmatrix} \omega_0 \geq \max\left\{\dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1, \ \dfrac{\varphi - z_0^1}{t_1u_0}-1\right\}, \\ \omega_0 \leq \min\left\{\dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1, \ \dfrac{-\varphi - z_0^1}{t_1u_0}-1\right\} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда выполнены неравенства

$$\begin{cases} \dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1 \geq \dfrac{\varphi - z_0^1}{t_1u_0}-1, \\ \dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1 \leq \dfrac{-\varphi - z_0^1}{t_1u_0}-1. \end{cases}$$

Разрешая последнюю систему неравенств относительно z_0^1, имеем

$$-\frac{\varphi}{\varepsilon}\frac{\left(t+t_1\right)\varepsilon+t_1}{t} \leq z_0^1 \leq \frac{\varphi}{\varepsilon}\frac{\left(t+t_1\right)\varepsilon+t_1}{t}.$$

Введем обозначения

$$\hat{P}_{\varphi}\left(u_0\right) = P\left(\frac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1 \leq \omega_0 \leq \frac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{\left(t+t_1\right)u_0}-1\right).$$

Выражение для $M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^1, u_0\right)\right]$ принимает вид

$$M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^1, u_0\right)\right]= \\ =\hat{P}_{\varphi}\left(u_0\right)+M^{\varphi}\left(z_0^1, u_0, \omega_0\right)\left(1-\hat{P}_{\varphi}\left(u_0\right)\right). \tag{9}$$

Формула (9) справедлива $\forall u_0$, в этом случае

$$\hat{P}_{\varphi}\left(u_0\right) = P\left(\left|z_0+\left(t_1+t\right)u_0\left(1+\omega_0\right)\right| \leq \frac{\varphi}{\varepsilon}\right).$$

Лемма 1.

Задача оптимизации

$$u_0^* = \arg\max_{u_0} M\left[W_1^{\varphi}\left(z_0^1, u_0\right)\right] \tag{10}$$

эквивалентна задаче

$$u_0^* = \arg\max_{u_0} \hat{P}_{\varphi}\left(u_0\right). \tag{11}$$

Доказательство леммы 1 приведено в приложении.

Теорема 2.

Пусть выполнено

$$z_0^1 \in \left[-\frac{\varphi}{\varepsilon}\frac{\left(t+t_1\right)\varepsilon+t_1}{t}, \ \frac{\varphi}{\varepsilon}\frac{\left(t+t_1\right)\varepsilon+t_1}{t}\right],$$

$$z_0^2 = 0, \quad t<\frac{\varepsilon}{\left(1-\varepsilon\right)}t_1,$$

тогда оптимальное управление на шаге $k=0$ *определяется выражением*

$$u_0^* = \begin{cases} \dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1+\varepsilon)}, & \dfrac{\varphi}{\varepsilon^2} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon}\left(\dfrac{t_1 + (t+t_1)\varepsilon}{t}\right), \\ \dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1-\varepsilon)}, & \dfrac{\varphi}{\varepsilon} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon^2}, \\ 0, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1-\varepsilon)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon^2} \le z_0^1 \le -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1+\varepsilon)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}\left(\dfrac{t_1 + (t+t_1)\varepsilon}{t}\right) \le z_0^1 \le -\dfrac{\varphi}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Условие $t < \dfrac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} t_1$ демонстрирует чувствительность исходной задачи к параметрам системы. Из последнего выражения видно, что зона нечувствительности уменьшилась в ε раз относительно последней коррекции. Вторая и четвертая ветви являются основными расчетными случаями на $k=0$ шаге, на соответствующем отрезке указанное оптимальное управление обращает вероятностный критерий в 1. Первая и четвертая ветви также могут обращать вероятностный критерий в 1, однако лишь в точках $\varphi = z_0^1\varepsilon^2$ — в случае положительного z_0^1 и $\varphi = -z_0^1\varepsilon^2$ — в случае $z_0^1 < 0$. Однако исключая такие точки, они не гарантируют достижение некоторой точности, что свидетельствует об необходимости проведения дополнительных корректирующих воздействий.

5. Задача с квантильным функционалом

Квантильный критерий определяется выражением [10]

$$\Phi_\alpha(u) = \min\left\{\varphi \middle| P_\varphi(u) \ge \alpha\right\}, \tag{12}$$

где $\alpha \in (0,1)$ — заданная доверительная вероятность. Функционал квантили (12) представляет собой гарантированный с заданной вероятностью уровень указанного выше точностного функционала, т. е. верхнюю доверительную границу для нее. Рассмотрим задачу минимизации квантильного критерия:

$$\Phi_\alpha(u) \to \min_{u(\cdot)}. \tag{13}$$

Ввиду наличия вероятностного ограничения $P_\varphi(u) \ge \alpha$ применение метода динамического программирования к задаче (13) затруднено. В предыдущем разделе было получено аналитическое решение задачи оптимального управления с вероятностным критерием. В [5] предложен метод преобразования этого решения в решение задачи (13). С целью формулировки достаточных условий применимости этого метода введем в рассмотрение функции оптимальных значений рассматриваемых функционалов

$$F(\varphi) = \sup_{u(\cdot)} P_\varphi(u), \qquad G(\alpha) = \inf_{u(\cdot)} \Phi_\alpha(u).$$

Следующая теорема [5] устанавливает эквивалентность задач вероятностной и квантильной оптимизации.

Теорема 3 [5].

Пусть φ_α — единственный обобщенный корень уравнения $F(\varphi) = \alpha$ ($F(\varphi_\alpha - \delta) \le \alpha \le F(\varphi_\alpha + \delta)$ $\forall\delta$), тогда $G(\alpha) = \varphi_\alpha$. Более того, если для $\varphi = \varphi_\alpha$ существует решение u_φ задачи $P_\varphi(u) \to \max_{u(\cdot)}$ и выполняется неравенство $F(\varphi) \ge \alpha$, то u_φ — решение задачи (13).

Проверим выполнение достаточных условий эквивалентности задач вероятностной и квантильной оптимизации в случае, когда выполнены условия теоремы 1. Из определения функции оптимального выигрыша следует

$$F(\varphi) = W_0^\varphi\left(z_0^1, z_0^2\right).$$

Поскольку $F(\varphi)$ монотонно не убывает по φ и строго возрастает на множестве $F^{-1}((0,1))$, условия теоремы 3 выполнены. Найденное оптимальное управление в теореме 1 будет оптимальным по квантильному критерию, если параметр φ определить как корень уравнения $F(\varphi) = \alpha$ в указанном выше смысле.

Заключение

Рассмотрена задача оптимальной двухимпульсной коррекции околокруговой орбиты ИСЗ с помощью двигателя большой тяги по критерию вероятности в дискретном времени. С помощью метода динамического программирования найдено оптимальное управление, решающее указанную задачу (теорема 1 и теорема 2). Показано, что в случае выполнения условий теоремы 1 найденное оптимальное управление является оптимальным в задаче с критерием в форме функционала квантили. Проведено сравнение оптимального управления на последнем шаге коррекции с оптимальными управлениями в среднеквадратической, минимаксной и обобщенной минимаксной задачах. В результате сравнения обнаружено, что найденное оптимальное управление совпадает с оптимальным в минимаксной задаче управлением на отрезке состояний, на котором с вероятностью единица выполняются терминальные условия точности.

Приложение

Доказательство утверждения 1.

Задача оптимизации функционала вероятности (4) относится к классу задач стохастического программирования [6]. Для ее аналитического решения можно воспользоваться, например, методом детерминированного эквивалента [3].

Обозначим $z_1 = z_1^1 + (t+t_1)z_1^2$. *Рассмотрим задачу* $u_1^* = \arg\max_{u_1} P\left(\left|z_1 + tu_1\left(1+\omega_1\right)\right| \le \varphi\right)$, *из последнего выражения следует, что для состояний* $|z_1| \le \varphi$ *оптимальным является управление* $u_1^* = 0$, *т. е. имеет место зона нечувствительности [10]. Для случая* $u_1 < 0$ *задачу (3) можно записать в виде*

$$u_1^* = \arg\max_{u_1\in(-\infty,0)} P\left(\frac{\varphi - z_1}{tu_1} - 1 \le \omega_1 \le \frac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1\right),$$

а для случая $u_1 > 0$

$$u_1^* = \arg\max_{u_1\in(0,+\infty)} P\left(\frac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1 \le \omega_1 \le \frac{\varphi - z_1}{tu_1} - 1\right).$$

Поскольку последние две задачи имеют практически одинаковый вид (разница лишь в знаке перед φ *и* $sign(z_1)$*), без ограничения общности рассмотрим случай* $u_1 < 0$. *В силу* $\varphi > 0$ *для*

$$u_1 \in \left[\frac{-\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \frac{\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right]$$

справедливо

$$\widetilde{P_\varphi}(u_1) = P\left(\frac{\varphi - z_1}{tu_1} - 1 \le \omega_1 \le \frac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}\left(\min\left\{\frac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1,\quad \varepsilon\right\} - \max\left\{\frac{\varphi - z_1}{tu_1} - 1,\quad -\varepsilon\right\}\right),$$

в остальных случаях последняя функция равна нулю. Последнее выражение можно переписать в виде

$$\widetilde{P_\varphi}(u_N) =$$
$$= \begin{cases} 1, & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}\right], \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\varepsilon - \dfrac{\varphi - z_1}{tu_1} + 1\right), & u_1 \in \left[\max\left\{\dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right\}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right], \\ -\dfrac{\varphi}{\varepsilon tu_1}, & u_1 \in \left[\dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right], \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\dfrac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1 + \varepsilon\right), & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \min\left\{\dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right\}\right]. \end{cases}$$

Пусть выполнено $\varphi \ge z_1\varepsilon$, *в этом случае* $\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)} \le \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}$ *и последнее выражение запишется*

$$\widetilde{P_\varphi}(u_1) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\varepsilon - \dfrac{\varphi - z_1}{tu_1} + 1\right), & u_1 \in \left[\dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right], \\ 1, & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}\right], \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\dfrac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1 + \varepsilon\right), & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right]. \end{cases}$$

Из последнего выражения видно, что

$$u_1^* \in \left[\frac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}, \frac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}\right],$$

т. е. оптимальным является любое управление из отрезка, поэтому справедлив, $u_1^* = \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}$. *Пусть выполнено* $\varphi \le z_1\varepsilon$, *в этом случае* $\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)} \ge \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}$ *и*

$$\widetilde{P_\varphi}(u_1) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\varepsilon - \dfrac{\varphi - z_1}{tu_1} + 1\right), & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right], \\ -\dfrac{\varphi}{\varepsilon tu_1}, & u_1 \in \left[\dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{-\varphi - z_1}{t(1+\varepsilon)}\right], \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\left(\dfrac{-\varphi - z_1}{tu_1} - 1 + \varepsilon\right), & u_1 \in \left[\dfrac{-\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}, \dfrac{\varphi - z_1}{t(1-\varepsilon)}\right]. \end{cases}$$

Из последнего выражения видно, что $u_1^* = \dfrac{-\varphi - z_1}{t\left(1+\varepsilon\right)}$*, так как первая ветвь убывает, а вторая и третья — возрастают по* u_1 *и выполнено* $-\dfrac{\varphi}{\varepsilon t u_1^*} \ge -\dfrac{\varphi}{\varepsilon t \widehat{u_1}}$ *при* $\varphi \le z_1\varepsilon$*, где* $\widehat{u_1} = \dfrac{\varphi - z_1}{t\left(1-\varepsilon\right)}$*. Проводя аналогичные действия для* $u_1 > 0$*, получаем (5).*

Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2.

Подставим оптимальное управление (5) в выражение для $W_1^{\varphi}\left(z_1^1, z_1^2\right)$*:*

$$W_1^{\varphi}(z_1^1, z_1^2) = \begin{cases} 1, & \varphi \ge | z_1^1 + (t+t_1) z_1^2 | \varepsilon, \\ & \varphi > | z_1^1 + t_1 z_1^2 |, \\ \dfrac{\varphi}{\varphi + | z_1^1 + (t+t_1) z_1^2 |} \dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}, & \varphi < | z_1^1 + (t+t_1) z_1^2 | \varepsilon, \\ & \varphi > | z_1^1 + t_1 z_1^2 |, \\ 0, & \varphi \le | z_1^1 + t_1 z_1^2 |. \end{cases}$$

Таким образом в случае $\dfrac{| z_1^1 + t_1 z_1^2 |}{| z_1^1 + (t+t_1) z_1^2 |} < \varepsilon$ *функция выигрыша принимает вид (6), а в противном случае — (7).*

Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1.

Из второго пункта утверждения 2 имеем

$$W_1^{\varphi}(z_1^1, z_1^2) = \begin{cases} 1, & | z_1^1 + t_1 z_1^2 | \le \varphi, \\ 0, & | z_1^1 + t_1 z_1^2 | > \varphi. \end{cases}$$

Подставим в последнее выражение z_0^1 *и* z_0^2 *в соответствии с (1):*

$$W_1^{\varphi}(z_0^1, z_0^2, u_0) = \begin{cases} 1, & | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 + t_1 u_0 \left(1+\omega_0\right) | \le \varphi, \\ 0, & | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 + t_1 u_0 \left(1+\omega_0\right) | > \varphi. \end{cases}$$

Для определения математического ожидания функции $W_1^{\varphi}(z_0^1, z_0^2, u_0)$ *воспользуемся методикой [1]. Введем систему гипотез, образующую полную группу несовместных событий*

$$H_1 = \left\{ | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 + t_1 u_0 \left(1+\omega_0\right) | \le \varphi \right\},$$

$$H_2 = \left\{ | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 + t_1 u_0 \left(1+\omega_0\right) | > \varphi \right\},$$

и воспользуемся формулой полного математического ожидания

$$M\left[W_1^{\varphi}(z_0^1, z_0^2, u_0)\right] = P\left(| z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 + t_1 u_0 \left(1+\omega_0\right) | \le \varphi \right).$$

Оптимальное управление на $k=0$ *шаге определяется в результате решения задачи*

$$u_0^* = \arg\max_{u_0} M\left[W_1^{\varphi}(z_0^1, z_0^2, u_0) \mid z_0^1, z_0^2\right].$$

Поставленная задача стохастического программирования схожа с задачей (4). Из утверждения 1 получаем

$$u_0^* = \begin{cases} \dfrac{-\varphi - \left(z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2\right)}{t_1(1+\varepsilon)}, & z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 \ge \dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\varphi - \left(z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2\right)}{t_1(1-\varepsilon)}, & \varphi \le z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ 0, & -\varphi \le z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 \le \varphi, \\ \dfrac{-\varphi - \left(z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2\right)}{t_1(1-\varepsilon)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon} \le z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 \le -\varphi, \\ \dfrac{\varphi - \left(z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2\right)}{t_1(1+\varepsilon)}, & z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 \le -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Подставляем u_0^* *в* $M\left[W_1^{\varphi}(z_0^1, z_0^2, u_0)\right]$*, получаем*

$$W_0^{\varphi}(z_0^1, z_0^2) = \begin{cases} 1, & \varphi \ge | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 | \varepsilon, \\ \dfrac{\varphi}{\varphi + | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 |} \dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}, & \varphi < | z_0^1 + (t_1+t_0) z_0^2 | \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 1.

Исследуем выражение (9). Так как функция выигрыша имеет смысл вероятности некоторого события, справедливо неравенство $0 \le M\left[W_1^{\varphi}(z_0^1, u_0)\right] \le 1$*. Рассмотрим функцию* $M^{\varphi}(z_0, u_0, \omega_0)$*:*

$$M^{\varphi}(z_0, u_0, \omega_0) = M\left[\frac{\varphi}{\varphi + z_0 + (t+t_1) u_0 (1+\omega_0)} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right] = \frac{\varphi\left(\varepsilon+1\right)}{2\varepsilon^2 (t+t_1) u_0} \ln\left[\frac{\varphi + z_0 + (t+t_1) u_0 (1+\varepsilon)}{\varphi + z_0 + (t+t_1) u_0 (1-\varepsilon)}\right].$$

В данном случае наличие модуля под знаком математического ожидания несущественно. Нетрудно заметить, что выполнены неравенства

$$0 < M^{\varphi}(z_0, u_0, \omega_0) < 1 \ \text{и} \ 0 \le \hat{P}_{\varphi}(u_0) \le 1.$$

С учетом этих неравенств имеем

$$M\left[W_1^{\varphi}(z_0^1, u_0)\right] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P}_{\varphi}(u_0) = 1.$$

Отсюда следует эквивалентность задач (10) и (11) по управлению u_0 .

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.

Согласно лемме 1 задача поиска оптимального управления на шаге $k = 0$ *эквивалентна задаче*

$$u_0^* = \arg\max_{u_0} P\left(\left|z_0 + (t_1 + t)u_0(1 + \omega_0)\right| \le \frac{\varphi}{\varepsilon}\right).$$

Последняя в соответствии с утверждением 1 и с учетом ограничений на состояние z_0^1

имеет решение

$$u_0^* = \begin{cases} \dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1+\varepsilon)}, & \dfrac{\varphi}{\varepsilon^2} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon}\left(\dfrac{t_1 + (t+t_1)\varepsilon}{t}\right), \\ \dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1-\varepsilon)}, & \dfrac{\varphi}{\varepsilon} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon^2}, \\ 0, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon} \le z_0^1 \le \dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \dfrac{-\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1-\varepsilon)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon^2} \le z_0^1 \le -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}, \\ \dfrac{\varphi/\varepsilon - z_0^1}{(t+t_1)(1+\varepsilon)}, & -\dfrac{\varphi}{\varepsilon}\left(\dfrac{t_1 + (t+t_1)\varepsilon}{t}\right) \le z_0^1 \le -\dfrac{\varphi}{\varepsilon^2}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Азанов В. М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // АиТ. 2014. № 10. С. 39–51.
2. *Азанов. В. М., Кан Ю. С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты исз по вероятностному критерию // Теория и практика системного анализа. Труды III всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. 2014. Т. 1. С. 5–11.
3. *Вишняков Б. В., Кибзун А. И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АиТ. 2006. № 6. С. 126–143.
4. *Григорьев П. В., Кан Ю. С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2004. № 2. С. 179–197.
5. *Кан Ю. С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.
6. *Кан Ю. С., Кибзун А. И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
7. *Кан Ю. С., Сысуев А. В.* Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем // АиТ. 2007. № 1. С. 57–67.
8. *Лебедев А. А., Бобронников В. Т., Красильщиков М. Н., Малышев В. В.* Статичтическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.
9. *Лебедев А. А., Красильщиков М. Н., Малышев В. В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974.
10. *Малышев В. В., Кибзун А. И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.

Азанов Валентин Михайлович. Студент 5-го курса МАИ. Количество печатных работ: 1. Область научных интересов: Стохастическое оптимальное управление. E-mail: azanov59@gmail.com

Кан Юрий Сергеевич. Профессор МАИ. Д. ф.-м. н. Окончил в 1985 г. МАИ. Количество печатных работ: 32. Область научных интересов: Стохастическое программирование, стохастическое оптимальное управление. E-mail: yu_kan@mail.ru