Динамические системы

Область притяжения системы с нелинейностями секторного и полиномиального типа

А. И. Баркин

Аннотация. Представлен метод вычисления области притяжения системы, содержащей нелинейность секторного типа и нелинейные элементы второй и третьей степени. Метод основан на сканировании фазового пространства в полярных координатах. Эффективность нового подхода иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: *нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость, область притяжения, полярные координаты*.

Введение

Рассматривается система вида

$$\dot{x} = Ax + b\xi + B_2(x) + B_3(x), \qquad (1)$$

где $x \in \Re^n$, A — постоянная устойчивая (гурвицева) матрица. Скалярная переменная

$$\xi(t) = \phi(\sigma, t),\ \sigma = c'x$$

представляет собой выходной сигнал нелинейного нестационарного элемента, удовлетворяющего неравенству

$$0 \le \phi(\sigma, t)\sigma \le k\sigma^2, \qquad (2)$$

или в более компактной форме

$$\xi(c'x - k^{-1}\xi) \ge 0 . \qquad (3)$$

Векторы $B_2(x)$ и $B_3(x)$ состоят из n элементов, которые являются квадратичными или кубическими формами соответственно, так что

$$B_2(rx) = r^2 B_2(x),\ B_3(rx) = r^3 B_3(x)$$

для любого действительного числа r.

Значительная журнальная литература [1–6] посвящена рассмотрению систем вида (1) при $b = 0$, т. е. не имеющих нелинейности секторного типа (2). С другой стороны, огромное число статей и книг посвящено задаче абсолютной устойчивости систем управления, в которых учитывается только нелинейность вида (2) (см. обзор [7] и книги [8, 9]). В теории абсолютной устойчивости ищутся условия глобальной устойчивости в пространстве параметров. Поскольку система (1) в общем случае свойством глобальной устойчивости не обладает, то ставится задача оценки области притяжения системы (1) по начальным условиям x_0 в пространстве состояния.

Поставленная задача решается с помощью метода, предложенного в статье [6]. Однако существенное отличие системы (1) от модели работы [6] состоит в наличии квадратичных элементов и нелинейной нестационарной обратной связи секторного типа (2). Вследствие этого предлагается использовать оригинальную несимметричную функцию Ляпунова. Кроме того, в процессе оптимизации оценки области притяжения решаются нелинейные матричные уравнения Лурье, в то время как в [6] решались линейные уравнения Ляпунова.

1. Основной результат

Введем функцию Ляпунова V как положительное решение уравнения

$$V^2 - 2Vg'x - x'Lx = 0\,, \tag{4}$$

где матрица $L = L' > 0$ (т. е. матрица L является симметричной и положительно определенной) и вектор $g \in \Re^n$. Положительное решение уравнения (4) имеет вид

$$V(x) = g'x + \sqrt{x'Nx}, \quad N = L + gg'. \tag{5}$$

Функция $V(x)$ обладает необходимыми свойствами: $V(0) = 0;\ V(x) > 0$, если $x \neq 0$. Кроме того, $V(rx) = rV(x)$, если $r \geq 0$.

Дифференцируя (4), в силу уравнения системы (1) получаем:

$$\begin{aligned} F \equiv 2\sqrt{x'Nx}\,\frac{dV}{dt} &= 2(g'Ax + g'b\xi + g'B_2(x) + \\ &+g'B_3(x)V + x'(A'L + LA)x + \\ &+2x'Lb\xi + 2x'L(B_2(x) + B_3(x)). \end{aligned} \tag{6}$$

Используя неравенство (3), получим:

$$\begin{aligned} F &\leq 2(g'Ax + g'b\xi + g'B_2(x) + g'B_3(x))V + \\ &+x'(A'L + LA)x + 2x'Lb\xi + \\ &+\xi(c'x - k^{-1}\xi) + 2x'L(B_2(x) + B_3(x)). \end{aligned} \tag{7}$$

Выделим в правой части неравенства (7) слагаемые, зависящие от ξ:

$$z(\xi) \equiv -k^{-1}\xi^2 + 2\xi(x'(Lb + 0{,}5c) + g'bV)\,.$$

Выделяя здесь полный квадрат, получим:

$$\begin{aligned} z(\xi) &= -(\sqrt{k^{-1}}\,\xi - \sqrt{k}\,(x'u + g'bV))^2 + \\ &+k((x'u)^2 + (g'bV)^2 + 2g'bVx'u), \end{aligned}$$

где $u = Lb + 0{,}5c$.

Используя последнее выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} F &\leq 2(c'Ax + c'B_2(x) + c'B_3(x))V + \\ &+x'(A'L + LA + kuu')x + 2x'L(B_2(x) + \\ &+B_3(x)) + 2kg'bVx'u + \\ &+k(g'b)^2V^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Возьмем в качестве матрицы L решение уравнений типа Лурье

$$\begin{aligned} &A'L + LA + kuu' = -P, \\ &Lb + 0{,}5c = u, \end{aligned} \tag{9}$$

где $P = P' > 0$. В соответствии с частотной теоремой [10], необходимым и достаточным условием существования действительного решения $L = L' > 0$ уравнений (9) является неравенство

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} c'(A - i\omega I)^{-1}b + \\ &+k^{-1} - b'(A' + i\omega I)^{-1}P(A - i\omega I)^{-1}b > 0, \\ &\forall\omega \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что неравенство (10) обеспечивает абсолютную устойчивость системы (1) в отсутствие полиномиальных слагаемых. Считая (10) выполненным и применяя (9) в (8), получаем:

$$\begin{aligned} F &\leq -x'Px + 2(g'Ax + g'B_2(x) + g'B_3(x))V + \\ &+2x'L(B_2(x) + B_3(x)) + 2kg'bx'uV + \\ &+k(g'b)^2V^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Найдем в фазовом пространстве область $\Im$, в которой правая часть (11) отрицательна. Для этого преобразуем элементы вектора x, введя полярные координаты $x = rv(\phi)$. Конкретный вид этого преобразования связан с порядком n системы (1) и зависит от $n-1$ угловых координат, изменяющихся на интервале $[0, 2\pi]$. Например

$$v = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{bmatrix}, \text{ если } n = 2\,;$$

$$v = \begin{bmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 \\ \cos\phi_1\sin\phi_2 \\ \sin\phi_1 \end{bmatrix}, \text{ если } n = 3\,;$$

$$v = \begin{bmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2\cos\phi_3 \\ \cos\phi_1\cos\phi_2\sin\phi_3 \\ \cos\phi_1\sin\phi_2 \\ \sin\phi_1 \end{bmatrix}, \text{ если } n = 4\text{, и т. д.}$$

Полярные координаты позволяют сканировать (просматривать) фазовое пространство системы (1) по угловым координатам и определять границы области $\Im$ по длине r радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку x. В полярных координатах имеем

$$\begin{aligned} F &\leq -r^2(v'Pv - 2g'AvV_\phi - 2kg'bVv'u + \\ &+k(g'b)^2V_\phi^2) + 2r^3(v'LB_2(v) + g'B_2(v)V_\phi) + \\ &+2r^4(g'B_3(v)V_\phi + v'LB_3(v)), \\ V_\phi &= g'v + \sqrt{v'Nv}. \end{aligned}$$

Отсюда следует описание области $\Im$

$$-G_0 + 2G_1r + G_2r^2 < 0\,, \tag{12}$$

где коэффициенты

$$G_0 = v'Pv - 2g'AvV_\phi - 2k(g'b)(v'u)V_\phi - k(g'b)^2 V_\phi^2, \quad (13)$$

$$G_1 = v'LB_2(v) + g'B_2(v)V_\phi, \; G_2 = 2(g'B_3(v)V_\phi + v'LB_3(v))$$

зависят от угловых координат и не зависят от r.

Отметим, что из устойчивости системы (1) в малом следует неравенство $G_0 > 0$, которое можно обеспечить выбором вектора g. Решая неравенство (12), получаем оценку области $\mathfrak{I}$

$$r < \frac{G_0}{G_1 + \sqrt{G_1^2 + G_0 G_2}}. \quad (14)$$

Оценка (14) имеет смысл, если одновременно выполнены два условия:

$$\text{а) } G_1^2 + G_0 G_2 \ge 0;$$

$$\text{б) } G_1 + \sqrt{G_1^2 + G_0 G_2} > 0. \quad (15)$$

Элементарный анализ показывает, что в случае невыполнения одного из этих условий неравенство (12) справедливо при любом положительном значении r, т. е. можно положить $r = \infty$. Область притяжения определяется неравенством

$$V(x) < \mu \quad (16)$$

при условии, что она будет вложена в область (14–15). Поэтому следует принять

$$\mu = \min_{\phi}(rV_\phi), \quad (17)$$

где минимум берется по всем угловым координатам, а r является решением экстремальной задачи максимизации r при ограничениях (14)–(15). При невысоком порядке уравнения (1) для нахождения минимума можно использовать простой перебор. Оценка области притяжения (16) при использовании (5) приводится к виду

$$(x' + \mu c'L^{-1})L(x + \mu L^{-1}c) < \mu^2(1 + c'L^{-1}c), \quad (18)$$

определяющему эллипсоид в пространстве $\mathfrak{R}^n$.

Как видим, решение задачи зависит от выбора матрицы P, которая имеет $n(n+1)/2$ свободных параметров, вектора g, имеющего n элементов и величины k. Поскольку важно получить возможно больший объем эллипсоида (18), то возникает задача оптимизации:

$$\det L / \mu^2(1 + g'L^{-1}g) \to \min \quad (19)$$

при ограничениях $G_0 > 0$, $P = P' > 0$ и (10). Эту задачу можно решить одним из вариантов симплекс-метода (метода деформируемого многогранника).

2. Примеры и обсуждение результатов

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 0,5x_1^2 - \xi, \\ &\xi(x_1 - \xi) \ge 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В принятых выше обозначениях имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5x_1^2 \end{bmatrix}, \; B_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k = 1.$$

Результаты вычислений показаны на рис. 1, где внешняя кривая *1* оценивает область, в которой производная функции Ляпунова отрицательна, а внутренняя кривая *2* является оценкой области притяжения. Видно, что область притяжения несимметрична относительно начала координат.

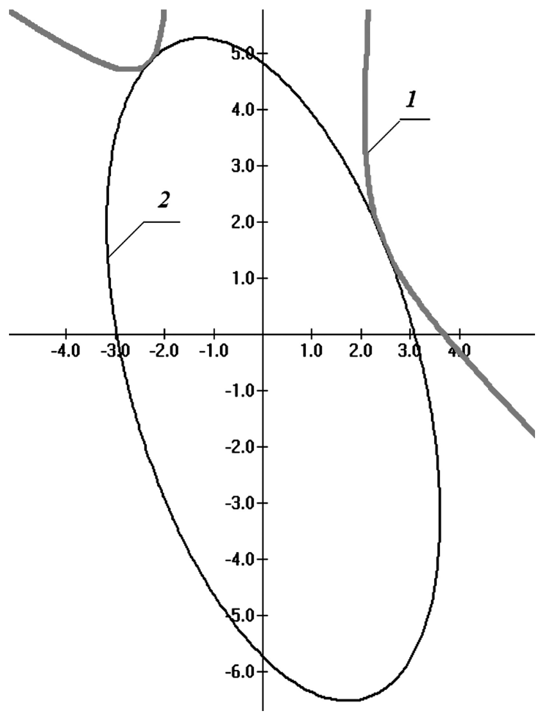

Рис. 1

Пример 2. Пусть система имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 + 0,5x_1^3, \\ &\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 0,5x_1^2 + (0,5/\sqrt{3})x_1^2 x_2 + 0,5x_2^3 - \xi, \\ &\xi(x_1 - k^{-1}\xi) \ge 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В данном случае

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}, c=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$B_2(x)=\begin{bmatrix}0\\ 0,5x_1^2\end{bmatrix},$$

$$B_3(x)=\begin{bmatrix}0,5x_1^3\\ (0,5/\sqrt{3})x_1^2x_2+0,5x_2^3\end{bmatrix}.$$

Рассмотрены два варианта. Первый вариант: $k=0,001$; это означает, что влияние секторной нелинейности мало. Во втором варианте положим $k=1$.

Результаты расчета показаны на рис. 2 и рис. 3 соответственно, где кривая *1* определяет оценку области с отрицательной производной функции Ляпунова, а внутренняя кривая *2* оценивает область притяжения системы (21). Как видим, наличие секторной нестационарной нелинейности приводит к уменьшению оценки области притяжения и её симметризации.

В целом можно сказать, что предложенный метод работоспособен, по крайней мере для систем невысокого порядка. Точность оценок определить затруднительно, поскольку все сведения о нестационарной нелинейности заключены в неравенстве (2). Отметим, что при отсутствии четных степеней в правой части уравнения (1) расчеты сходятся к почти симметричному решению с пренебрежимо малыми элементами вектора g. Поэтому с целью уменьшения размерности поисковой задачи можно сразу положить $g=0$, т. е. в этом случае функцией Ляпунова является квадратичной форма $x'Lx$.

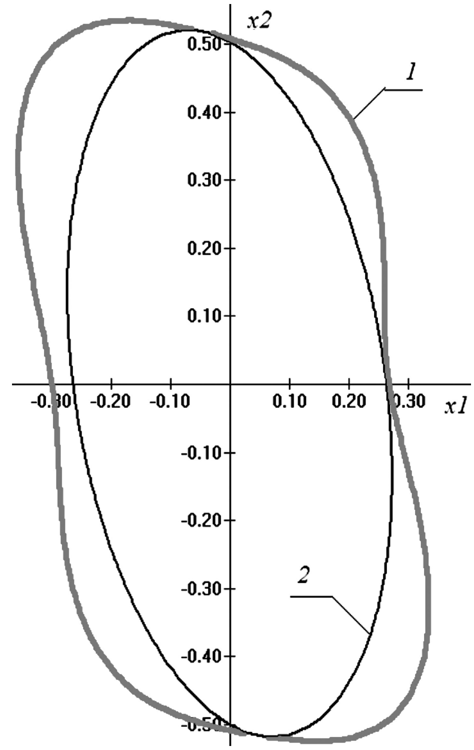

Рис. 3

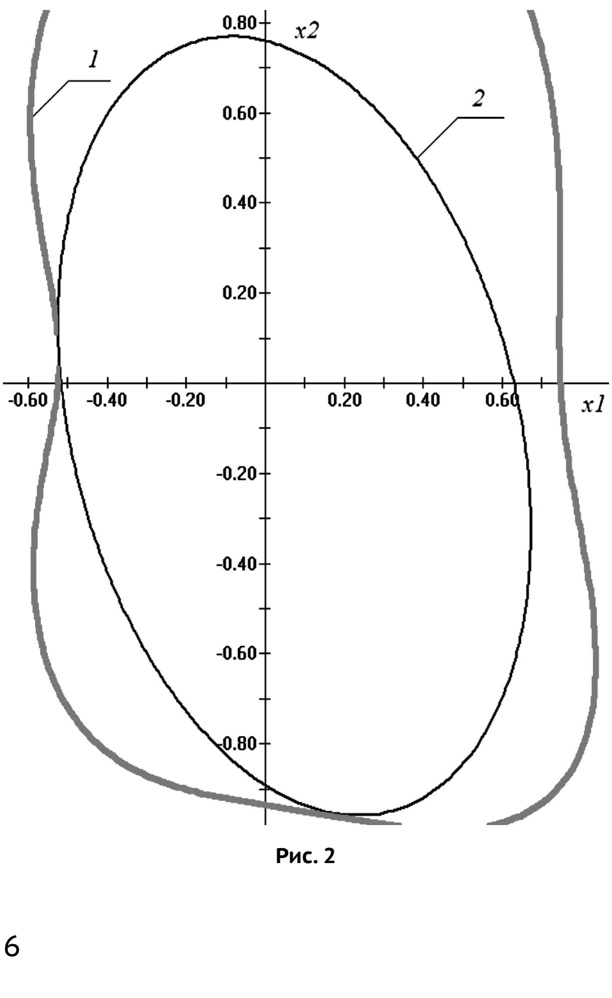

Рис. 2

Литература

1. *Каменецкий В. А.* Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1994. № 6. С. 10–26.
2. *Chesi G., Garulli A., Tesi A. and Vicino A.* LMI-based computation of optimal quadratic Lypunov functions for odd polynomial systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2005. V. 15. P. 35–49.
3. *Valmorbida G., Tarbouriech S., Garcia G.* Region of attraction estimates for polynomial systems // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, P. R. China, December 16–18, 2009. P. 5947–5952.
4. *Vannelli A., Vidyasagar M.* Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for polynomial differential equations // Automatica. 1985. V. 21. № 1. P. 69–80.

5. *Баркин А. И.* Вычисление области притяжения для систем с полиномиальной правой частью // Информационные технологии и вычислительные системы. 2013. № 4. С. 3–8.
6. *Баркин А. И.* Оценивание области устойчивости систем с кубическими нелинейностями // Труды ИСА РАН. Т. 64. Вып. 4. 2014. С. 3–8.
7. *Либерзон М. Р.* Новые результаты по абсолютной устойчивости нестационарных регулируемых систем // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 29–48.
8. *Баркин А. И.* Абсолютная устойчивость систем управления. М.: URSS, 2012. 176 с.
9. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Издательство МАИ, 1992. С. 300.
10. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. С. 400.

Баркин Александр Иванович. Гл. н. с. ИСА РАН. Д. т. н., профессор. Окончил в 1962 г. МВТУ им. Н. Э. Баумана. Количество печатных работ: 50 (в том числе 3 монографии). Область научных интересов: системы управления, устойчивость динамических систем, оптимизация. E-mail: barkin@isa.ru