Системы управления и моделирование

Алгоритм анализа робастной устойчивости дискретных систем управления с периодическими ограничениями

М. В. Морозов

Аннотация. Для дискретных линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями на их параметры разработан алгоритм численного построения периодических по времени функций Ляпунова из заданного параметрического класса. Этот алгоритм основан на решении соответствующих минимаксных задач математического программирования. Установлена сходимость построенного алгоритма и приведен пример его реализации на компьютере.

Ключевые слова: *дискретные линейные нестационарные системы управления, периодические ограничения, функции Ляпунова, алгоритм численного построения, параметрические классы, минимаксные задачи математического программирования.*

Введение

В большинстве работ, посвященных решению проблемы робастной устойчивости для линейных систем управления с параметрической неопределенностью, рассматривались лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы**.** Однако ряд практических задач, в частности задача об абсолютной устойчивости систем управления с периодически меняющимися параметрами [1–2], приводит к необходимости рассмотрения таких множеств изменения параметров системы и характеристик нелинейных элементов, границы которых изменяются по заданным периодическим законам. Получению условий робастной устойчивости для таких систем посвящены работы [3–4], в которых был использован метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида.

В [2], с помощью периодических по времени функций Ляпунова из класса форм четной степени, были установлены критерии абсолютной устойчивости для дискретных систем управления с фиксированной периодической матрицей линейной части и периодически изменяющимися секторными ограничениями на характеристики нелинейных элементов. В работе [1], которая является продолжением [2], рассматривалась более общая задача робастной абсолютной устойчивости для нелинейных дискретных систем управления при наличии периодических ограничений на элементы матрицы линейной части системы и характеристики нелинейных элементов. С использованием вариационного метода и метода функций Ляпунова были получены общие критерии робастной абсолютной устойчивости таких систем.

Поскольку в общем случае аналитическая проверка условий соответствующих теорем затруднительна, возникает необходимость разработки эффективных методов численного построения функций Ляпунова из классов, выделенных в [2].

Данная работа является продолжением [5], где был разработан алгоритм анализа робастной устойчивости непрерывных линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями на их параметры. Как и в [5], основу разработанного ниже алгоритма составляет изложенный в [6] численный метод анализа устойчивости линейных непрерывных систем управления с фиксированной периодической матрицей коэффициентов. Для анализа устойчивости таких систем в [6] использовались функции Ляпунова из класса квадратичных форм с периодической матрицей, представимой конечной матричной суммой ряда Фурье. В данной работе для линейных дискретных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями разработан сходящийся алгоритм численного построения функций Ляпунова из класса однородных форм четной степени с периодическими коэффициентами, представимыми в виде конечной суммы ряда Фурье. Так же, как и в [6], показано, что задача построения таких функций Ляпунова сводится к соответствующей минимаксной задаче.

Построенный алгоритм может служить критерием робастной устойчивости рассматриваемых систем управления и, одновременно, критерием абсолютной устойчивости систем, рассмотренных в [2], в форме численной процедуры.

Отмечены особенности построенного алгоритма, связанные с дискретностью времени. Приведен пример реализации разработанного алгоритма численного построения функций Ляпунова для заданной совокупности дискретных периодических систем управления второго порядка.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная система управления:

$$x(s+1)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(s)A_k(s)x(s), \quad s=0,\ 1,\ldots, \tag{1}$$

где $A_k(s),\ k=\overline{1,m}$ — фиксированные периодические матрицы периода N, а $\lambda_k(s),\ k=\overline{1,m}$ — произвольные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_k(s)\ge 0,\ \ k=\overline{1,m},\ \ \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(s)=1,\ \ s=0,\ 1,\ldots . \tag{2}$$

Будем называть систему (1) робастно устойчивой относительно нестационарной параметрической неопределенности $\lambda(s)=\{\lambda_k(s),\ k=\overline{1,m}\}$, если ее нулевое решение $x(s)\equiv 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе неопределенности $\lambda(s)$, удовлетворяющей условиям (2).

Из работы [2] следует, что система (1) эквивалентна разностному включению

$$x(s+1)\in F(s,x(s)),\ \ s=0,\ 1,\ldots,\ \ F(s+N,x)\equiv F(s,x). \tag{3}$$

$$F(s,x)=\ \Big\{y: y=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(s)A_k(s)x\,,\ \lambda_k(s)\ge 0,\ \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(s)=1\Big\}\,.$$

Эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений системы (1) и включения (3) при одинаковых начальных условиях. Множество $F(s,x)$ в каждой точке $x\in R^n$ представляет собой выпуклый многогранник, границы которого периодически изменяются, с периодом N. По этой причине функция $F(s,x)$ задает периодические ограничения на параметры исходной нестационарной системы (1).

Рассмотрим задачу построения для включения (3) периодических по s функций Ляпунова из класса однородных по x форм степени $2p$

$$V_{2p}(s,x)=\sum_{i=1}^{N_p}\alpha_i(s)\psi_i(x),\quad \alpha_i(s+N)=\alpha_i(s),\quad i=\overline{1,N_p}. \tag{4}$$

В случае непрерывного времени в работе [5] периодические коэффициенты α_i представлялись в виде отрезка ряда Фурье с числом гармоник, задающимся в ходе проведения численного эксперимента. В случае дискретного времени аналогичное представление периодических коэффициентов $\alpha_i(s)$ в (4) содержит фиксированное число гармоник, равное $(N-1)$, что обусловлено видом ряда Фурье в случае дискретного времени [7]. Это представление задается соотношениями

$$\alpha_i(s)=b_0^i+\sum_{j=1}^{N-1}(l_j^i\sin\omega js+b_j^i\cos\omega js),$$
$$\omega=2\pi N^{-1},\quad i=\overline{1,N_p}. \tag{5}$$

Из теоремы 4 в работе [2] следует, что функции Ляпунова (4), (5) устанавливают необходимые и достаточные условия робастной устойчивости системы (1) (или асимптотической устойчивости решения $x(s)\equiv 0$ включения (3)).

Задача состоит в разработке эффективного алгоритма численного построения для включения (3), а, следовательно, и для системы (1), функций Ляпунова $V_{2p}(s,x)$ вида (4), (5). В соответствии с [6] такой алгоритм будет служить численным критерием асимптотической устойчивости нулевого решения включения (3) (и, одновременно, критерием робастной устойчивости системы (1)).

2. Алгоритм численного построения функций Ляпунова

В настоящем разделе приведенный в [5] алгоритм построения функций Ляпунова для дифференциальных включений переносится, с соответствующими изменениями, на разностные включения (3).

В соответствии с дискретным аналогом прямого метода Ляпунова, построение функции Ляпунова (4), (5) для разностного включения (3) сводится к поиску вектора параметров α, определяющего решение совокупности неравенств

$$\Delta_k(\alpha,s,x)= \\ =V_{2p}(s+1,A_k(s)x)-V_{2p}(s,x)<0,\ \ x\neq 0,\ \ k=\overline{1,m}, \tag{6}$$

задающих условия строгого монотонного убывания функции $V_{2p}(s,x)$ на решениях включения (3).

Вектор α в (6), составленный из коэффициентов $b_0^i, l_j^i, b_j^i, i=\overline{1,N_p}, j=\overline{1,N-1}$ в представлении (5) имеет размерность $\tilde{N}_\alpha=(2N-1)N_p$.

Учитывая (4) и (5), построение функций Ляпунова для включения (3) сводится к поиску вектора параметров α, определяющего решение неравенств

$$\Delta_k(\alpha,s,x)= \\ =\sum_{i=1}^{N_p}(\alpha_i(s+1)\psi_i(A_k(s)x)-\alpha_i(s)\psi_i(x))<0,\ \ x\neq 0, \tag{7}$$

$$k=\overline{1,m}.$$

Рассмотрим задачу математического программирования

$$\beta=\min_{\alpha\in G}\ \max_{0\le s\le N-1}\ \max_{\|x\|_\infty=1}\ \max_{1\le k\le m}\Delta_k(\alpha,s,x),$$

$$G=\left\{\ \alpha:\sum_{i=1}^{N_\alpha}\alpha_i^2\le 1\ \right\}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы для включения* (3) *существовала функция Ляпунова* $V_{2p}(s,x)$ *вида* (4), (5), *удовлетворяющая* (7), *необходимо и достаточно, чтобы решение задачи* (8) *удовлетворяло неравенству*

$$\beta<0. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1 проводится с надлежащими изменениями по схеме доказательства теоремы 1 в [6].

Для проверки выполнения неравенства (9) предлагается использовать, с необходимыми изменениями, схему алгоритма, описанного в [5].

Еще одной особенностью случая дискретного времени является то обстоятельство, что в (8) максимизация по s (как и по $k=\overline{1,m}$) может быть проведена простым перебором $s=0,1,...,N-1$. Поэтому, в отличие от случая решения соответствующей минимаксной задачи в в [5], нет необходимости введения сетки по s.

В работе [6] функция $\dot{V}(t,x)$ представляла собой форму второй степени по x, у которой локальный максимум по x совпадает с глобальным, и при максимизации $\dot{V}(t,x)$ по x в соответствующей минимаксной задаче была использована одна из модификаций метода наискорейшего спуска. В случае задачи (8) глобальная максимизация по x функции максимума $\max\limits_{1\le k\le m}\Delta_k(\alpha,s,x)$ градиентными методами затруднена тем обстоятельством, что у рассматриваемой функции локальный максимум может не совпадать с глобальным максимумом. В связи с этим, в отличие от алгоритма, приведенного в [6], в задаче (8) максимизацию по x предполагается проводить на дискретной сетке. Для удобства максимизация по x проводится не на сфере, а на поверхности единичного куба $\left\{\|x\|_\infty=1\right\}$.

На множестве $D=[0,T]\times\{\|x\|_\infty=1\}$ введем последовательность вложенных друг в друга сеток $\left\{S(h_i^t,h_i^x)\right\},\ i=1,2,...$. Множества точек

$$t_\nu,\ \nu=\overline{1,[\mathrm{T/h_i^t}+1}\ \text{и}\ x_s,\ s=\overline{1,2n([2/h_i^x]+1)},$$

сетки $\left\{S(h_i^t,h_i^x)\right\}$ определяются ее шагами h_i^t и h_i^x (по t и по x соответственно). Будем предполагать, что сетки вложены друг в друга, т. е.

$\left\{S(h_i^t,h_i^x)\right\}\in\left\{S(h_{i+1}^t,h_{i+1}^x)\right\}$ и $h_{i+1}^t=h_i^t/2$, $h_{i+1}^x=h_i^x/2$.

На сетке $\left\{S(h_i^t,h_i^x)\right\}$ определим функцию

$$\chi_i(\alpha)=\max_{0\le s\le N-1}\ \max_{x\in S(h_i^x)}\ \max_{1\le k\le m}\Delta_k(\alpha,s,x),\ \ i=1,2,.... \tag{10}$$

Так же, как и в случае алгоритма, приведенного в [5], справедливы следующие утверждения

Теорема 2. *Пусть числа* β_i *определены в соответствии с*

$$\beta_i = \min_{\alpha \in G} \chi_i(\alpha). \quad (11)$$

Тогда выполнено предельное соотношение

$$\lim \beta_i = \beta \text{ при } i \to \infty .$$

Для получения необходимых и достаточных условий выполнения неравенства (9), сформулированных ниже в теоремах 3 и 4, используется следующая лемма.

Лемма. *Каждая из функций* $\Delta_k(\alpha, s, x),\ k = \overline{1,m}$ *удовлетворяет на множестве* $\{\|x\|_\infty = 1\}$ *условию Липшица по* x *с константой* $L_x > 0$, *не зависящей от* $\alpha \in G,\ k = \overline{1,m}$ *и* $s = 0,1,\ldots$.

Доказательство Леммы приведено в приложении.

Аналогами теорем 3, 4 в [5] в случае разностного включения (3) являются следующие две теоремы.

Теорема 3. *Для выполнения условия* (9) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $i \geq 1$, *что*

$$\beta_i < 0 \ \text{ и } \ h_i^x < -2\beta_i / L_x .$$

Теорема 4. *Для того, чтобы было выполнено условие* (9), *необходимо и достаточно, чтобы существовали такое число* $i \geq 1$ *и вектор* $\alpha_i \in G$, *что*

$$\chi_i(\alpha_i) < 0 \ \text{ и } \ h_i^x < -2\chi_i(\alpha_i) / L_x . \quad (12)$$

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теорем 3 и 4 в [5].

Предлагаемый алгоритм проверки выполнения условия (9) опирается на утверждение теоремы 4. На q-м шаге ($q = 0,1,\ldots$) алгоритма вычисляется значение функции $\chi_i(\alpha_i)$ на векторе $\alpha^{q-1} \in G$, найденном на $q-1$ шаге алгоритма (вектор α^0 выбирается произвольно из множества G), и проверяется выполнение условий (12). В случае выполнения этих условий производится остановка алгоритма, поскольку в этом случае вектор параметров $\alpha^{q-1} \in G$ определяет функцию Ляпунова $V_{2p}(\alpha, s, x)$ вида (4), (5) с отрицательно определенной производной.

Заметим, что выполнение условий (12) можно обеспечить лишь уменьшением значения функции $\chi_i(\alpha)$. В соответствии с этим, в случае если условия (12) не выполнены, на q-м шаге алгоритма с помощью метода эллипсоидов [8–9], который может быть использован для решения задачи (11) минимизации выпуклой функции, определяется вектор α^q. По формулам метода эллипсоидов [9] вычисляется вспомогательный вектор $d(\alpha^{q-1})$ и шаг H_{q-1}. Значение α^q определяется соотношением

$$\alpha^q = \alpha^{q-1} + H_{q-1} d(\alpha^{q-1}) . \quad (13)$$

Если условия (14) не выполняются за заданное число шагов алгоритма (13), то необходимо повторить алгоритм на новой сетке $S(h_{i+1}^x)$. Уменьшение шагов сетки, в случае необходимости, осуществляется до тех пор, пока не нарушится условие $h_i^x > \delta$, где δ — заданное положительное число, определяемое особенностями реализации на компьютере предлагаемого алгоритма.

В случае, если с помощью предлагаемого алгоритма не удается построить функцию Ляпунова (4), (5) для включения (3) с заданным значением параметра *p*, необходимо увеличить значение *p* и повторить алгоритм с новым значением *p*.

Если удалось построить функцию Ляпунова (4), (5) удовлетворяющую условию (7), тогда на сетке $S(h_i^x)$ простым вычислением значений осуществляется проверка положительной определенности построенной функции Ляпунова $V_{2p}(\alpha, s, x)$ с использованием условий на h_i^x, аналогичных условиям, фигурирующим в теоремах 3, 4 (эти условия будут гарантировать положительную определенность $V_{2p}(\alpha, s, x)$ в точках $(s, x) \in D,\ (D = \{0,1,\ldots N\} \times \{\|x\|_\infty = 1\})$, не принадлежащих $S(h_i^x)$. Дробление шагов сетки, в случае необходимости, осуществляется до тех пор, пока не нарушится условие $h_i^x > \delta$.

3. Пример

Рассматривается линейная дискретная система управления второго порядка с периодическими параметрами

$$x(s+1) = A(s)x(s) + w(s)b(s)c^T(s)x(s) \ , \quad (14)$$

где матрица $A(s)$ и векторы $b(s)$, $c(s)$ периодичны (периода $N = 4$) и имеют вид

$$A(s) = 0,5 \begin{pmatrix} \cos(\pi s) - 1 & -\sin(\pi s) \\ -\sin(\pi s) & -\cos(\pi s) - 1 \end{pmatrix},$$

$$b(s) = \begin{pmatrix} \cos(0,5\pi s) \\ -\sin(0,5\pi s) \end{pmatrix},$$

$$c(s) = \begin{pmatrix} -\cos(0,5\pi s) + 2\sin(0,5\pi s) \\ \sin(0,5\pi s) + 2\cos(0,5\pi s) \end{pmatrix},$$

а $w(s)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $0 \le w(s) \le \mu,\ \mu > 0$ при всех $s = 0,1,\ldots$. Система (14) допускает эквивалентное представление в виде (1) с

$$m = 2,\ A_1(s) = A(s) \text{ и } A_2(s) = A(s) + \mu b(s) c^T(s).$$

Для системы (14) с помощью алгоритма, приведенного выше, были построены функции Ляпунова (4), (5) при различных значениях параметров μ и p. В таблице приведены максимальные значения параметра μ, для которых робастная устойчивость системы (14) устанавливается с помощью функций Ляпунова (4), (5) с соответствующим значением параметра p.

Таблица 1

Таблица зависимости области устойчивости от параметров p и μ

p	1	2	3
μ	0,6665	0,6856	0,6938

Приложение

Доказательство Леммы. Для любых

$$x_1, x_2 \in \left\{ \|x\|_\infty = 1 \right\}$$

справедливо неравенство

$$\left| \Delta_k(\alpha, s, x_2) - \Delta_k(\alpha, s, x_1) \right| \le L_x \left\| x_2 - x_1 \right\|,$$

где

$$L_x = \max_{1 \le s \le N-1} \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le k \le m} \left| \partial \Delta_k(\alpha, s, x) / \partial x \right|. \qquad (15)$$

Введем обозначение

$$A_m = \max_{0 \le s \le N-1} \max_{1 \le k \le m} \left\| A_k(s) \right\|, \qquad (16)$$

Тогда с учетом (4), (15), и (16) получим следующую формулу для L_x:

$$L_x = 2p(N_p(2N-1))^{1/2} (\omega(N-1) + n(1 + 2np) A_m).$$

Лемма доказана.

Литература

1. *Морозов М. В.* Критерии робастной абсолютной устойчивости дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64. № 2. С. 13–18.
2. *Молчанов А. П.*, *Морозов М. В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // Автоматика и телемеханика. 1992. № 10. С. 37–45.
3. *Морозов М. В.* Условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с интервальными ограничениями // Проблемы управления. 2009. № 3. С. 23–26.
4. *Морозов М. В.* Робастная устойчивость дискретных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // Проблемы управления. 2013. № 4. С. 11–15.
5. *Морозов М. В.* Алгоритм анализа робастной устойчивости непрерывных систем управления с периодическими ограничениями // Проблемы управления. 2014. № 2. С. 26–31.
6. *Морозов М. В.* Алгоритм анализа устойчивости линейных периодических систем и его реализация на ЭВМ // АиТ. 1990. № 4. С. 27–35.
7. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
8. *Немировский А. С., Юдин Д. Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
9. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979.

Морозов Михаил Владимирович. С. н. с. ИПУ РАН им. Трапезникова. К. ф.-м. н. Окончил в 1982 г. МГУ. Количество печатных работ: 44. Область научных интересов: теория управления, теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости. E-mail: miguel@ipu.ru