Оптимизация, идентификация, теория игр

Усложненное индивидуально-паретовское равновесие для игровых задач*

В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков

Аннотация. Предлагается понятие равновесия хотя и довольно сложное по своей формулировке, но зато весьма полезное и эффективное с точки зрения поиска единственного решения игровых задач и особенно в тех случаях, когда некоторые известные равновесия, существенные с точки зрения поиска решения, оказываются пустыми.

Ключевые слова: *теория игр и конфликтов.*

Введение

В классической теории игр [1–10] для каждого класса задач (например, — антагонистических, бескоалиционных, некооперативных, кооперативных и др.) были найдены соответствующие каждому классу понятия равновесия. Однако оказывалось, что в каждом классе задач не для всех задач известные понятия равновесия существуют и с ними согласились бы все участники. Например, классическое равновесие по Нэшу [8] существует далеко не во всех бескоалиционных играх, для которых оно предназначалось. Более того, оказалось, что оно может быть даже совершенно неприемлемым для всех участников, как это имеет место, например, в следующей очень простой бескоалиционной игре с матричными платежными функциями

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 900 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1000 & 900 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Стратегия 1-го игрока — это выбор одной из двух строк, а стратегия 2-го — выбор одного из двух столбцов, так что, например, если 1-й игрок выбирает вторую строку, а 2-й игрок — первый столбец, то в игре реализуется ситуация a_{21}, в которой каждый из них получает выигрыш, равный единице ($J_1 = J_2 = 1$). Ситуация a_{21} является равновесием по Нэшу в этой игре, так как ни один из игроков не в состоянии индивидуально улучшить ее для себя. В самом деле, каждый из игроков индивидуально не в состоянии перейти из нее в более выгодную для них ситуацию (1-й игрок имеет возможность перейти из нее только в ситуацию a_{11}, где его выигрыш меньше (нуль), а 2-й — только в ситуацию a_{22}, в которой его выигрыш также меньше (нуль). А по определению, ситуация равновесна по Нэшу, если в ней все участники

* Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 15-01-08838-а).

получают не меньше, чем во всех тех ситуациях, в которые каждый из них имеет возможность перейти индивидуально.

Однако любой человек (даже ничего не знающий о существовании какой-то там теории игр) никогда не согласился бы принять это равновесие в качестве решения данной игры, поскольку ситуация a_{12} (с выигрышами участников (900; 900)) неоценимо выгоднее для обоих, чем равновесная по Нэшу ситуация a_{21} (с выигрышами (1; 1)), и притом она еще и весьма устойчива по отношению к любой попытке любого игрока перейти из нее в более выгодную для него ситуацию. В самом деле, если бы 1-й игрок попытался перейти из ситуации a_{12} в более выгодную для него ситуацию a_{22} (выигрыш в которой равен 1000), то 2-й игрок не замедлил бы сделать ответный ход в единственно доступную ему из этой ситуации ситуацию a_{21}, в которой 1-й игрок получил бы выигрыш всего лишь 1. То же самое справедливо и в отношении попытки 2-го игрока увеличить свой выигрыш с 900 до 1000. Т. е. ситуация a_{21} оказывается весьма устойчивой по отношению к попыткам выхода из нее любого участника, но, однако, не является равновесной по Нэшу.

А чтобы убедиться в том, что равновесие по Нэшу достигается, к тому же, еще и далеко не часто, достаточно поменять местами выигрыши любого из игроков в любых соседних элементах платежных матриц J_1 J_2. Заметим, что и все известные классические равновесия [1–10] существуют также далеко не всегда. Указанные две причины — отсутствие в большинстве игр и содержательная неудовлетворительность некоторых равновесий — вынуждали искать новые подходы к построению теории конфликтов.

В построенной в работах [11–16] теории показано, что, в действительности, все задачи из любого класса игровых задач всегда имеют устойчивое решение, которое не может быть невыгодным ни для одного из участников; более того, в подавляющем числе случаев оно почти всегда единственно и может быть найдено по единой для всех классов задач методике. В этой теории предложена некая система иерархически связанных между собой конфликтных равновесий (не содержащих в своем определении никаких искусственно навязываемых участникам норм поведения), обеспечивающая существование решения, а единственность решения (о котором естественно говорить только в отсутствие какой-либо симметрии в игре) зависит от того, насколько много в этой иерархии используется естественных понятий равновесия.

В данной работе предлагается весьма сложное понятие конфликтного равновесия, призванное в какой-то мере приблизиться к разрешению проблемы единственности решения игровых задач и помогающее находить решение в усложненных случаях.

1. Понятия равновесий и методика их поиска

Чтобы не отвлекаться на несущественные усложнения, связанные как с переходом от задач с двумя участниками к задачам со многими участниками, так и с рассмотрением произвольных функционалов на произвольных множествах, в данной работе рассматриваются только задачи с двумя участниками, причем при следующих ограничениях, ни в коей мере не снижающих общности полученных результатов.

Допущение. Пусть Q_1 и Q_2 — метрические пространства, а G — компактное множество в их произведении $Q_1 \times Q_2$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_1(q)$ и $J_2(q)$, где $q=(q_1,q_2)$.

Предполагается, что i-й участник (игрок), выбирая стратегию (состояние) q_i из доступного ему сечения $G(q_k)$ ($k \neq i$, $i=1,2$) множества G или из проекции $Pr_{Q_i}G$ множества G на пространство Q_i, стремится обеспечить максимум своей «платежной» функции (функционала) $J_i(q)$, $i=1,2$.

Чтобы стала понятна роль предлагаемого нового понятия $\bar{D}^{'P}$-равновесия, приведем сначала те равновесия из [11–16], в иерархический ряд из которых может быть вставлено это новое равновесие, потребность в котором ярко проявляется в приведенном ниже примере бескоалиционной игры.

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовем A_i-экстремальной, если при заданной стратегии q_k^*, $k \neq i$, $k=1,2$, допустимой оказывается только одна стратегия $q_i^* = G(q_k^*)$ или если любой стратегии $q_i \in G(q_k^*) \setminus q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k \stackrel{\Delta}{=} \hat{q}_k < q_i > \in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}_k < q_i >, q_i) \leq J_i(q^*). \qquad (1)$$

Ситуацию q^* назовем ситуацией A-равновесия, если неравенства вида (1) удовлетворяются в точке $q^* \in G$ для обоих $i=1,2$, то есть если $q^* \in A_1 \cap A_2 \stackrel{\Delta}{=} A$.

Равновесие A, существующее (с любой заданной точностью ε) в любых задачах [11–15], причем даже в отсутствие компактности G и непрерывности функций J_i, является гарантом существования решения любой конфликтной задачи и выполняет роль наиcлабейшего из равновесий, причем любые другие возможные (симметричные) равновесия ищутся именно на множестве A и позволяют выделить на этом множестве наисильнейшее равновесие, с которым вынуждены согласиться участники.

Согласно определению 1, если ситуация $q^* \in A_i$, то i-му игроку нецелесообразно отклоняться от нее ввиду угрозы со стороны другого игрока (что следует из определения множества A_i). Понятно, что устойчивость ситуации $q^* \in A_i$ окажется тем сильнее, чем выгоднее она для другого участника (для противника). Это приводит к следующему естественному (джентльменскому) усилению A-равновесных ситуаций, не вносящему никаких искусственных ограничений на поведение игроков.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A_i(q_i^*)} J_k(q_i^*, q_k) = J_k(q^*), k = 1,2, k \neq i. \qquad (2)$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in B_1 \cap B_2$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Смысл равенства (2) в том, что в ситуации q^*, которую i участник не в состоянии улучшить для себя (так как она принадлежит множеству A_i), он предлагает противнику сделать наиболее выгодный для него (для противника) выбор на множестве ситуаций $A_i(q_i^*)$, доступных противнику (q_k) из этой ситуации. Так что множество B-равновесий — это множество «благородных» и в то же время взаимно наиболее выгодных (с точки зрения максимизации личных доходов) выборов участниками.

В отличие от множества A-равновесий множество B-равновесий может оказаться пустым, что, однако, редко встречается в задачах с двумя участниками. Как раз такой пример и рассматривается ниже.

Естественное усиление B-равновесия дается в следующем определении.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\bar{D}_i$-экстремальной, если

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*), i = 1,2 \qquad (3)$$

или, что то же самое, если

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A_i} J_i(Arg \max_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k)) = J_i(q^*), i = 1,2. \qquad (3\text{ a})$$

Назовем ситуацию q^* $\bar{D}$-равновесием, если $q^* \in \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \stackrel{\Delta}{=} \bar{D}$.

Проясним смысл этого определения. В определении 3 i-й игрок при любом выборе своей стратегии q_i из множества $Pr_{Q_i} A_i$ предлагает противнику выбрать наиболее выгодную для него (для k-го игрока) ситуацию в сечении $A_i(q_i)$. И только после сделанного противником выбора (определяющего множество B_i наиболее выгодных для k-го игрока ситуаций) i-й игрок теперь уже сам делает наилучший для себя выбор (3) на множестве уже предварительно отобранных и наиболее выгодных для противника ситуаций.

Заметим, что $\bar{D}$-равновесие в любых конфликтных задачах является наиболее сильным равновесием, наиболее предпочтительным и наивыгоднейшим для всех участников. К сожалению, существует оно, как и равновесие по Нэшу, далеко не всегда. В рассмотренном выше простом примере ситуация a_{12} (с выигрышами участников (900; 900)) является именно $\bar{D}$-равновесием. Но существуют задачи, в которых даже B-равновесие оказывается пустым, что автоматически влечет пустоту и $\bar{D}$-равновесия. Более того, пустыми могут оказываться и следующие равновесия (немного более слабые, чем B- и $\bar{D}$-равновесия), задаваемые двумя приведенными ниже определениями [11–16].

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A$ назовем B'_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A(q_i^*)} J_k(q_i^*, q_k) = J_k(q^*), k = 1,2, k \neq i. \qquad (4)$$

Назовем ситуацию $q^* \in G$ B'-равновесием, если $q^* \in B'_1 \cap B'_2$, где B'_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Смысл B'-равновесия аналогичен смыслу B-равновесия. Различие в их поиске только в том, что если B_i-экстремальные ситуации ищутся на множестве A_i, то B'_i-экстремальные ситуации (i = 1,2) ищутся на одном и том же множестве A.

Следующее определение дает точно такое же усиление B'-равновесия, как $\bar{D}$-равновесие дает усиление B-равновесия.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in A$ назовем D'_i-экстремальной, если

$$\max_{q \in B'_i} J_i(q) = J_i(q^*), i = 1,2, \qquad (5)$$

или, что то же самое, если

$$\max_{q_i \in Pr_{Q_i} A} J_i(Arg \max_{q_k \in A(q_i)} J_k(q_i, q_k)) = J_i(q^*), i = 1,2, i \neq k.$$

Назовем ситуацию q^* D'-равновесием, если

$$q^* \in D'_1 \cap D'_2 \overset{\Delta}{=} D'.$$

Предлагаемое ниже новое, весьма сложное, $\overline{D}'^P$-равновесие в случае пустоты равновесий из определений 2–5 способно заменить эти последние. Это равновесие, полезное для поиска наисильнейшего равновесия (и решения) в любых конфликтных задачах, и особенно в тех, в которых B- и B'-равновесия оказываются пустыми, опирается на понятие оптимальности по Парето [17]: ситуацию q^* называют оптимальной по Парето, если несовместны неравенства

$$J_i(q) \geq J_i(q^*), q \in G, q \neq q^*, i = 1,2,$$

среди которых хотя бы одно строгое.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем $\overline{D}_i'^P$-экстремальной, если она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & q^* \in ArgPar_{q_i \in A_i(q_k^*)} J(ArgPar_{q_k \in A_i(q_i)} J(q)) \overset{\Delta}{=} \\ & \overset{\Delta}{=} \overline{D}_i'^P(q^*), i = 1,2, k \neq i, \end{aligned} \qquad (6)$$

где

$Par_{q_k \in A_i(q_i)} J(q)$ означает множество Парето, разыскиваемое на множестве $A_i(q_i)$,

а $Par_{q_i \in A_i(q_k^*)} J(q)$ — множество Парето на множестве $A_i(q_k^*)$. Назовем ситуацию q^* $\overline{D}'^P$-равновесием, если

$$q^* \in \overline{D}_1'^P(q^*) \cap \overline{D}_2'^P(q^*) \overset{\Delta}{=} \overline{D}'^P(q^*).$$

По существу, это определение является некоторым обобщением (расширением) $\overline{D}$-равновесия из определения 3, даваемого равенством (3 а), и состоит в том, что понятие $\max J_i$ в (3 а) заменено на понятие паретовских множеств $ParJ$ в доступных игрокам сечениях $A_i(q_i)$. Иначе. говоря, в (6) предлагается некоторое понятие слабой игровой устойчивости, весьма полезное в тех случаях, когда равновесие (3) или другие равновесия не существуют. В (6) i-участник делает в отношении k-го участника благородный жест, состоящий в том, что предлагает ему на множестве $A_i(q_i)$ выбрать если и не наилучшие в смысле максимума, как в (3 а), то по крайней мере оптимальные по Парето ситуации в доступных k-му игроку сечениях $A_i(q_i)$ (где $q_i \in A_i(q_k^*)$), и только после сделанного противником выбора сам делает окончательный аналогичный выбор индивидуально-паретовского множества в сечении $A_i(q_k^*)$ на совокупности индивидуально-паретовских множеств, отобранных k-м участником.

О том, как ищется это равновесие, подробно разбирается на следующем примере.

Пример. Пусть определена статическая игра, в которой каждый из игроков максимизирует свою (матричную) платежную функцию

$$J_1(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} 2 & \cdot & 6 & \cdot \\ 11 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 3 & \cdot & 5 \\ \cdot & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_2(q_1,q_2) = \begin{bmatrix} 3 & \cdot & 2 & \cdot \\ 5 & 10 & 9 & 1 \\ 11 & 4 & \cdot & 8 \\ \cdot & 7 & 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что равновесия по Нэшу в этой задаче не существует, причем его не существует и почти при всех возможных перестановках местами элементов в любой из этих матриц.

Первый игрок имеет возможность выбирать одну из четырех строк, а 2-й — один из четырех столбцов. Игровое множество G участников конфликта задается только теми элементами матриц J_1 и J_2, соответственно, в которые вписаны возможные выигрыши участников.

Множество наислабейших равновесий в этой конфликтной задаче задается отмеченными крестиками элементами матрицы $A = A_1 \cap A_2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ + & + & \cdot & + \\ \cdot & + & + & + \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \end{bmatrix},$$

а B- и B'-равновесия в этой задаче оказываются пустыми:

$$B_1 = (a_{22}, a_{43}), B_2 = (a_{21}, a_{23}, a_{34}, a_{42}), B = B_1 \cap B_2 = \varnothing.$$
$$B'_1 = (a_{22}, a_{43}), B'_2 = (a_{21}, a_{23}, a_{42}), B' = B'_1 \cap B'_2 = \varnothing.$$

Для поиска $\overline{D}'^P$-равновесий необходимо использовать рис. 1, на котором в координатах (J_1, J_2) изображены отображения $J(a_{ij})$ аргументов a_{ij} платежных

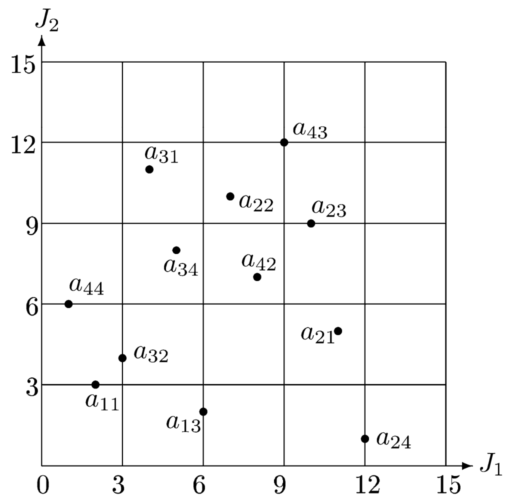

Рис. 1

матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2). Без помощи этого рисунка искать предлагаемое новое равновесие крайне затруднительно.

$\bar{D}^{'P}$ -равновесные ситуации ищутся на множестве A -равновесных ситуаций следующим образом. К примеру, ситуация $a_{22} \notin \bar{D}^{'P}$, поскольку она не содержится во множестве

$$\bar{D}_2^{'P}(a_{22}) \overset{\Delta}{=} ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(ArgPar_{q_1 \in A_2(q_2)} J(q)) =$$
$$ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(a_{21}, a_{31}; a_{22}, a_{42}; a_{23}, a_{43}) = (a_{21}, a_{23}, a_{43});$$

заметим, что в этом случае уже не имеется необходимости вычислять еще и $\bar{D}_1^{'P}(a_{22})$.

Выполняя подобные же расчеты для остальных четырех ситуаций a_{ij} из множества A, получаем, что только две ситуации a_{23} и a_{43} оказываются $\bar{D}^{'P}$ -равновесными. Проведем расчеты только для этих двух ситуаций:

$$\bar{D}_1^{'P}(a_{23}) \overset{\Delta}{=} ArgPar_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(ArgPar_{q_2 \in A_1(q_1)} J(q)) =$$
$$ArgPar_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{43}) = (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{43}),$$

$$\bar{D}_2^{'P}(a_{23}) \overset{\Delta}{=} ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(ArgPar_{q_1 \in A_2(q_2)} J(q_1)) =$$
$$ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(a_{21}, a_{31}; a_{22}, a_{42}; a_{23}, a_{43}) = (a_{21}, a_{23}, a_{43}).$$

$$\bar{D}_1^{'P}(a_{43}) \overset{\Delta}{=} ArgPar_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(ArgPar_{q_2 \in A_1(q_1)} J(q)) =$$
$$ArgPar_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}; a_{43}) = (a_{21}, a_{23}, a_{24}, a_{43}),$$

$$\bar{D}_2^{'P}(a_{43}) \overset{\Delta}{=} ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(ArgPar_{q_1 \in A_2(q_2)} J(q)) =$$
$$ArgPar_{q_2 \in A_2(q_1^*)} J(a_{22}, a_{42}; a_{23}, a_{43}; a_{34}) = (a_{23}, a_{43}).$$

Отсюда видно, что ситуация a_{23} содержится одновременно во множестве $\bar{D}_1^{'P}(a_{23})$ и во множестве $\bar{D}_2^{'P}(a_{23})$, а ситуация a_{43} содержится одновременно во множестве $\bar{D}_1^{'P}(a_{43})$ и во множестве $\bar{D}_2^{'P}(a_{43})$, а следовательно, согласно определению (6), эти ситуации являются $\bar{D}^{'P}$ -равновесиями.

Нас интересует наисильнейшее равновесие, а $\bar{D}^{'P}$ -равновесие выделило на множестве всех допустимых ситуаций два эквивалентных равновесия (с точки зрения определения этого равновесия).

Чтобы выделить из найденных двух наисильнейших ситуаций (a_{23}, a_{43}) наиболее сильное равновесие, обратимся к поиску наисильнейших равновесий в редуцированной вспомогательной игре, получаемой в результате исключения в исходной игре всех тех ситуаций, которые не вошли во множество A. Согласно определению множества A, с каждой такой исключенной ситуацией по крайней мере один из игроков никогда не согласится, поскольку способен самостоятельно улучшить ее, перейдя в более выгодную для него ситуацию, и при этом другой участник не имеет никакой возможности наказать его за это. Таким образом, все не вошедшие во множество A ситуации по существу оказываются «неигровыми» для участников и ими вполне можно пренебречь и перейти к дальнейшему изучению игры уже на множестве A. В результате мы получаем некоторую вспомогательную редуцированную игру (1-й итерации) со следующими платежными функциями

$$J_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 11 & 7 & 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & 9 & \cdot \end{bmatrix}, \qquad J_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 10 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 7 & 12 & \cdot \end{bmatrix},$$

в которой ищем наисильнейшее равновесие по той же методике [11–16]:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}, A^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \end{bmatrix}.$$

$$B_1^1 = (a_{23}, a_{43}), B_2^1 = (a_{22}, a_{23}), B^1 = a_{23},$$

$$\bar{D}_1^1 = a_{23}, \bar{D}_2^1 = a_{22}, \bar{D}^1 = \varnothing;$$

$$B_1^{'1} = (a_{23}, a_{43}), B_2^{'1} = a_{23}, B^{'1} = a_{23};$$

$$D_1^{'1} = a_{23}, D_2^{'1} = a_{23} = D^{'1}.$$

На первой итерации ярко выделилась единственная наисильнейшая равновесная ситуация a_{23}, гораздо более слабой является ситуация a_{43} и существенно более слабыми являются все остальные ситуации из множества A.

Справедливый дележ кооперативного дохода, равного 21, оказавшийся в ситуации a_{43}, дается теоремой 3.1 из [11] или формулами (4.2) из [14, с. 174] и равен следующим значениям:

$$x_1 = 21\frac{10}{(10+9)}, \quad x_2 = 21\frac{9}{(10+9)},$$

т. е. доля x_1 1-го игрока задается произведением кооперативного дохода, равного 21, на дробь, числитель которой равен выигрышу 1-го игрока в наисильнейшей равновесной ситуации, а знаменатель равен сумме выигрышей обоих игроков в этой ситуации. Аналогично определяется справедливая доля x_2 2-го игрока.

Предложенное новое усложненное конфликтное равновесие с не меньшим успехом можно применить для поиска решений и в динамических играх, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями. Покажем ниже, как это можно делать.

2. Методика решения дифференциальных игр

Рассмотрим конфликтные программные динамические задачи в постановке, сформулированной в работах [13, 15, 18], в которых принималось, что i-й участник ($i=\overline{1,N}$), используя смешанную стратегию $q_i(u_i,t)$, максимизирует свой функционал

$$J_i(q) = \int_T dt \int_{W(t)} f_0^i(u,x,t)dq, i=\overline{1,N} \qquad (8)$$

при ограничениях

$$(u,t)\in W \subset E\times T, \qquad (9)$$

$$\dot{x} = \int_{W(t)} f(u,x,t)dq, \quad t\in T=[t_0,t_1]\subset E^1, \qquad (10)$$

$$x_j(t_0)=x_j^0, j=\overline{1,n}, x_k(t_1)=x_k^1, k\in K\subset\{\overline{1,N}\} \qquad (11)$$

где $x=(x_1,...,x_n)\in E^n$; $u=(u_1,...,u_N)$; $q=\ q(u,t)$ = $= q_1(u_1,t)...q_N(u_N,t)$; $E=\prod_{i=1}^N E_i$, E_i — конечномерные пространства; W — компактное множество в $E\times T$; $W(t)$ — сечение множества W в момент $t\in T=[t_0,t_1]$; $U_i \stackrel{\Delta}{=} Pr_{E_i}W$ — проекция множества W на E_i; Q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i,t)$ i-го участника в задаче (8)–(11) с начальным условием $x(t_0)=x^0$ и с заменой множества W на некоторое компактное множество $U=U_1\times\ ...\times U_N$ (множество Q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [19] представляет собой выпуклый компакт в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*(T,C(U_i)))$. И пусть G — подмножество компактного множества $Q=\prod_{i=1}^N Q_i$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи.

Понятие A-равновесия в дифференциальных играх целесообразно заменить несколько более сильным понятием A^c-равновесия [13, с. 202].

Определение 7. Ситуацию $q^*\in G$ назовем согласованной A_i^c-экстремальной, если любой стратегии $q_i\in G(q^{i*})\setminus q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \stackrel{\Delta}{=} \hat{q}^i < q_i > \in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i<q_i>,q_i)\le J_i(q^*), \qquad (12)$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t)\ne q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t)\ne q_i^*(t)$, $i=1,2,...$. Ситуацию q^* назовем ситуацией согласованного A^c-равновесия, если неравенства (12) удовлетворяются для всех игроков, т. е. если $q^*\in A_1^c\cap...\cap A_N^c = A^c$.

Для поиска A^c-равновесия и различных его усилений (в частности, даваемых определениями 1–7) в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема [15, с. 189–190].

Теорема. *Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций*

$$p^i(t) = \ (p_0^i,\ \ p_1^i(t),...,\ \ p_n^i(t)),\ p_0^i\ge 0,\ i=\overline{1,N},$$

удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$\dot{p}_k^i = -\int\int_{W(t)} p^i\frac{\partial f^i}{\partial x_k}d\tilde{q}, \quad k=\overline{1,n}, \quad i=\overline{1,N}, \qquad (13)$$

где $f^i=(f_0^i,f_1,...,f_n)$, и краевым условиям

$$p_k^i(t_1)=0, \quad k\notin K; \qquad (14)$$

гамильтонианы $H^i = \int\limits_{W(t)} p^i f^i dq^*$ *непрерывны в* T *;*

A^c *-равновесная ситуация* q^* *удовлетворяет отношениям*

$$\begin{gathered}\left[H^i\right](\hat{q}^i, q_i) \le \left[H^i\right](q^*),\ q_i \in G(q^{*i}),\\ \hat{q}^i \in G(q_i),\ i = \overline{1,N}.\end{gathered} \tag{15}$$

Если рассматривать гамильтонианы в этих необходимых условиях в качестве платежных функций $H_i(u)$ в «локальной» статической игре, определенной в момент t, то можно в каждый момент t решить эту «локальную» статическую конфликтную задачу, найдя в ней наисильнейшие равновесия, причем число подлежащих решению таких «локальных» задач оказывается не только не бесконечным (хотя время t и принимает бесконечное множество значений), но, как правило, сводится всего к одной или нескольким «локальным» задачам, причем эти несколько статических «локальных» задач позволяют найти решение исходной дифференциальной игры, как это демонстрируется, например, в [11–16, 18].

Литература

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 472 с.
2. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. М.: Физматлит, 1960. 420 с.
3. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономические поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 412 с.
5. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 350 с.
6. *Петров Н. Н.* Теория игр. Ижевск: Удмуртский университет, 1977. 160 с.
7. *Вайсборд Э. М., Жуковский В. И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980. 304 с.
8. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984. 495 с.
9. *Петросян Л. А., Кузьмина Т. И.* Бескоалиционные дифференциальные игры. Иркутск: Иркутский государственный университет, 1989. 202 с.
10. *Чикрий А. А.* Конфликтно-управляемые процессы. Киев: Наукова Думка, 1992. 302 с.
11. *Смольяков Э. Р.* Управление конфликтами с побочными интересами участников. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 154 с.
12. *Смольяков Э. Р.* Теория антагонизмов и дифференциальные игры. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 160 с.
13. *Смольяков Э. Р.* Теория конфликтных равновесий. М.: Едиториал УРСС, 2005. 304 с.
14. *Смольяков Э. Р.* Методы решения конфликтных задач. М.: МГУ, 2010. 242 с.
15. *Смольяков Э. Р.* Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. М.: МГУ, 2010. 232 с.
16. *Смольяков Э. Р.* Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. М.: Наука, 1986. 224 с.
17. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения мгогокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 18. *Смольяков Э. Р.* Ослабленные понятия равновесия и оптимальности в конфликтных задачах // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 3. С. 373–379.
18. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Смольяков Владимир Эдуардович. Главный специалист подразделения ИСА РАН. Окончил в 2005 г. Международную академию оценки и консалтинга. Количество печатных работ: 20, монографий 1. Область научных интересов: Моделирование систем, экономика, психология. E-mail: ser-math@rambler.ru

Смольяков Эдуард Римович. Д. ф.-м. н., профессор МГУ им. М. В. Ломоносова. Окончил МФТИ в 1962 г. Общее количество печатных работ: более 350, монографий 25. Область научных интересов: теория конфликтов и игр, оптимальное управление, теоретическая физика, философия эзотеризма. E-mail: ser-math@rambler.ru