

Теории функционирования живых систем

Модель функционирования активных элементов

А.И. Пропой

Аннотация. В работе рассматривается модель функционирования возбудимой или активной среды, каждый элемент которой имеет два типа состояний: активного (возбужденного) и покоя. Показано, что распространение возбуждения должно рассматриваться как целенаправленный процесс, необходимый для нормального функционирования активной среды. Активация каждого элемента активной среды определяется некоторым порогом, величина которого зависит от состояния всей среды. Для этого элемент в активном состоянии генерирует потенциальную функцию, которая определяет множество активированных элементов. В свою очередь, множество активированных элементов генерирует свою потенциальную функцию, которая служит целевой функцией для нахождения (оптимального, равновесного) состояния элемента. Размер множества активированных элементов определяет достоверность (устойчивость, надежность) найденного состояния. Таким образом, модель функционирования активного элемента сводится к композиции двух отображений: активное состояние – множество активных состояний – равновесное (оптимальное) состояние. Эта композиция названа пилотным преобразованием. Рассматривается несколько вариантов модели функционирования активного элемента (пилотного преобразования): детерминированный (описывающий динамику волны возбуждения (прямой и отраженной) в приближении геометрической оптики), вероятностный (ведущий к уравнению Шредингера, описывающего динамику волновой функции) и (общий) вариант, основанный на введении потенциального поля.

Ключевые слова: *активные, возбудимые среды, потенциальная функция, двойственность, управляющее поле.*

1. Введение

Возбудимой или активной средой будем называть такую сплошную среду, каждый элемент которой имеет два состояния: возбуждения и покоя. Многие реальные процессы описываются с помощью таких сред: распространение возбуждения в нейросетях, введение новых технологий в экономике, распространение эпидемий и слухов в обществе, образование и рост воспаления или опухоли в биологических тканях и т.д.

В соответствии с этим определением возможны переходы элемента из состояния покоя в состояние возбуждения и из состояния возбуждения в состояние покоя. Первый процесс называется активацией, второй – ингибированием элемента.

Модели распространения возбуждения хорошо изучены [1],[2],[3]. Они приводят к уравнению в частных производных Гамильтона-Якоби-Беллмана, описывающего динамику волнового фронта, и к принципу максимума Понтрягина, характеризующего траектории возбуждения.

Эти работы рассматривают распространение возбуждения в приближении геометрической оптики, т.е. детерминировано, вероятностный характер распространения возбуждения не изучается.

Из этих моделей следует, что распространение возбуждения (т.е. процесс активации) теоретически может длиться бесконечно долго. Между тем, реальные активные среды при нормальном функционировании чередуют процессы активации и ингибирования.

Поэтому возникает естественный вопрос: когда и почему процесс возбуждения останавливается? Настоящая работа посвящена анализу этого вопроса. В ней показано, что распространение возбуждения должно рассматриваться как целенаправленный процесс, необходимый для нормального функционирования активной среды.

Показано, что активация каждого элемента активной среды задается некоторым порогом, величина которого определяется нелокально и зависит от состояния всей среды.

Приведем два примера.

1. Некто получил информацию, с которой он хочет поделиться. Для этого он обращается к своему кругу знакомых (например, через сеть). Ресипиент, получив информацию, действует аналогичным образом и т.д., теоретически до бесконечности (на практике, чем дальше (в какой-то метрике) ресипиент от источника информации, тем менее она релевантна для него, и процесс естественно затухает).

2. У кого-то возник вопрос, на который он не знает ответа (точнее, не считает свой ответ достаточно достоверным). Тогда он обращается к знакомым экспертам (например, опять через сеть). Те, в свою очередь, могут повторить процесс. Ясно, что в этом случае процесс должен остановиться, т.к. его цель не распространение вопроса, а получение ответа. Важно подчеркнуть, что остановка процесса (распространения возбуждения) заканчивается не получением ответа (его, в принципе, никто не знает), а созданием критической (пороговой) массы экспертов, совокупному мнению которых можно доверять.

Эти примеры иллюстрируют основное утверждение работы: распространение возбуждения (в частности, развитие опухоли) @яБ:емент в активном состоянии генерирует потенциальную функцию, которая определяет множество активированных элементов. В свою очередь, множество активированных элементов генерирует свою потенциальную функцию, которая служит целевой функцией для определения (оптимального, равновесного) состояния элемента.

Размер (в какой-то метрике) множества активированных элементов имеет существенное значение, поскольку определяет достоверность (устойчивость, надежность) найденного состояния.

Таким образом, модель функционирования активного элемента сводится к композиции двух отображений: активное состояние (старое равновесное состояние) – множество активных состояний – новое равновесное (оптимальное) состояние.

Эта композиция двух многозначных преобразований была названа пилотным преобразованием [4],[5].

Рассматривается несколько вариантов модели функционирования активного элемента: детерминированный (описывающий динамику волны возбуждения в приближении геометрической оптики), вероятностный (ведущий к уравнению Шредингера, описывающего динамику волновой функции) и (общий) вариант, основанный на введении потенциального поля.

2. Модель распространения возбуждения

Возбуждаемая или активная среда формализуется как n -мерное многообразие M , точка $x \in M$ – элемент этой среды.

Предполагается, что состояние элемента характеризуется n показателями, x_i – величина показателя i для данного элемента в данном состоянии. Таким образом, точка $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ характеризует текущее состояние элемента и будет использоваться как для обозначения состояния элемента, так и самого элемента.

Состояние каждого элемента может быть двух типов: активированное или возбужденное состояние и состояние покоя или ингибированное состояние.

Распространение возбуждения подчиняется принципу Гюйгенса:

Предположение 1. Каждый элемент переходит в возбужденное состояние, как только возбуждение его достигло, и продолжает оставаться в этом состоянии, становясь сам источником возбуждения.

Обозначим через $R_t(x_0) = R(t, x_0)$ множество элементов среды, активированных активным элементом x_0 за время t . Тогда, в соответствии с принципом Гюйгенса

$$R_t(x_0) = \bigcup_{x \in R_{t-\tau}(x_0)} R_\tau(x), \quad (1)$$

где $R(\Delta t, x) = R_\tau(x)$ – множество элементов среды, активированных элементом x за фиксированное (и малое) время $\tau = \Delta t$, $t - \tau \geq 0$.

С множеством $R_t(x_0)$ связана функция

$$S(x_0, x) = \inf \{ct \geq 0 \mid x \in R(t, x_0)\}. \quad (2)$$

Граница множества $R(t, x_0)$ называется волновым фронтом и задается уравнением $S(x_0, x) = ct$. Таким образом,

$$R(t, x_0) = \{x \mid S(x_0, x) \leq ct\}. \quad (3)$$

Из предположения 1 следует, что $S(x_0, x_0) = \inf \{S(x_0, x) \mid x \in M\} = 0$, при этом функция S положительна при $x \neq x_0$, непрерывна по x и возрастает по направлению внешней

нормали $n(x)$ (если она существует) к волновому фронту (постоянные значения S означали бы распространение возбуждения по направлению $n(x)$ с бесконечной скоростью). При симметрии множества $R(t, x_0)$ функция S симметрична: $S(x_0, x) = S(x, x_0)$. Кроме того, можно показать, что она удовлетворяет неравенству треугольника, т.е., функция (2) – функция расстояния.

Обозначим $R_\tau(x) = D(x)$, τ фиксировано и мало; $D(x)$ – элементарный очаг возбуждения.

Фиксируем две точки x и x_1 .

Предположение 2. В соответствии с принципом Ферма распространение возбуждения между двумя данными точками реализуется по пути, требующее минимальное время.

В результате приходим к задаче оптимального управления на быстродействие [6]

$$\inf \{t \geq 0 \mid \dot{x} \in D(x), x(0) = x_0, x(t) = x_1\} = t(x_0, x_1). \quad (4)$$

Решение этой задачи определяет оптимальную траекторию возбуждения из x_0 в x_1 и длину $t(x_0, x_1)$ этой траектории, при этом $ct(x_0, x_1) = S(x_0, x_1)$.

В нелинейных средах структура множества (1) может быть весьма сложной, особенно при больших t . Однако при малых t (т.е. для $t = \tau$) обосновано следующее

Предположение 3. Пространство отклонений X , $u = z - x$, линейно. Множество $R_\tau(x) = D(x)$ в этом пространстве выпукло и центрально симметрично.

В этом случае множество $D(x)$ задает норму возбудимой среды (пространства X) [7]:

$$\|u\|_D = \mu(u) = \inf \{ \mu \geq 0 \mid u \in \mu D(x) \}. \quad (5)$$

Множество $D(x)$ – единичный шар по этой норме

$$D(x) = \{u \mid \mu(u) \leq 1\}. \quad (6)$$

При дополнительных условиях на множество D в пространстве X можно определить скалярное (внутреннее) произведение. Тогда $X = R^n$ – евклидово пространство и

$$D(x) = \{u \mid (u, Gu) \leq 1\}, \quad (7)$$

где $G = G_x$ – линейный самосопряженный и положительный оператор, определяющий евклидову норму $\|u\|_D^2 = \|u\|_G^2 = (u, Gu)$.

В общем случае норма и множество $D(x)$ определяются в касательном пространстве в точке x гладкого многообразия M (в Предположении

3 – это пространство отклонений X). Если длина касательного вектора определяется квадратичной формой, то активная среда формализуется как риманово многообразие, если – нормой вида (4), (5), то это многообразие финслерово.

Волновой фронт можно линейризовать

$$(p, x) = ct, \quad (8)$$

где $p = dS(x)$ – первому дифференциалу функции S в точке x . Уравнение (8) описывает плоскую волну возбуждения; (8) – уравнение гиперплоскости.

Опорная гиперплоскость к множеству активных элементов

$$\sup_{u \in R_\tau(x_0)} (p, u), \quad p = dS(T, x), \quad (9)$$

определяет траекторию возбуждения из точки x_0 .

Из (9) следует уравнение в частных производных, описывающее динамику фронта волны возбуждения. Это уравнение получило название уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [6].

Задача на оптимальное быстродействие (4) приводит к принципу максимума Понтрягина [6]:

$$\sup_{u \in D(x)} (p_t, u), \quad (10)$$

где $u = z - x$, векторы удовлетворяют системе, сопряженной к (4).

Такова, в общих чертах, модель распространения возбуждения в активной среде. Она формализуется как уравнение в частных производных, описывающее динамику волнового фронта и как задача оптимального управления на быстродействие, определяющая траектории возбуждения и динамику плоских волн, ортогональных траектории возбуждения в метрике активной среды.

Из этой модели следует, что распространение возбуждения может длиться бесконечно долго. Более того, хотя модель получена из экстремальных принципов, цель функционирования активной среды в этой модели не рассматривается.

3. Модель функционирования активной среды

В этом разделе рассматривается модель функционирования активной среды. Предполагается, что цель функционирования активной среды – поддержание текущего состояния элемента (и его изменение, при изменении внешних условий функционирования активной среды).

Для реализации этой цели в модель вводится новое понятие (по сравнению с разделом 2) – потен-

циальная функция, которая служит целевой функцией активной среды. Оптимизация целевой функции на множестве активированных элементов определяет оптимальное (равновесное) состояние элемента. Если меняется потенциальная функция, то меняется и оптимальное (равновесное) состояние.

Генерация множества активированных элементов $R_0 = R(x_0)$ активным элементом x_0 является первым этапом функционирования активной среды, вторым этапом является определение оптимального состояния x_1 . Если среда не меняется, то $x_0 = x_1$.

Поэтому весь процесс функционирования активной среды описывается композицией двух многозначных отображений

$$x_0 \rightarrow R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow x_1, \quad (11)$$

где $x_0 = x_1$, если $R_0 = R_1$.

Такая композиция была введена в [4], [5] и названа пилотным преобразованием.

Пилотное преобразование является фундаментальным законом управляемого движения (время разбрасывать камни и время собирать камни). Оно формализует базовые законы в космологии (большой взрыв и большой треск), в квантовой механике – генерация и фильтрация состояния при измерении (эксперимент Штерна-Герлаха) [8],[9], описывает структуру нервной и кровесной систем, взаимодействие макро и микросистем в экономике.

Первая часть преобразования (11) (точки в множество) была описана в разделе 2. В этом разделе будет рассмотрена вторая часть преобразования (11) (множества в точку) и все преобразование в целом. Будут проанализированы несколько вариантов реализации этого преобразования.

1. Начнем с понятия волны возбуждения, введенной в разделе 2.

Фиксируем два интервала времени T и τ , $0 < \tau < T$.

Пусть $S_T(x_0)$ – волновой фронт в момент времени T из точки x_0 :

$$S_T(x_0) = \{z | S(x_0, z) = cT\}. \quad (12)$$

Огибающие множеств $R_\tau(z) = D(z)$, $z \in S_T(x_0)$, определяют два волновых фронта: передний фронт

$$S(x_0, z) = c(T + \tau) \quad (13)$$

и задний (отраженный) фронт

$$S(x_0, z) = c(T - \tau), \tau \leq T. \quad (14)$$

Из (1) – (3) следует, что при $\tau = T$ отраженный фронт стягивается в точку x_0 .

Таким образом, за время $[0, T]$ активный элемент генерирует (активизирует) множество элементов $R_T(x_0)$, а за время $[T, 2T]$ стягивает (отражает) это множество в точку.

Отметим, что за время $[0, T]$ условия функционирования среды могут измениться, поэтому геометрия элементарного множества в момент T может быть другой: $D(z) \rightarrow D_1(z)$. В этом случае $x_0 \neq x_1$. Более того, отраженный фронт в этом случае может определять не точку, а (малое) множество, которое представляет неопределенность в определении оптимального (равновесного) состояния элемента. Таким образом, в общем случае преобразование (11) должно быть заменено на преобразование

$$\omega_0 \rightarrow R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow \omega_1, \quad (15)$$

где множества $\omega_0 \subset R_0$, $\omega_1 \subset R_1$ (с известными или неизвестными центрами).

Уже в этом, простейшем варианте модели функционирования активного элемента видны основные черты пилотного преобразования (11).

Для дальнейшего его анализа необходимо привлечение фундаментального понятия двойственности.

Будем считать, что активная среда формализуется как линейное пространство X , в котором множество активированных элементов R определяет его норму (при дополнительных математических требованиях это пространство становится Банаховым).

Пусть $p \in X^*$ – линейный функционал на множестве состояний элементов X , X^* – сопряженное пространство.

Линейный функционал p определяет (локально) цель функционирования, а значение (p, u) линейного функционала p на векторе $u = z - x$ – плоскую волну распространения возбуждения.

Тогда экстремальная задача

$$\max_{u \in R(x_0)} (p, u) = \max \frac{(p, u)}{\|u\|} = (p, u_p) \quad (16)$$

определяет оптимальное состояние u_p для цели p , а экстремальная задача

$$\max \frac{(p, u)}{\|p\|} = (p, u_p) \quad (17)$$

определяет оптимальную цель p_u для заданного состояния u .

Преобразования (17): $X \rightarrow X^*$ и (16): $X^* \rightarrow X$ называются двойственными и являются базовыми для описания функционирования любых систем [7], [10], [11].

Используя (16), (17), пилотное преобразование (11) можно описать как цепочку преобразований

$$u_0 \rightarrow p \rightarrow p_1 \rightarrow u_1, \quad (18)$$

при этом первое преобразование в (18) двойственно в метрике, определяемое множеством R_0 , а второе – двойственно в метрике, определяемое множеством R_1 .

Из (16), (17) следует важное неравенство [7],[12]

$$\|p\| \|u\| \geq (p, u). \quad (19)$$

Если в (19) фиксировать нижний порог величины (p, u) , то получим соотношение неопределенности: чем больше разброс элементов $\|u\|$, $u=z-x_0$, активизированных элементом x_0 (т.е. чем больше множество $R=R(x_0)$), тем меньше разброс $\|p\|$ цели p и, следовательно, тем точнее определяется оптимальное состояние, и наоборот (см. подробности в [12]).

Как было отмечено, при дополнительных условиях симметрии на множество активированных элементов пространство состояний становится Гильбертовым (Евклидовым в конечномерном случае). В этом случае норма определяется положительным самосопряженным оператором и пилотное преобразование сводится к известному преобразованию Ньютона в оптимизации:

$$u_1 = G_1^{-1} G_0 u_0. \quad (20)$$

Если условия функционирования среды не изменились, то $G_1=G_0$ и $u_1=u_0$: активный элемент сохраняет свое состояние.

Геометрически пилотному преобразованию (в пространстве R^{n+1} , где $n+1$ -ая координата определяется временем) соответствует конусный отрезок $K[x_0, x_1]$.

В теории относительности конусный отрезок описывает процесс синхронизации времени [13], в квантовой механике — (эксперимент Штерна-Герлаха) [7], [8].

2. Введем теперь понятие потенциального поля $U(x)$, которое генерирует активный элемент среды x_0 .

Будем предполагать, что функция $U(x)$ достигает своего максимума в точке x_0 , тогда $U(x)=U(x_0, x)$, $\sup U(x_0, x)=U(x_0, x_0)=a_0$.

Если потенциальная функция симметрична: $U(x_0, x)=U(x_0, x_0)$ и удовлетворяет неравенству треугольника, то потенциальная функция определяется функцией расстояния $d(x_0, x)$:

$$U(x_0, x) = a_0 - d(x_0, x) \quad (21)$$

(и обратно).

Отметим, что в (21) функция $d(x_0, x)$ может интерпретироваться как потенциальная энергия.

Предположение 4. Множество элементов, активированных элементом x_0 , определяется потенциальной функцией и порогом a , $a \leq a_0$:

$$R_a(x_0) = \{x \mid U(x_0, x) \geq a\}. \quad (22)$$

Вводя функцию Хевисайда: $\sigma(z)$: $\sigma(z)=1, z \geq 0$ и $\sigma(z)=0, z < 0$, перепишем (22) в виде

$$R_a(x_0) = \{x \mid \sigma(U(x_0, x) - a) = 1\}. \quad (23)$$

Итак, активизация элемента x_0 приводит к генерации потенциального поля $U(x_0, x)$, которое, определяет множество активированных элементов $R_a(x_0)$; $x_0 \rightarrow R_a(x_0)$.

Множество активированных элементов $R_a(x_0)$, в свою очередь, генерирует потенциальное поле $U_1(x)=U_1(x_1, x)$, где точка x_1 максимизирует функцию $U_1(x)$. В общем случае $U_1(x_1, x) \neq U_0(x_0, x)$ (например, из-за взаимодействия активизированных элементов); в стационарном случае $U_1(x_1, x) = U_0(x_0, x)$.

Таким образом, потенциальное поле и множество активированных элементов взаимосвязаны: потенциальное поле определяет множество активированных элементов, а множество активированных элементов генерирует потенциальное поле.

Эта связь имеет фундаментальный характер и соответствует принципу управляющего поля в гравитации, введенного Вейлем [13],[14]

Предположение 5. Оптимальное (равновесное) состояние элемента соответствует максимальному значению потенциального поля (минимуму потенциальной энергии):

$$\max_{x \in R(x_0)} U_1(x) = U_1(x_1). \quad (24)$$

В стационарном случае, когда $U=U_1$:

$$\max_{x \in R(x_0)} U(x) = U(x_0) \quad (25)$$

активный элемент сохраняет свое состояние.

Отметим, что решение экстремальных задач (24), (25) может быть реализовано повышением порога $a \rightarrow \sup a$ в (23):

$$x_1 : \quad \sigma(U_1(x) - \sup a) = 1. \quad (26)$$

3. Введем теперь распределение элементов в активной среде.

Пусть $\mu(R)$ – мера множества R (объем, масса и т.д.). Если $\mu(R) = 1$, то μ – вероятностная мера. Для гладкой меры может быть введена функция плотности распределения элементов в активной среде. Тогда

$$\mu(R) = \int_R \rho(x) dx. \quad (27)$$

Величину $\mu(R)$ будем интерпретировать как значимость (репрезентативность) множества активизированных элементов R для определения оптимального (равновесного) состояния. В дискретном варианте эта величина определяет репрезентативность выборки.

В рассматриваемом случае множество активизированных элементов $R = R_a$ определяется порогом a :

$$\mu(R) = \int_R \rho(x) dx \geq a. \quad (28)$$

Отметим, что из (27) явно виден нелокальный смысл порога (ср. (3)).

Положим

$$\int_M \rho(x) dx = a_0, \quad (29)$$

тогда $a \leq a_0$ и, вообще, $R_{a_1} \subset R_a$, если $a_1 > a$.

Итак, определение оптимального (равновесного) состояния элемента x_1 реализуется тогда, когда величина множества активизированных элементов достигнет необходимой величины (репрезентативности), определяемой (27) и величиной порога (28).

В рассматриваемом случае это состояние реализуется максимизацией функции ρ на множестве R , т.е. определением наиболее вероятного состояния (в смысле заданного распределения ρ).

Эта же цель может быть достигнута повышением порога $a \rightarrow \sup a$.

Такое состояние в математической статистике называется модой.

Другой вариант определения равновесного состояния состоит в усреднении состояний на множестве активированных элементов в соответствии с их распределением на этом множестве:

$$\int_R x \rho(x) dx = \bar{x}_1. \quad (30)$$

В общем случае $x_1 \neq \bar{x}_1$, однако для симметричных распределений (в частности, для нормального распределения) оба способа дают один результат.

Сделаем несколько замечаний по вероятностному варианту модели.

1) В общем случае цель функционирования активной среды состоит не в сохранении чистого состояния, т.е. точки x , а в сохранении смешанного состояния, т.е. некоторой меры множества состояний (см. (11) и (15)). Мера, для которой $T\mu = \mu$, где T – измеримое преобразование, называется инвариантной. Для инвариантной меры справедливо уравнение неразрывности.

2) Если рассматривать вероятностную модель распространения возбуждения, то он, вместо уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, приведет к уравнению Шредингера, описывающего динамику волновой функции. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора, получим, что первые члены разложения дадут уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана и уравнение неразрывности.

3) Если в рассмотренной модели не фиксировать распределение, а нормировать его на множествах $R_a = R_a(x_0)$:

$$\mu(R_a) = \int_{R_a} \rho_a(x) dx = 1, \quad (31)$$

то при увеличении порога $a \rightarrow \sup a$ функция ρ_a стремится к дельте функции Дирака: $\rho_a(x) \rightarrow \delta(x - x_0)$. Это опять приводит к принципу неопределенности в квантовой механике [7], [8].

4. Введем функцию $\phi(x, z)$, которая описывает взаимодействие активных элементов x и z .

Предполагается, что функция симметрична: $\phi(x, z) = \phi(z, x)$, достигает своего максимума при $x = z$ и убывает при увеличении расстояния между x и z . Следовательно, она опять может моделироваться некоторой функцией расстояния d между x и z :

$$\phi(x, z) = a - d(x, z) \quad (32)$$

В этом случае условие $\phi(x, z) \geq 0$ определяет множество активированных элементов $R = R_a(x)$.

Функция $\phi(x, z)$ может рассматриваться как локальный потенциал в точке z , задаваемый активным элементом x , или как локальный потенциал в точке x , задаваемый активным элементом z . Тогда нелокальный потенциал в точке x определится как

$$U(x) = \int_M \phi(x, z) \rho(z) dz. \quad (33)$$

Таким образом, нелокальное потенциальное поле определяется распределением элементов в среде и функцией их взаимодействия.

Отметим, что функция ϕ является ядром интегрального преобразования

$$U_1(x) = \int_M \phi(x, z) U(z) dz. \quad (33)$$

Если элементы среды не взаимодействуют (например, не активированы), то $\phi(x, z) \equiv 1$ и (33) переходит в (27).

4. Заключение

В работе предложена модель функционирования активной среды. Эта (общая) модель рассмо-

трена (кратко) в трех вариантах: первый использует понятие прямого и отраженного фронта волны возбуждения, второй основан на понятии потенциального поля, генерируемого активными элементами, и третий вариант учитывает распределение элементов в активной среде и их взаимодействие.

Все эти варианты, естественно, требуют отдельного анализа и детализации, поскольку каждый из них использует свой, хорошо разработанный, математический язык. Наконец, задача состоит в спецификации модели применительно к конкретной прикладной области, в частности, к биологическим процессам на клеточном или молекулярном уровне.

Литература

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Распространение возбуждения и канонические уравнения, в книге: Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
2. Пропой А.И. Модели возбудимых сред. Автоматика и телемеханика. 1995, вып. 6, с.117-126.
3. Пропой А.И. Возбудимые среды и нелокальный поиск. Автоматика и телемеханика. 1995, вып. 7, с.162- 171.
4. Propoi A.I. On the structure of controlling motion. Nonlinear Dynamics and Control, 2007, No. 6, pages 59 –68.
5. Propoi A.I. Feasible Set in Model Predictive Control, in: Model Predictive Control: Theory, Practices and Future Challenges. Ed. C. Wade, 2015, Nova Science Publishers, NY.
6. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Наука, М., 1969.
7. Rockafellar R.T. Convex Analysis. 1977, Princeton University Press.
8. Peres A. Quantum Theory: Concepts and Methods. 2002, Kluwer.
9. Hughes R.I.G. The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics. 1989, Harvard University Press.
10. Beurling A. and Livingston A.E. A theorem on duality mappings in Banach spaces, Ark Mat. 4 (1962), 405-411.
11. Browder F. E. Solvability of non-linear functional equations, Duke Math. J. 30 (1963), 557-566.
12. Пропой А.И. Соотношение неопределенности в оптимизации. Труды ИСА РАН, сент. 2015.
13. Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
14. Вейль Г. Математическое мышление. М., Наука, 1989.

Пропой Анатолий Иванович. Г.н.с. ИСА ФИЦ ИУ РАН. Д.т.н., профессор. Окончил МФТИ в 1962 г. Количество печатных работ: около 200. Область научных интересов: теория управления, методы оптимизации, математическое моделирование, анализ данных. E-mail: propoi@gmail.com