

Динамические системы

Об универсальности перехода к хаосу в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений типа Шильникова.

М.Ф. ЗАЙЦЕВА, О.И. РЯБКОВ

Аннотация. В данной работе производится аналитическое и численное исследование трёх модельных трёхмерных автономных диссипативных нелинейных динамических систем обыкновенных дифференциальных уравнений с хаотической динамикой методами универсальной бифуркационной теории Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ). На примере ранее не изучавшихся в рамках теории ФШМ систем показывается, что усложнение динамики решений систем идет в соответствии с единственным универсальным сценарием через каскады бифуркаций регулярных аттракторов.

Ключевые слова: динамические системы, бифуркации, хаос, ФШМ-сценарий.

1. Введение

Одним из основных научных достижений за последние десятилетия является стремительное развитие теории нелинейных систем с хаотической динамикой. Новым подходом к изучению таких систем стал траекторный подход описания динамического хаоса методами качественной теории дифференциальных уравнений и теории бифуркаций в нелинейных системах дифференциальных уравнений, а именно, универсальная бифуркационная теория ФШМ (Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого) [1, 2].

В статье [3] В.Чена изучалась проблема классификации автономных квадратичных динамических систем обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии с расширенной теоремой Шильникова. Системы, удовлетворяющие условиям теоремы Шильникова, авторы назвали системами типа Шильникова. К таким системам относятся и многие известные хаотические системы, такие как система Лоренца, Чуа, Рёслера, Чена. В работе [3] системы типа Шильникова классифицируются на четыре типа в зависимости от вида существующих в них хаотических аттракторов: (1) хаос с гомоклинической орбитой; (2) хаос с гетероклинической орбитой; (3) хаос смешанного

типа с гомоклинической и гетероклинической орбитами; (4) хаос других типов.

Основной целью данной работы является исследование нескольких модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений типа Шильникова, приведенных в упомянутой выше статье, ранее не исследовавшихся с применением траекторного подхода универсальной бифуркационной теории ФШМ, для подтверждения выводов о существовании единственного вида динамического хаоса и универсального сценария перехода к хаосу (при изменении системного параметра), начинающимся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов и продолжающимся затем субгармоническим каскадом бифуркаций рождения устойчивых циклов любого периода в соответствии с порядком Шарковского и гомоклиническим или гетероклиническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому или гетероклиническому контуру.

2. Методы

Для аппроксимации решений автономных нелинейных систем обыкновенных дифферен-

циальных уравнений был выбран метод Рунге-Кутты 4-го порядка сложности.

3. Результаты исследования

Рассмотрим три модельные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, перечисленные Ченом в работе [3].

1. Система 1. Система Спротта – Sprott (e)

$$\begin{cases} \dot{x} = ayz, \\ \dot{y} = x^2 - y, \\ \dot{z} = 1 - 4x, \end{cases} \quad (1)$$

где a – вещественный параметр. Sprott (e) – одна из модельных систем, описанная Ж. Спроттом в работе [4].

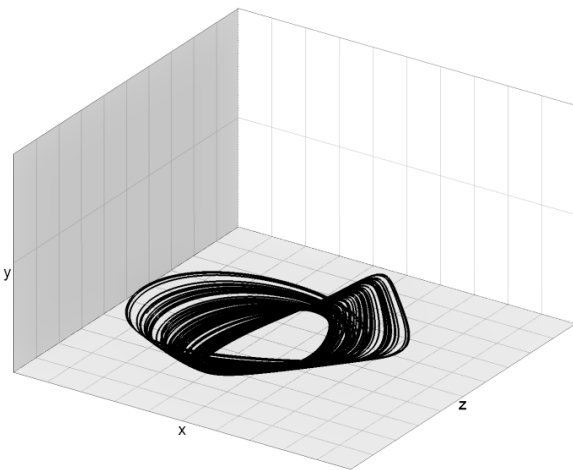


Рис. 1. Один из нерегулярных аттракторов системы при $a = 1.01$

1.1. Аналитическое исследование

Исследуем область диссипативности системы:

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = -1 < 0. \quad (2)$$

Следовательно, система диссипативна при любых значениях параметра a .

Найдем особые точки системы:

$$\begin{cases} ayz = 0, \\ x^2 - y = 0, \\ 1 - 4x = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$x = 0.25, y = 0.0625, z = 0$. Таким образом, $O(0.25, 0.0625, 0)$ – особая точка системы (1).

Далее определим тип особой точки. Построим матрицу линеаризации правой части системы:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & az & ay \\ 2x & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Для особой точки $O(0.25, 0.0625, 0)$ исследуемой системы матрица линеаризации принимает вид:

$$J(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.0625a \\ 0.5 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Характеристический полином матрицы $J(O)$ имеет следующий вид:

$$\det(\lambda I - J(O)) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0.0625a \\ 0.5 & -1 - \lambda & 0 \\ -4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2 + \frac{a}{4}\lambda + \frac{a}{4} = -\frac{1}{4}(\lambda + 1)(a + 4\lambda^2). \quad (6)$$

Таким образом, имеем корни характеристического полинома $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm \frac{i\sqrt{a}}{2}$ особая точка O системы (1) является центром.

1.2. Численное исследование

Каскад бифуркаций можно проследить при уменьшении параметра a . При $a \in [2.036, 13.6]$ в системе существует устойчивый цикл, при $a = 2.035$ происходит бифуркация удвоения периода исходного цикла, и при $a \in [1.477, 2.035]$ наблюдается цикл удвоенного периода, при $a \in [1.377, 1.476]$ – цикл периода 4, при $a \in [1.355, 1.376]$ – цикл периода 8. Аттрактор Фейгенбаума найден при $a = 1.35$. Таким образом, в системе наблюдается каскад Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода (рис. 2).

Далее при $a = 1.2512$ в системе существуют цикл периода 9, при $a \in [1.2393, 1.2399]$ – цикл периода 7, при $a \in [1.2047, 1.2077]$ – цикл периода 5 (рис. 3). Таким образом, дальнейшее развитие хаотического сценария в системе происходит в ходе субгармонического каскада бифуркаций рождения устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского. При $a \in [1.1572, 1.1875]$ найден цикл периода 3, при $a \in [1.1431, 1.1571]$ – удвоение цикла периода 3, при $a \in [1.1295, 1.1301]$ найдено утроение цикла периода 3, что свидетельствует о наличии в системе каскада Фейгенбаума и полного субгармонического каскада для цикла периода 3 (рис. 4). Циклов гомоклинического каскада бифуркаций при дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра a в системе не обнаружено.

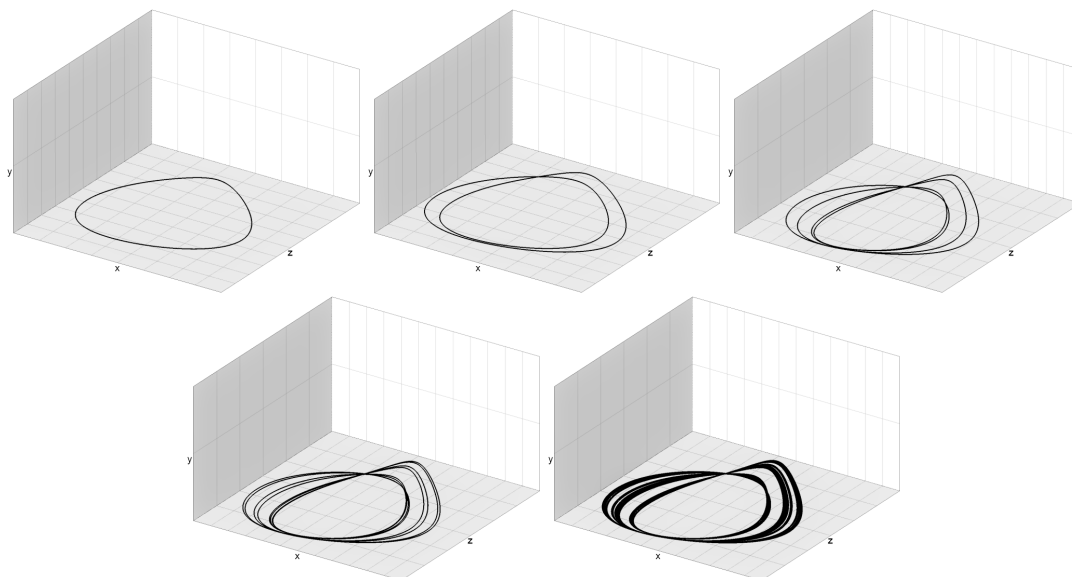


Рис. 2. Циклы каскада бифуркаций Фейгенбаума соответственно при значениях параметра $a = 2.04, a=1.877, a=1.3826, a=1.3578, a=1.35$

2. Система 2. Система Спротта – Sprott (n)

$$\begin{cases} \dot{x} = ay, \\ \dot{y} = x + z^2, \\ \dot{z} = 1 + y - 2z, \end{cases} \quad (7)$$

где a – вещественный параметр. Sprott (n) – другая модельная система с хаотической динамикой из работы Спротта [4].

2.1. Аналитическое исследование
Изучим область диссипативности системы:

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = -2 < 0. \quad (8)$$

Таким образом, система (7) диссипативна при любом значении вещественного параметра a .

Система имеет единственную особую точку $O(-0.25, 0, 0.5)$.

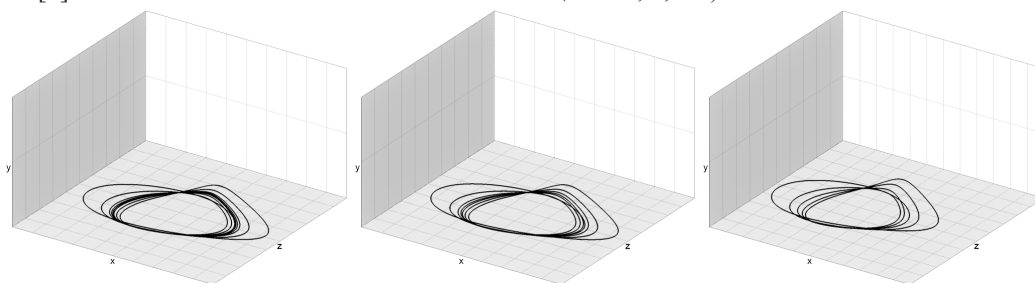


Рис. 3. Циклы периодов 9, 1, 5 субгармонического каскада соответственно при значениях параметра $a = 1.2512, a = 1.2396, a = 1.2067$

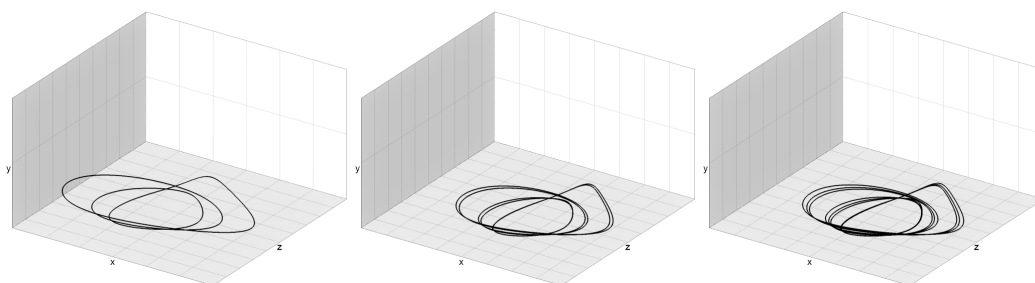


Рис. 4. Цикл периода 3 при $a = 1.1681$ и его удвоение при $a = 1.1434$ и утроение при $a = 1.1299$

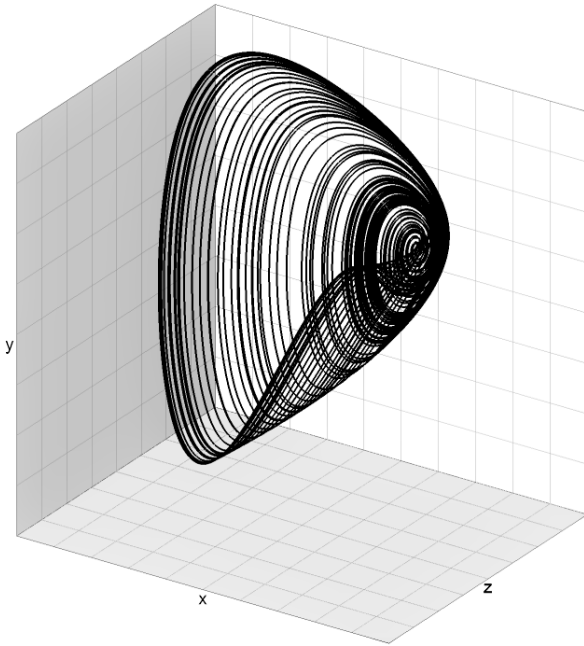


Рис. 5. Один из хаотических аттракторов при $a = -1.688$

Матрица линеаризации правой части системы для особой точки имеет вид:

$$J(O) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Найдем характеристический полином матрицы $J(O)$:

$$\det(\lambda I - J(O)) = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - (1+a)\lambda - 2a = 0. \quad (10)$$

Сделаем замену переменной $\lambda = \mu - \frac{2}{3}$. Получим:

$$\mu^3 + p\mu + q = 0, \quad (11)$$

где $p = -a - \frac{7}{3}$, $q = -\frac{4a}{3} + \frac{34}{27}$.

Уравнение (11) имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, если дискриминант $\Delta > 0$. Дискриминант (11) определяется формулой:

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (12)$$

Имеем:

$$\Delta = \frac{1}{27}(-a^3 + 5a^2 - 39a - 2) > 0. \quad (13)$$

Таким образом, когда неравенство (13) выполняется, исходный характеристический полином также имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня.

Заметим, что $\lambda_i = \mu_i - \frac{2}{3}$, где $1 \leq i \leq 3$, – корни уравнения (10). Следовательно, неравенство $\lambda_1 < 0$ принимает вид $\alpha + \beta < \frac{2}{3}$, $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) > 0$ принимает вид $\alpha + \beta < -\frac{4}{3}$.

Имеем:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} < -\frac{4}{3} \quad (14)$$

Таким образом, получили, что при выполнении условия (13) существования одного действительного и двух комплексно-сопряженных корней (14) и условия отрицательности действительного корня и положительности комплексно-сопряженных корней, особая точка $O(-0.25, 0, 0.5)$ системы (7) является неустойчивым седло-фокусом.

2.2. Численное исследование

При значении параметра $a < -2.68$ в системе существует устойчивый цикл. При $a = -2.67$ начинается каскад бифуркаций Фейгенбаума, рождается цикл удвоенного периода, который существует при $a \in [-2.67, -2.26]$, затем цикл периода 4 при $a \in [-2.25, -2.17]$, цикл периода 8 при $a \in [-2.16, -2.13518]$. При $a = -2.131$ наблюдается аттрактор Фейгенбаума. (Рис. 6).

Далее реализуется субгармонический каскад бифуркаций. При $a \in [-2.05865, -2.05864]$ обнаружен цикл периода 9, при $a \in [-2.05004, -2.04972]$ – цикл периода 7, при $a \in [-2.0268, -2.02464]$ – цикл периода 5, при $a \in [-1.96535, -1.95324]$ – цикл периода 3, его удвоение при $a \in [-1.95323, -1.94758]$ цикл периода 9 при $a \in [-1.94232, -1.94212]$ – утроение цикла периода 3, подтверждающий наличие полного субгармонического каскада на цикле периода 3 (рис. 8). При $a \in [-1.86125, -1.85959]$ найден гомоклинический цикл периода 4 (рис. 9), что позволяет утверждать о наличии в системе гомоклинического каскада бифуркаций Магницкого при дальнейшем увеличении параметра a .

3. Система 3. Система Берка-Шоу – Burke-Shaw system

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x+y), \\ \dot{y} = -y-axz, \\ \dot{z} = axy+b, \end{cases} \quad (15)$$

где a и b – вещественные параметры. Система Берка-Шоу была получена Б.Берком и Р.Шоу из системы уравнений Лоренца [5].

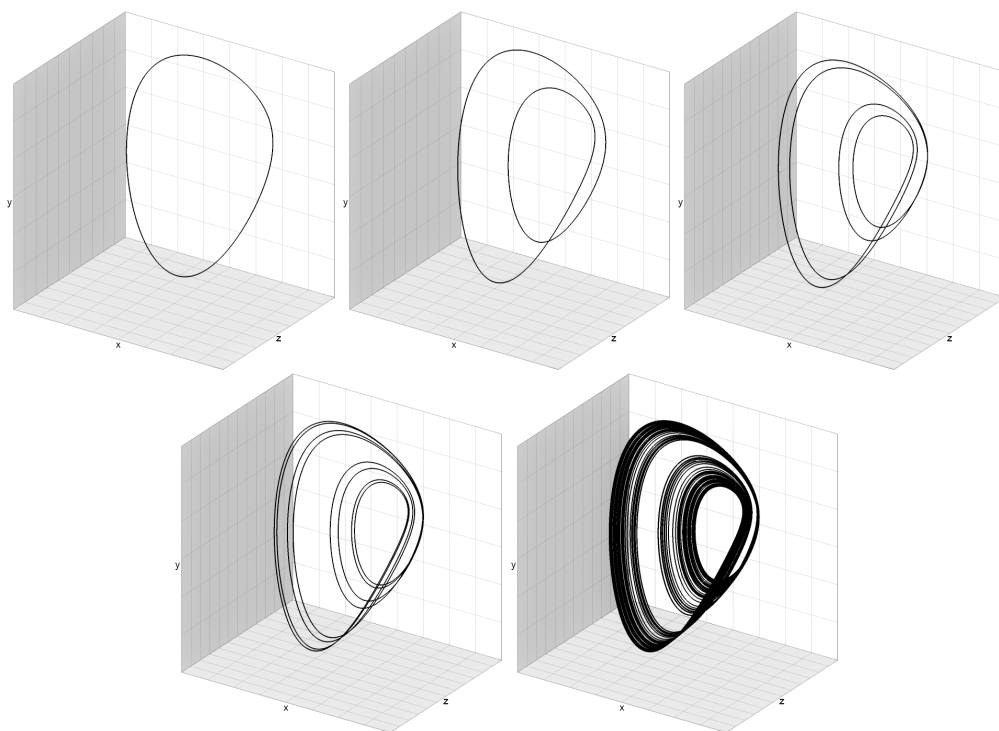


Рис. 6. Циклы каскада бифуркаций удвоения периода соответственно при значениях параметра $a = -2.91$, $a = -2.39$, $a = -2.18$, $a = -2.13522$, $a = -2.131$

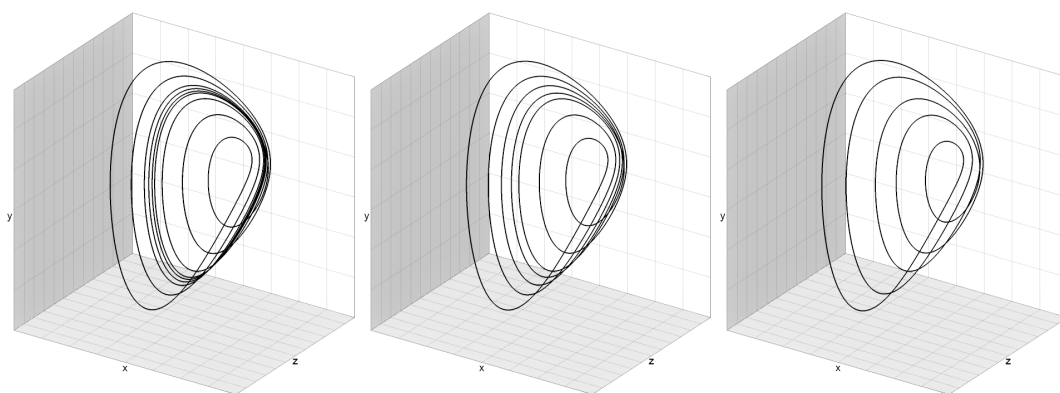


Рис. 7. Циклы периодов 9, 1, 5 субгармонического каскада соответственно при $a = -2.05865$, $a = -2.04985$, $a = -2.02658$

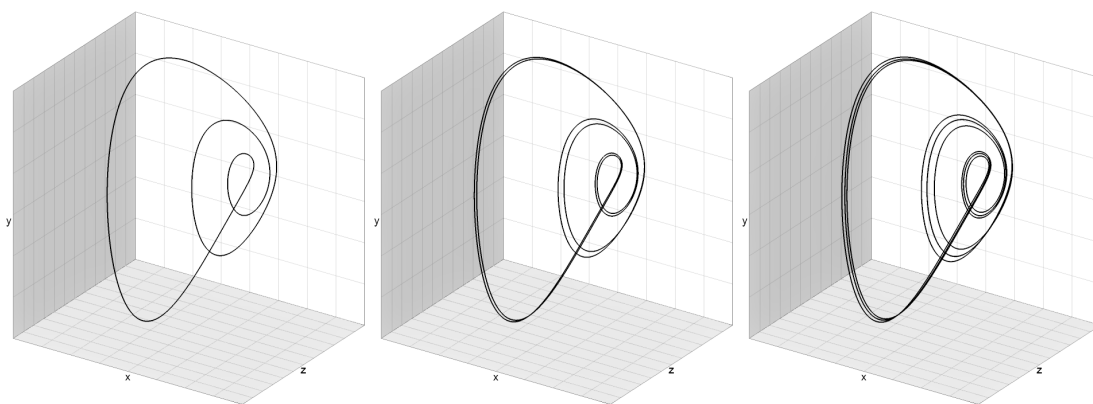


Рис. 8. Цикл периода 3 и его удвоение и утроение соответственно при $a = -1.95829$, $a = -1.94764$, $a = -1.94213$

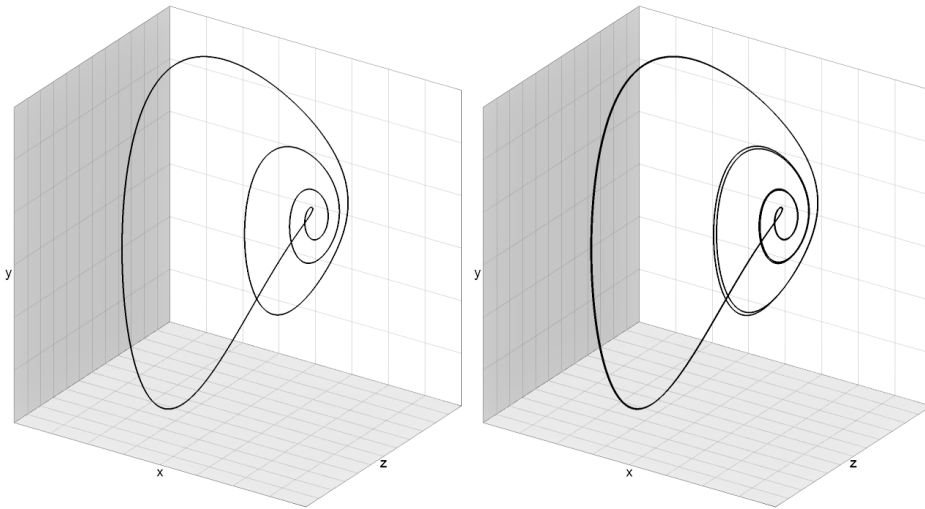


Рис. 9. Гомоклинический цикл периода 4 при $a = -1.86076$ и его удвоение при $a = -1.85888$

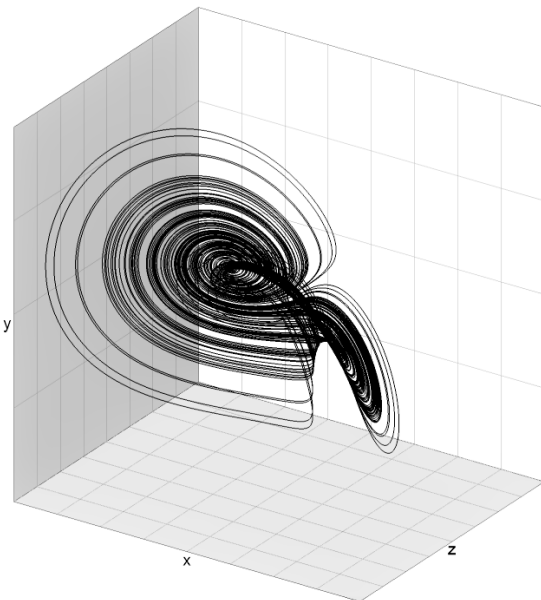


Рис. 10. Хаотический аттрактор при $b = 13.5$, $a = 10.0$

3.1. Аналитическое исследование

Область диссипативности системы:

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = -a - 1 < 0. \quad (16)$$

Учитывая условие (16), имеем $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$, $y = \mp \sqrt{\frac{b}{a}}$, $z = \frac{1}{a}$. Т.е. система имеет две симметричные относительно оси z особые точки $O_1(\sqrt{\frac{b}{a}}, -\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{a})$ и $O_2(-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{a})$.

Характеристические полиномы матриц $J(O_1)$ и $J(O_2)$ совпадают и имеют вид:

$$\lambda^3 + (a+1)\lambda^2 + ab\lambda + 2a^2b = 0. \quad (17)$$

Для того, чтобы уравнение (17) имело один действительный и два комплексно-сопряженных корня:

$$\Delta = \frac{1}{108}a^2b(8a^3 + a^2(71b + 24) + a(4b^2 - 38b + 24) - b + 8) > 0. \quad (18)$$

Так же заметим:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}} < -\frac{2(a+1)}{3}. \quad (19)$$

Таким образом, при выполнении условий (16), (18), (19) характеристические полиномы матриц линеаризации в особых точках $O_1(\sqrt{\frac{b}{a}}, -\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{a})$ и $O_2(-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{a})$ системы (15) имеют по одному отрицательному действительному корню и паре комплексно-сопряженных корней с положительной действительной частью, следовательно, при выполнении этих условий особые точки системы являются неустойчивыми седло-фокусами.

3.2. Численное исследование

Удалось обнаружить, что усложнение динамики системы в соответствии со сценарием ФШМ можно пронаблюдать при увеличении параметра b . Зафиксируем значение параметра $a = 10.0$.

При $b \in [2.392, 3.451]$ в системе существует устойчивый цикл. Затем наблюдается каскад бифуркаций Фейгенбаума: при $b \in [3.452, 3.591]$ – удвоенный исходный цикл, при $b \in [3.592, 3.622]$ – учетверенный исходный цикл, при $b = 3.6287$ – аттрактор Фейгенбаума (рис. 11).

Из каскада Шарковского удалось обнаружить циклы периода 9 при $b \in [3.8307, 3.8308]$, периода 7 при $b \in [3.8561, 3.8576]$, периода 5 при $b \in [3.9158, 3.9224]$, периода 3 при $b \in [4.052, 4.074]$ (рис. 12).

При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра найдены цикл гомоклинического

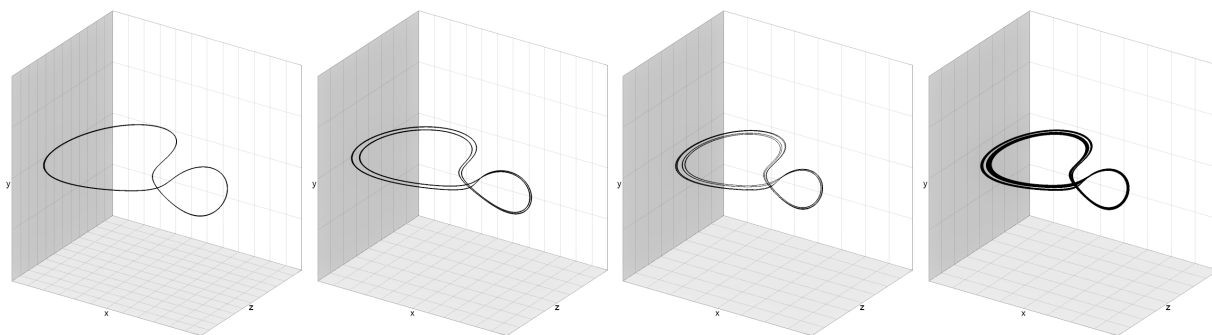


Рис. 11. Циклы каскада бифуркаций удвоения периода соответственно при значениях параметра $b = 3.4$, $b = 3.573$, $b = 3.619$, $b = 3.6287$

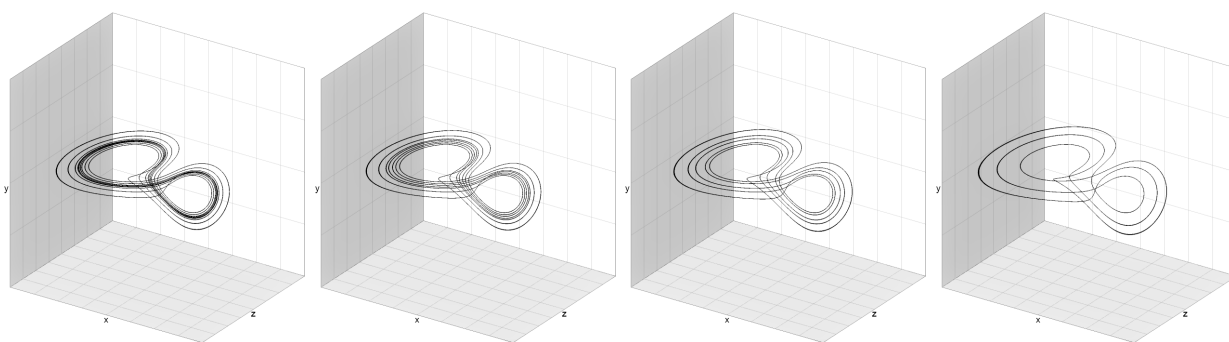


Рис. 12. Циклы каскада Шарковского соответственно при $b = 3.8307$, $b = 3.8571$, $b = 3.9162$, $b = 4.069$

каскада с четырьмя витками при $b = 4.105$ и цикл гетероклинического каскада при $b = 9.538$ (рис. 13).

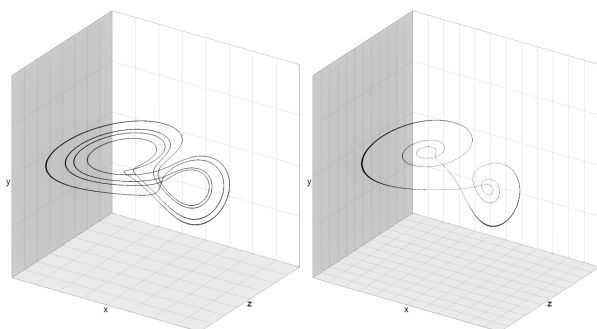


Рис. 13. Гомоклинический и гетероклинический циклы

Таким образом, сценарий перехода к хаосу в исследуемой системе также происходит в полном соответствии с ФШМ-теорией.

4. Заключение

В рамках данной работы проведены аналитические и численные исследования трёх модельных систем типа Шильникова, упомянутых в статье [3] Ченом: две системы Спротта – Sprott(e) и Sprott(n)

и система Burke-Shaw. В этих системах найдены бифуркационные параметры и типы особых точек, исследовалось возникновение исходных циклов, их каскадов бифуркаций, возникновение хаотических аттракторов. При изменении бифуркационных параметров и изучении фазовых портретов во всех трех системах прослежен один и тот же порядок развития хаоса и сценарий возникновения сингулярных аттракторов, полностью соответствующий процессам перехода к хаосу по Фейгенбауму-Шарковскому-Магницкому. В силу исследований, проведенных в данной работе, и многочисленных исследований других хаотических систем, упомянутых в статье Чена [3], можно сделать вывод о том, что предложенная Ченом классификация систем не имеет смысла, так как аттракторы любых хаотических систем имеют единую природу. Таким образом, произведенное исследование демонстрирует универсальность перехода к хаосу в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литературы

1. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. – М.: УРСС, 2004.
2. *Магницкий Н. А.* Теория динамического хаоса // М.: ЛЕ-НАНД. – 2011.

3. *Chen B.* The Related Extension and Application of the Shilnikov Theorem //Journal of Applied Mathematics. – 2013. – Т. 2013.
4. *Sprott J. C.* Some simple chaotic flows //Physical review E. – 1994. – Т. 50. – №. 2. – С. R647.
5. *Shaw R.* Strange attractors, chaotic behavior and information flow //Z. Naturforsch. – 1981. – Т. 36. – С. 80-112.

Зайцева Мария Федоровна. Студентка МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: mf.zaitseva@gmail.com

Рябков Олег Игоревич. Научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН. К. ф.-м.н. Окончил в 2009 г. МГУ. Количество печатных работ и монографий: 8. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com