

# Анализ хаотической динамики в двух моделях газового разряда с нелинейной проводимостью

Д. А. БУРОВ, О.И. РЯБКОВ

**Аннотация.** В работе исследуется модель электрической цепи с газовым разрядом. Данная система исследовалась ранее экспериментально [1]. Известно, что в ней могут генерироваться релаксационные и хаотические колебания. Газовый разряд описывается в нульмерном приближении, т.е. без учёта пространственного распределения параметров, согласно нелинейным моделям проводимости, предложенным в [2]. Коэффициенты моделей проводимости были идентифицированы нами по экспериментальным данным с помощью метода наименьших квадратов. Для численного моделирования применялись неявные и явные конечно-разностные методы интегрирования высокого порядка (из семейств линейных многошаговых методов и методов Рунге–Кутты). В обеих моделях найдены бифуркации рождения цикла (Андроннова–Хопфа), каскады бифуркаций удвоения периода предельных циклов, а также циклы из субгармонического и гомоклинического каскадов [3]. Помимо этого, обнаружено явление мультистабильности и хаотические аттракторы. В заключение проведено качественное сравнение численных решений с экспериментальными данными, на основе чего выбрана наиболее адекватная модель.

**Ключевые слова:** *газовый разряд, хаос, хаотический аттрактор, сценарий ФШМ, нелинейная проводимость, идентификация модели, мультистабильность.*

## 1. Введение

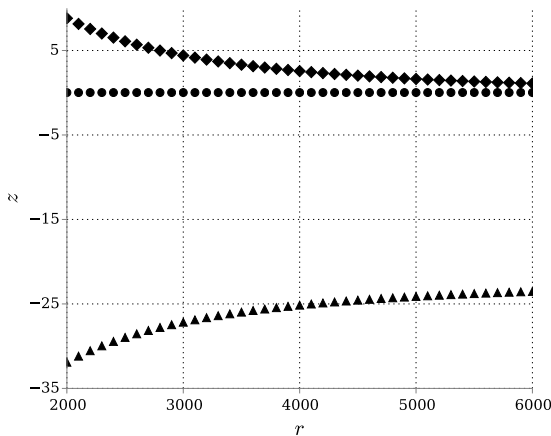
Электрические цепи являются одним из наиболее изученных классов динамических систем, проявляющих хаотическое поведение. Работа Чуа в 1983 году и последовавшие за ней исследования стали не только пионерскими, но и определили целое направление [4], и с тех пор хаотическим электрическим цепям было уделено немало внимания [5]. Интерес к этой области не ослабевает до сих пор, поскольку такие системы представляют собой доступный и наглядный пример детерминированного хаоса в моделях физических процессов, к тому же согласующийся с реальными экспериментами.

В данной работе мы рассматриваем один из видов колебательного контура, упоминающийся в литературе [6], в котором присутствует нелинейный элемент — газоразрядная трубка. Такие разряды также исследуются весьма обширно, что обусловлено, в первую очередь, широкой областью их применения [7]. В физике плазмы и, в частности, в физике разряда довольно хорошо известен эффект зависимости сопротивления газовой среды от различных параметров этой среды, на которые влияет сам разряд: температура, концентрация ионов, плотность и т.д. Это приводит к нелинейным процессам, которые, в свою очередь, являются причиной возникновения периодических и даже хаотических решений [8]. Такие эффекты не только регистрируются экспериментально [1, 9], но и в некоторых

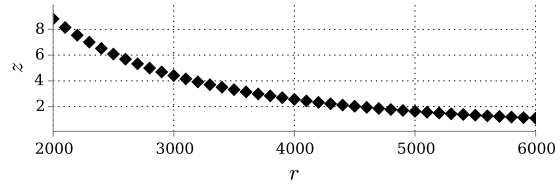
случаях являются более предпочтительными по сравнению с устойчивыми неподвижными решениями, однако для прямого численного моделирования оказываются либо чересчур сложны, либо временные затраты на разработку численных методов и сами такие вычисления не оправдываются при решении инженерных задач. В таком случае необходимо использовать упрощённые модели, позволяющие получать решения, приближенные к реальности, и с существенно меньшим временем расчёта.

В данной статье мы исследовали работу электрической цепи, схема которой приведена в работе [10]. Все параметры цепи (кроме газового разряда) фиксированы и взяты из экспериментов. В качестве нелинейных нульмерных моделей разряда были выбраны рассматривавшиеся ранее варианты [2], содержащие по несколько параметров. Для идентификации этих параметров, опять же, по имеющимся экспериментальным данным мы пользовались методом наименьших квадратов (МНК), предварительно преобразовывая сигнал с осциллограммы.

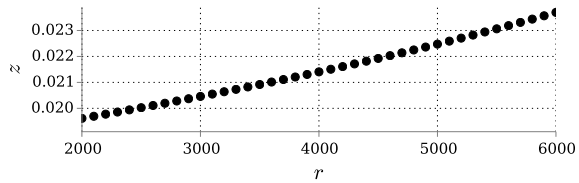
Целью исследования было получить подходящую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающую поведение физических величин в электрической цепи, то есть добиться принципиального сходства расчётных данных с экспериментом; сравнить различные варианты моделей разряда, и, кроме того, сделать вывод об адекватности выбранных моделей; а также



(a) Точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  (снизу вверх)



(b) z-координата точки  $O_3$



(c) z-координата точки  $O_2$

Рис. 1. Решения уравнения (6) в зависимости от  $r$

исследовать хаотические режимы и приводящие к ним каскады бифуркаций, так как именно колебательные (в том числе, хаотические) решения интересны с практической точки зрения.

### 2. Постановка задачи

В работе проводится аналитическое и численное исследование системы ОДУ, полученной по правилу Кирхгофа [10] по исследовавшейся ранее экспериментально схеме электрической цепи [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \beta \frac{x}{z}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{r}(\gamma - \delta y) - \kappa x, \\ \frac{dz}{dt} = F_i(\kappa z, x), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha = 4.3252595 \cdot 10^8$ ,  $\beta = 2.94117647 \cdot 10^3$ ,  $\gamma = 7$ ,  $\delta = 1.470588235 \cdot 10^5$ ,  $\kappa = 10^{-3}$ . Всюду далее в данной работе значения перечисленных параметров зафиксированы, если не оговорено иначе, а в качестве бифуркационного подразумевается параметр  $r$ . Рассмотренный в данной работе интервал значений этого параметра обозначим за  $B = [4439, 5600]$ .

За  $F_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  в уравнении (1) обозначены две нелинейные модели проводимости, предложенные ранее [2, с. 21–22]:

$$F_1(z, x) = a_2(x + a_1)^2 - (b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0) \quad (2a)$$

$$F_2(z, x) = \frac{a_2}{z}(x + a_1)^2 - (b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0) \quad (2b)$$

Каждую из полученных в результате систем уравнений мы исследовали далее отдельно.

Стоит отметить, что система представлена в безразмерном виде, однако связь с реальными величинами сохраняется: так, фазовая переменная  $x$  отвечает за ток, проходящий в той части цепи, где подключён разряд,  $y$  отвечает за заряд на конденсаторе,  $z$  — за проводимость разряда.

### 3. Методы

Для идентификации параметров моделей по имеющимся экспериментальным данным была использована следующая схема. Обозначим за  $\hat{G}$  проводимость разряда, тогда  $\hat{G} = \kappa z$ , и, кроме того,  $x = I_d$ , где  $I_d$  — ток на разряде [10]. Рассмотрим последнее уравнение системы (1):

$$\frac{dz}{dt} = F_i(\kappa z, x, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) \Rightarrow$$

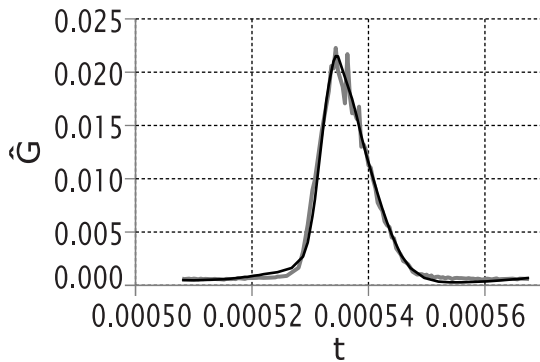
$$z(t) - z(0) = \int_0^t F_i(\kappa z(\tau), x(\tau), a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) d\tau,$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$  — параметры моделей  $F_i$ .

Далее введём величины  $z_{exp}$  и  $x_{exp}$ , которые вычислим по экспериментальным данным  $\hat{G}_{exp}$  и  $I_{d,exp}$  с осциллограммы, и выпишем функционал:

$$J(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) = \int_0^T (z_{exp}(t) - z_{exp}(0) - \int_0^t F_i(\kappa z_{exp}(\tau), x_{exp}(\tau), a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) d\tau)^2 dt \rightarrow \min \quad (3)$$

Так как обе модели линейно зависят от четырёх параметров  $(a_2, b_1, b_2, b_3)$  и нелинейно — от одного  $(a_1)$ , то для минимизации функционала было решено использовать метод наименьших квадратов, фиксируя при этом значения  $a_1$ . Пример работы описанного алгоритма идентификации приведён на рис. 2.



**Рис. 2.** К идентификации. Серым цветом выделены опытные данные, чёрным – результат работы алгоритма.

Все численные расчёты были выполнены с помощью программы, написанной с использованием сторонних библиотек, в частности, NumPy и SciPy [11, 12]. Для интегрирования ОДУ применялись 1) метод с переключением между неявным методом обратного дифференцирования пятого порядка (для жёстких задач) и методом Адамса двенадцатого порядка (для нежёстких задач) [13]; 2) явные методы Рунге-Кутты-Дормана-Принса пятого и восьмого порядков [14].

#### 4. Линейный анализ систем

##### 4.1. Первая модель

Для рассмотрения системы с первой моделью нелинейной проводимости подставим формулу (2а) в уравнение (1) и, учитывая параметр  $\kappa$  в параметрах модели  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ , получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \beta \frac{x}{z}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{r}(\gamma - \delta y) - \kappa x, \\ \frac{dz}{dt} = a_2(x + a_1)^2 - (b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0), \end{cases}$$

где  $a_i, b_i$  получены с помощью идентификации и равны:

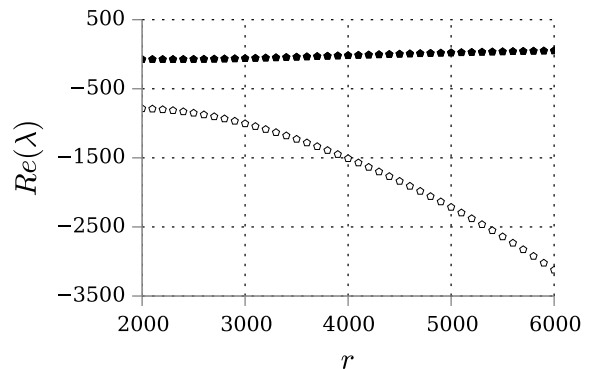
$$\begin{aligned} a_2 &= 330, & b_3 &= 0, \\ a_1 &= 0, & b_2 &= 13.298, \\ & & b_1 &= 293.4, \\ & & b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая зафиксированные параметры, дивергенция правой части системы отрицательна тогда и только тогда, когда  $2b_2 z + \frac{\beta}{z} + \frac{\delta}{r} + b_1 > 0$ , что, в свою очередь, выполняется для  $r \in B$  и для любого  $z > 0$  (отрицательные значения не имеют физического смысла).

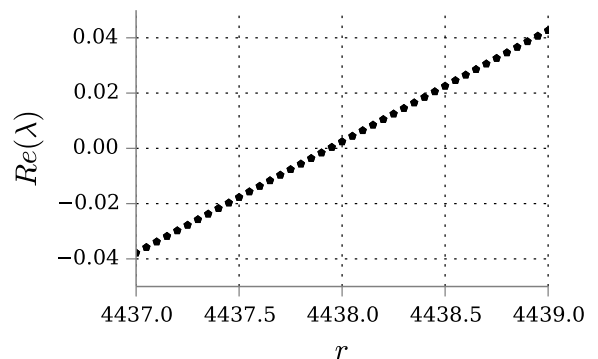
Для  $r \in B$  и зафиксированных параметров существуют три особые точки, координаты которых при исследовании на тип и устойчивость были найдены численно при решении кубического уравнения на  $z$ -координату (рис. 1):

$$\begin{aligned} z^3 r^2 b_2 \kappa^2 + z^2 (r^2 b_1 \kappa^2 + 2r \kappa b_2) + \\ + z (2r \kappa b_1 - a_2 \gamma^2 + b_2) + b_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

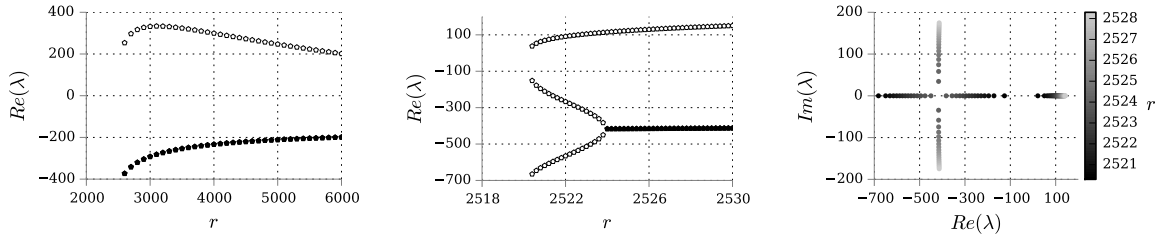
Точка  $O_1$  не соответствует физическому смыслу задачи, точка же  $O_2$ , согласно расчётам, является седловой на всём рассматриваемом интервале значений параметров: два действительных отрицательных собственных значения и одно положительное. Результаты численного исследования собственных значений якобиана правой части уравнения (4) в точке  $O_3$  приведены на рис. 3. Эта точка имеет одно отрицательное и два комплексно сопряжённых значения, действительная часть которых меняет свой знак при  $r \approx 4438$  (рис. 3б). Таким образом, при этом значении параметра происходит первая бифуркация Андронова-Хопфа.



**(а)** Действительная часть с. зн.; закрашенные точки обозначают комплексно сопряжённые с. зн.



**Рис. 3.** Собственные значения (с. зн.) якобиана в точке  $O_3$  в зависимости от  $r$ .



(а) Действительная часть с. зн.; закрашенные точки обозначают комплексно сопряжённые с. зн. (б) Действительная часть с. зн. (увеличено) (с) Собственные значения на комплексной плоскости

Рис. 5: Собственные значения (с. зн.) якобиана в точке  $O_3$  в зависимости от  $r$ .

4.2. Вторая модель

После подстановки формулы (2b) в уравнение (1) получим:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y - \beta \frac{x}{z}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{r}(\gamma - \delta y) - \kappa x, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{a_2}{z}(x + a_1)^2 - (b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0), \end{cases}$$

где параметры  $a_p, b_p$ , так же, как и в случае аервой модели, получены с помощью идентификации:

$$\begin{aligned} a_2 &= 948.4, & b_3 &= 14.893, \\ a_1 &= 0, & b_2 &= -267.59, \\ & & b_1 &= 1206.9, \\ & & b_0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Дивергенция правой части отрицательна для зафиксированных параметров, если  $3b_3 z^2 + 2b_2 z + (b_1 + \frac{\delta}{r}) + \frac{\beta}{z} + \frac{a_2(x+a_1)}{z^2} > 0$ , что, в свою очередь, выполняется для  $r \in \bar{B}$  и для любого  $z > 0$ .

Существуют четыре особые точки, координаты которых найдены численно, исходя из следующего уравнения (рис. 4):

$$z^4 r^2 \kappa^2 b_3 + z^3 (r^2 \kappa^2 b_2 + 2r \kappa b_3) + z^2 (r^2 \kappa^2 b_1 + 2r \kappa b_2 + b_3) + z(2r \kappa b_1 + b_2) + b_1 - a_2 \gamma^2 = 0. \quad (9)$$

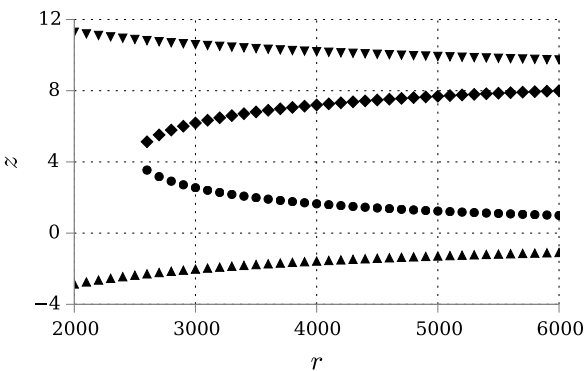
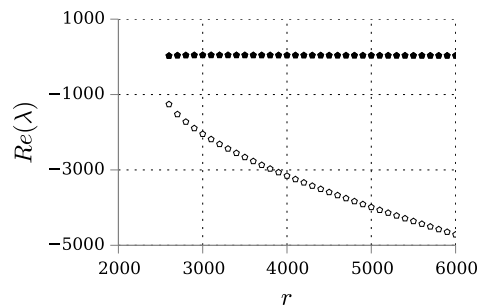
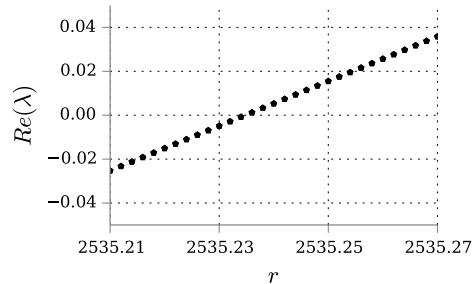


Рис. 4. Решения уравнения (9) в зависимости от  $r$ . Точки  $O_1, O_2, O_3$  и  $O_4$  (снизу вверх).

Уравнение (9) имеет четыре корня, два из которых действительны, и ещё два становятся действительными при  $r \approx 2520.3$ . Точка  $O_1$  не соответствует физическому смыслу; точка  $O_4$  является устойчивым фокусом. Точка  $O_3$  при  $r \approx 2520.3$  рождается неустойчивым седлом с двумя отрицательными и одним положительным действительными значениями, однако довольно быстро два отрицательных действительных значения сливаются в одно комплексное, тем самым меняя тип точки на неустойчивый фокус (рис. 5). Для собственных значений якобиана в точке  $O_2$  результаты расчётов приведены на рис. 6. Так же, как и в случае первой модели, эта точка имеет одно действительное отрицательное значение и два комплексно сопряжённых, которые пересекают мнимую ось при  $r \approx 2535.235$  (рис. 6b), что приводит к рождению устойчивого предельного цикла.



(а) Действительная часть с. зн.; закрашенные точки обозначают комплексно сопряжённые с. зн.



(б) Действительная часть комплексно сопряжённых с. зн. (увеличено)

Рис. 6. Собственные значения (с. зн.) якобиана в точке  $O_2$  в зависимости от  $r$ .

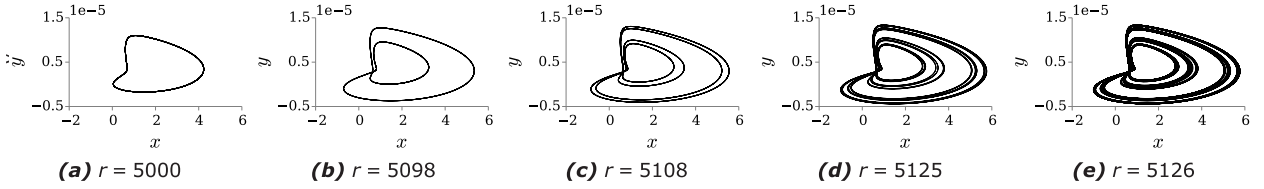


Рис. 8. Каскад Фейгенбаума (циклы периодов 1, 2, 4, 16 и хаотический аттрактор).

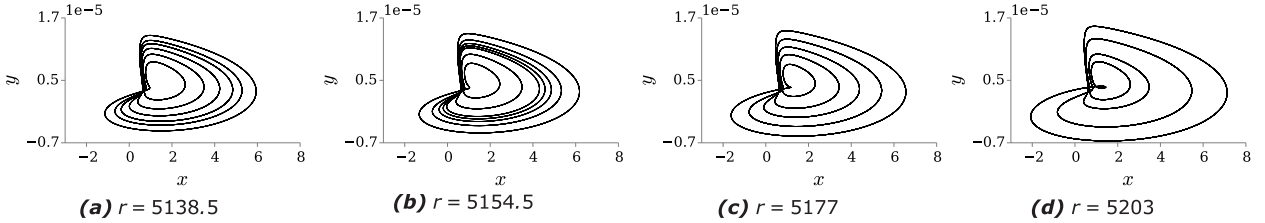


Рис. 9. Некоторые циклы из субгармонического (6, 7, 5) и гомоклинического (4) каскадов.

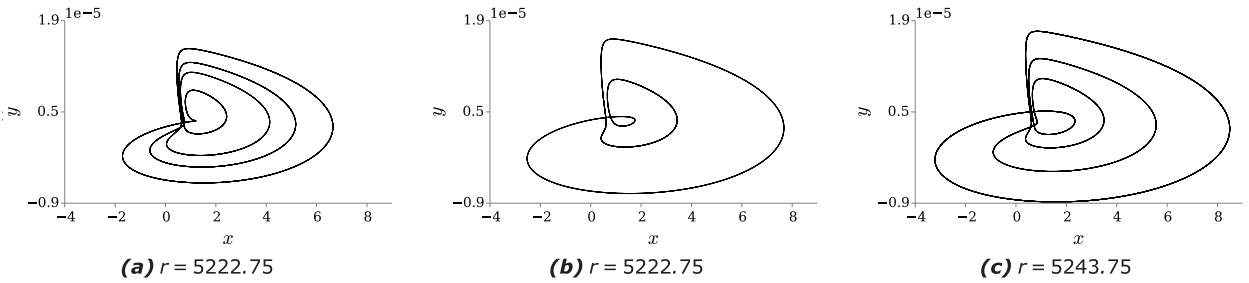


Рис. 10. Мультистабильность в системе (4) и цикл периода три.

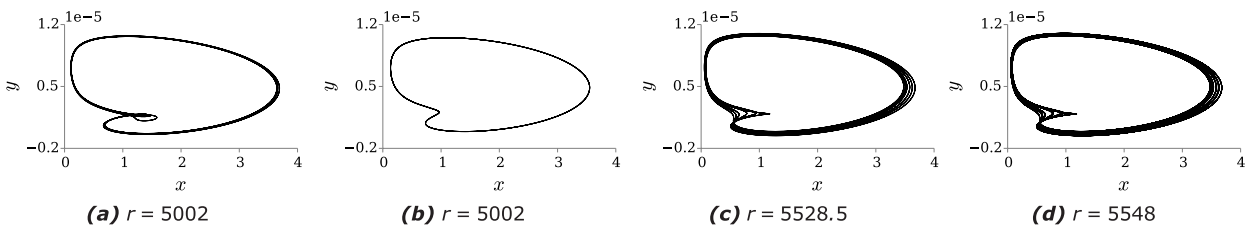


Рис. 11. Мультистабильность в системе (7) и утроение цикла (циклы периодов 3, 1, 6, 18).

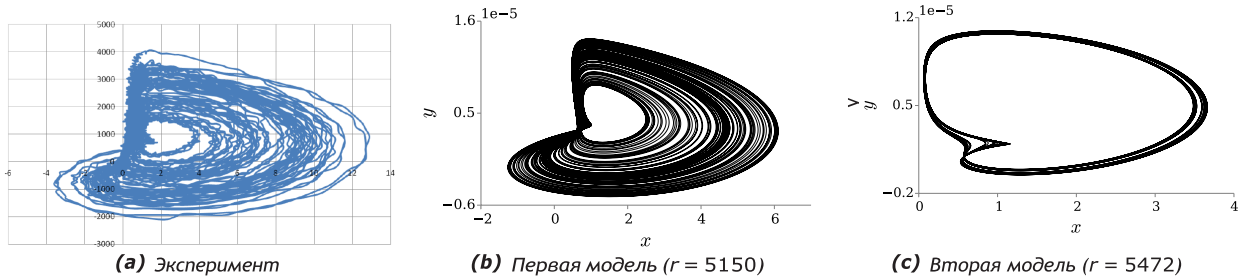


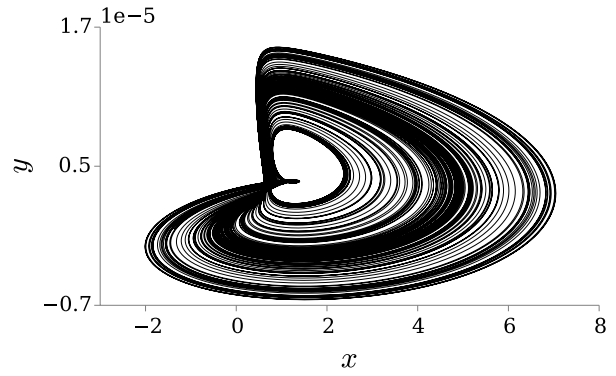
Рис. 12. Сравнение экспериментальных данных с решениями систем (4) и (7).

**5. Результаты**

**5.1. Первая модель**

Обнаруженные циклы приведены в табл. 1. В частности, для значений бифуркационного параметра  $r \in [4438, 5125.6]$  найден каскад удвоений периодов предельных циклов (рис. 8). Также были найдены циклы из субгармонического (рис. 9а–9с), равно как и из гомоклинического каскадов (рис. 9d).

Помимо этого, был обнаружен еще один устойчивый предельный цикл, сосуществующий в системе вместе с основным — так называемое явление мультистабильности (рис. 10а и 10b), а также несколько удвоенных его периода и последний цикл из каскада Шарковского — цикл периода три (рис. 10с). Второе периодическое решение могло появиться в результате седлоузловой бифуркации для циклов, что является предметом для возможных дальнейших исследований. На рис. 7 приведён пример хаотического движения.



**Рис. 7.** Пример хаотического движения в системе (4) ( $r = 5200$ ).

В табл. 2 и 3 представлены результаты численного исследования системы (4), соответственно, при  $\gamma = 6.9$  и  $\gamma = 7.1$ . Выбор таких значений для моделирования обусловлен практическим интересом, так как безразмерный параметр  $\gamma$  отвечает за напряжение источника в электрической цепи. Выяснилось,

**Таблица 1.**

Найденные циклы в первой модели.

$r$	Период	$r$	Период	$r$	Период
4438.0–5012.0	1	5135.4	42	5203.5	8
5012.5–5098.0	2	5138.3–5139.1	6	5210.0	12
5099.0–5118.0	4	5139.2–5139.5	12	5215.5	6
5119.0–5124.3	8	5139.6	24	5222.00	32
5124.4–5125.3	16	5141.7	28	5222.25	8
5125.4–5125.5	32	5142.9	20	5222.50–5222.75	4
5125.6	64	5146.2	8	5222.75–5225.00	1
5126.2	24	5154.5	7	5225.25–5226.00	2
5127.3	20	5154.6	14	5226.25	4
5128.3–5128.4	12	5159.4	9	5226.50	8
5128.5	24	5169.4–5186.7	5	5233.3	6
5131.7	14	5191.1	7	5236.50	4
5133.5–5133.6	10	5195.5	6	5241.00	7
5133.7	20	5195.6	12	5243.75	3
5133.8	60	5203.0	4	5244.00	6

**Таблица 2.**

Найденные циклы в первой модели ( $\gamma = 6.9$ ).

$r$	Период	$r$	Период	$r$ (другое решение)	Период
4900.0–4930.0	1	5134.48	6	5140.6–5142.5	1
4935.0–5020.0	2	5134.50	12	5143.0–5143.5	2
5022.0–5040.0	4	5140.8	12	5144.0	4

5042.0–5044.0	8	5140.99	32	5145.0	3
5074.0	7	5141.0	16	5158.0	7
5088.0–5106.0	5	5141.2	8	5161.0	6
5122.0	8	5141.5	4	5170.91–5170.95	4

Таблица 3.

Найденные циклы в первой модели ( $\gamma = 7.1$ ).

$r$	Период	$r$	Период	$r$	Период
4900.0–5080.0	1	5278.05	7	5326.8	4
5090.0–5176.0	2	5284.0	4	5326.9	8
5178.0–5198.0	4	5298.0	6	5346.0	6
5200.0–5202.0	8	5303.0	32	5346.1	3
5204.0	16	5303.2	8	5349.0	8
5208.0	12	5303.5	4	5349.2–5350.0	4
5252.0–5264.0	5	5305.0–5307.0	1	5350.2–5353.2	2
5278.01	14	5308.0	2	5354.0–5358.3	1

Таблица 4.

Найденные циклы во второй модели.

$r$	Период	$r$	Период	$r$ (другое решение)	Период
2535.3–5051.0	1	5468.0	28	5002.0	3
5051.5–5290.0	2	5482.5–5483.5	10	5060.0–5060.1	12
5292.0–5388.5	4	5484.0	20	5060.2–5060.8	6
5389.0–5415.5	8	5484.5	40	5060.9–5062.2	3
5416.0–5422.0	16	5499.0	14	5068.7–5068.8	10
5422.5–5423.5	32	5512.0	18	5068.9–5069.0	5
5424.0	64	5528.5–5537.5	6	5075.1–5075.2	12
5424.5	128	5538.0–5542.5	12	5075.3–5075.4	6
5428.5	48	5543.0–5543.5	24	5076.6	10
5433.0	56	5544.0–5544.5	48	5077.9	12
5436.0	40	5548.0	18	5078.8–5078.9	16
5443.0–5443.5	12	5588.0	10	5079.0–5080.0	8
5444.0	24	5588.5	20	5080.1–5084.0	4
5444.5	48	5589.0	40	5086.0–5104.0	2
5454.5	16			5106.0–5148.2	1

что при незначительном изменении этого параметра в окрестности значения  $\gamma = 7$  (порядка 3%) большинство устойчивых решений и каскадов бифуркаций сохраняется. При этом области устойчивости и их ширина (с точки зрения бифуркационного пара-

метра) изменяются: так, при уменьшении  $\gamma$  каскады сдвигаются в сторону меньших значений параметра  $r$ , а сами области устойчивости становятся уже; при увеличении же наблюдаются обратные эффекты. Таким образом, при уменьшении параметра  $\gamma$  хао-

тическая динамика в системе проявляется при меньших значениях параметра  $r$ , что может представлять значимость с точки зрения опытных исследований.

Помимо этого, в обоих случаях ( $\gamma = 6.9, 7.1$ ) наблюдалось одновременное сосуществование несколько аттракторов в системе, некоторые из которых бифурцировали в направлении уменьшения параметра  $r$  (например,  $r \in [5140.99, 5141.5]$  в первом случае и  $r \in [5303, 5303.5]$  – во втором).

### 5.2. Вторая модель

Обнаруженные циклы приведены в табл. 4. В этой модели также был обнаружен полный каскад Фейгенбаума и некоторое множество циклов из каскада Шарковского. Однако, так же, как и в первом случае, не удалось найти цикл периода три для основного бифурцирующего решения.

В этой модели аналогично наблюдается мультистабильность (рис. 11а и 11б), однако в отличие от первой модели, этот каскад бифуркаций и рождения предельных циклов происходит в обратном направлении, то есть, при уменьшении бифуркационного параметра  $r$ . Обнаружен цикл периода три; кроме того, исходя из найденных решений, видно, что существует некоторый интервал параметра  $r \in [5106, 5148.2]$ , в котором система демонстрирует наиболее простое поведение, имея лишь два устойчивых и одно неустойчивое периодические решения.

Помимо этого, в системе при значении параметра  $r \in [5528.5, 5548]$  найден полный каскад бифуркаций Фейгенбаума и Шарковского на цикле периода 6, который заканчивается утроением периода изначального цикла (рис. 11с и 11д).

### 5.3. Сравнение с экспериментом

Для проведения качественного сравнения с экспериментальными данными мы постарались подобрать наиболее подходящее значение параметра в двух исследованных моделях. Как видно из рис. 12, первая модель намного правдоподобнее отражает реальные процессы, нежели вторая. Помимо очевидной разницы в форме аттракторов, самым важным является тот факт, что решения первой модели пересекают плоскость  $x = 0$ , что соответствует экспериментам и означает ток в обратном направлении в некоторые промежутки времени на том участке цепи, где расположен газовый разряд, в то время как во второй модели ни одно из найденных нами периодических или хаотических решений не обладает таким свойством. Помимо этого, во второй модели присутствует нефизичный эффект пробоя разряда при сколь угодно большом увеличении сопротивления, возникающий из-за находящейся в знаменателе формулы (2b) перемен-

ной  $z$ , чего не наблюдается в первом случае. Этот эффект следует отнести к дефектам самой модели.

Из данных рассуждений можно сделать вывод о том, что, несмотря на более простой вид, первая модель более адекватно описывает реальные нелинейные процессы.

## 6. Заключение

В работе рассмотрена динамика электрической цепи с газовым разрядом, которая описывается системами нелинейных ОДУ. Эти системы были получены при помощи известных правил Кирхгофа, нелинейных моделей газового разряда, взятых из литературы, а также экспериментальных данных, по которым устанавливались параметры выбранных моделей и самой электрической цепи.

Обе системы проанализированы с точки зрения устойчивости особых точек; численно найден целый ряд устойчивых периодических решений, показано, что характер усложнения динамики подчиняется универсальному сценарию теории ФШМ [3], и кроме того, обнаружено явление мультистабильности. К тому же, в первой модели продемонстрировано изменение перехода к хаосу при незначительном возмущении одного из параметров цепи ( $\gamma = 6.9, 7.1$ ). Проведено сравнение данных эксперимента и полученных решений, на основе этого сделан вывод о соответствии моделей реальным физическим процессам.

## Литература

1. *A. Klimov, A. Grigorenko, A. Efimov, I. Moralev, L. Polyakov, M. Sidorenko, B. Tolkunov, N. Evstigneev и O. Ryabkov.* «Vortex control by Combined Electric Discharge Plasma». В: 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting. American Institute of Aeronautics and Astronautics, янв. 2013.
2. *J. Koprnický.* «Electric conductivity model of discharge lamps». Автореферат. Paul Sabatier University, 2007.
3. *Н. А. Магницкий.* Теория динамического хаоса. М.: ЛЕНАНД, 2011, с. 320.
4. *R. N. Madan.* Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos. Т. 1. World Scientific Series on Nonlinear Science B. World Scientific, 1993, с. 1088.
5. *G. Chen и T. Ueta.* Chaos in Circuits and Systems. Т. 11. World Scientific Series on Nonlinear Science B. World Scientific, 2002, с. 656.
6. *А. А. Харкевич.* Основы радиотехники. М.: Физматлит, 2007, с. 510.
7. *A. Bogaerts, E. Neyts, R. Gijbels и J. van der Mullen.* «Gas discharge plasmas and their



- applications». В: Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy 57.4 (2002), с. 609-658.
8. *B. M. Smirnov*. Theory of Gas Discharge Plasma. Т. 84. Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics. Springer International Publishing, 2015, с. 423.
  9. *T. Braun, J. A. Lisboa, R. E. Francke и J. A. C. Gallas*. «Observation of deterministic chaos in electrical discharges in gases». В: Physical Review Letters 59.6 (авг. 1987), с. 613-616.
  10. *Д. А. Буров*. «Сценарий перехода к хаосу в модели разряда с нелинейной проводимостью». В: Труды IV Всероссийской научной конференции «ИУСА-2016». Т. 2. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2016.
  11. *S. v. d. Walt, S. C. Colbert и G. Varoquaux*. «The NumPy array: a structure for efficient numerical computation». В: Computing in Science & Engineering 13.2 (2011), с. 22-30.
  12. *E. Jones, T. Oliphant и P. Peterson*. SciPy: Open source scientific tools for Python. 2001.
  13. *A. C. Hindmarsh*. «ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers». В: Scientific Computing. Под ред. R. S. Stepleman. Т. 1. IMACS Transactions on Scientific Computation. North-Holland, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1983, с. 55-64.
  14. *E. Hairer, S. P. Nørsett и G. Wanner*. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Т. 8. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, с. 528.

**Буров Дмитрий Анатольевич**. Инженер-исследователь ИСА ФИЦ ИУ РАН. Окончил в 2013 г. МГУ. Количество печатных работ: 4. Область научных интересов: хаос, дифференциальные уравнения, численные методы. E-mail: sarretdim@ya.ru

**Рябков Олег Игоревич**. Научный сотрудник ИСА ФИЦ ИУ РАН. К.ф.-м.н. Окончил в 2009 г. МГУ. Количество печатных работ: 8. Область научных интересов: нелинейная динамика, хаос. E-mail: oleg.ryabkov.87@gmail.com