О природе хаотической динамики в автономных системах обыкновенных дифференциальных уравнений*

Н.А. Магницкий, Н.Б. Побуринная

Аннотация. В работе доказано, что система обыкновенных дифференциальных уравнений с одной устойчивой особой точкой обладает универсальным бифуркационным сценарием перехода к хаосу в соответствии с теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого как и все другие нелинейные системы дифференциальных уравнений. Показано, что наличие хаотической динамики в нелинейной системе не определяется ни количеством ее особых точек, ни их устойчивостью, ни наличием в системе гомоклинических или гетероклинических контуров, а для анализа такой динамики бессмысленно применять вычисление положительного показателя Ляпунова и доказывать существование подковы Смейла.

Ключевые слова: *динамические системы, хаос, ФШМ-сценарий, сингулярный аттрактор.*

1. Введение

Хорошо известно, что хаотическая динамика присуща практически всем нелинейным системам дифференциальных уравнений, имеющим нерегулярные аттракторы, отличные от устойчивых особых точек, предельных циклов и торов. Однако многие годы отсутствовало ясное понимание того, что из себя представляют нерегулярные аттракторы и как они образуются. В связи с этим в литературе можно было найти более двадцати различных определений нерегулярных аттракторов: странные, стохастические, хаотические, гиперболические, квазиаттракторы, аттракторы типа Лоренца,Ресслера, Чуа, Шильникова, Чена, Спротта и многие другие. Считалось, что имеются различия между аттракторами автономных и неавтономных систем, систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, и что хаос в диссипативных системах существенно отличается от хаоса в консервативных и гамильтоновых системах. Существовало также мнение, что нерегулярные аттракторы вообще не могут быть описаны траекторным подходом, то есть нелинейными системами дифференциальных уравнений. И только уже в XX веке было доказано и на многочисленных примерах убедительно продемонстрировано, что существует один универсальный бифуркационный сценарий перехода к хаосу во всех без исключения системах нелинейных дифференциальных уравнений: автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом (см., например, [1-2]). Это сценарий Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, начинающийся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода цикла или тора и продолжающийся субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского и гомоклиническим (или гетероклиническим) каскадом бифуркаций Магницкого. Все рождающиеся в ходе реализации сценария нерегулярные аттракторы являются исключительно сингулярными аттракторами, то есть непериодическими ограниченными траекториями в конечномерном или бесконечномерном фазовом пространстве, в любой окрестности которых содержится бесконечное число неустойчивых периодических траекторий.

Однако в последние годы опять появились работы, в которых авторы, не понимая существа происходящих процессов, пишут о якобы открытых ими новых скрытых аттракторах в нелинейных системах дифференциальных уравнений. К таким работам относятся работы [3–4], авторы которых с удивлением констатируют существование хаотической динамики в системе обыкновенных дифференциальных уравнений с одной устойчивой особой точкой и пытаются объяснить этот феномен наличием в системе подковы Смейла. Целью настоящей статьи является показать, что хаос в системе, рассмотренной в работах [3-4], также порождается каскадом бифуркаций по сценарию ФШМ.

* Работа выполнена при поддержке программы III.3 ОНИТ РАН, № 4.

2. Переход к хаосу в системе с одной устойчивой особой точкой

В работе [3] была рассмотрена трехмерная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = yz + 0.006,$$
$$\dot{y} = x^2 - y, \qquad (1)$$
$$\dot{z} = 1 - 4x.$$

Эта система имеет единственную устойчивую особую точку (0.25,0.0625,-0.096) типа устойчивый фокус, так как матрица Якоби в особой точке имеет собственные значения (-0.96069,-0.01966 ± 0.50975i), где $i^2 = -1$. Система (1) не имеет ни седло-фокусов, ни седло-узлов и, следовательно, не имеет гомоклинических или гетероклинических контуров, но имеет ярко выраженную хаотическую динамику (см. в [3] и ниже). В работе [4] предпринята попытка обосновать хаос в системе (1) наличием в ней подковы Смейла. Покажем, что переход к хаосу в системе (1) на самом деле происходит в полном соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. Для этого нужно только правильно определить бифуркационный параметр, при изменении которого в системе реализуется каскад бифуркаций по сценарию ФШМ.

В качестве бифуркационного параметра выберем параметр b и рассмотрим однопараметрическую систему:

$$\dot{x} = yz + 0.006,$$
$$\dot{y} = x^2 - by, \qquad (2)$$
$$\dot{z} = 1 - 4x.$$

При b=1 система (2) очевидно переходит в систему (1). Устойчивые циклы системы (2) будем искать с помощью численного моделирования системы методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Система (2) остается диссипативной при всех значениях параметра $b > 0$. При значениях $b < 0.39$ в системе нет никаких аттракторов, кроме особой точки типа устойчивый фокус. При значении $b \approx 0.39$ в системе появляется устойчивый цикл в результате седло-узловой бифуркации рождения устойчивого и неустойчивого циклов. Этот цикл существует до значения $b \approx 0.8$, когда в системе рождается устойчивый цикл удвоенного периода. Далее следует каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума: цикл периода 2 наблюдается до значения $b \approx 0.9$, цикл периода 4 – до значения $b = 0.926$, порождая устойчивый цикл периода 8, и т.д.

При дальнейшем увеличении значений параметра b были найдены циклы периодов 7 (при $b = 0.956$), 5 (при $b = 0.965$) и 3 (при $b = 0.982$), что свидетельствует о реализации в системе (2) полного субгармонического каскада бифуркаций Шарковского. При $b = 1$ в системе (2) и, следовательно, в системе (1) возникает хаос, соответствующий области сценария ФШМ, лежащей за каскадом Шарковского.

Гомоклинический каскад в системе не обнаружен, ввиду отсутствия в ней неустойчивых особых точек и гомоклинических сепаратрисных контуров. Циклы периодов 8 ($b = 0.927$), 3 ($b = 0.982$) и сингулярный аттрактор ($b = 1$) системы (2), являющийся также сингулярным аттрактором системы (1), изображены на рис.1.

3. Заключение

В работе проведено численное исследование трехмерной автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений, имеющей единственную устойчивую особую точку. Показано, что процесс перехода к хаосу в системе происходит в соответствии с механизмом развития хаоса по сценарию Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. То

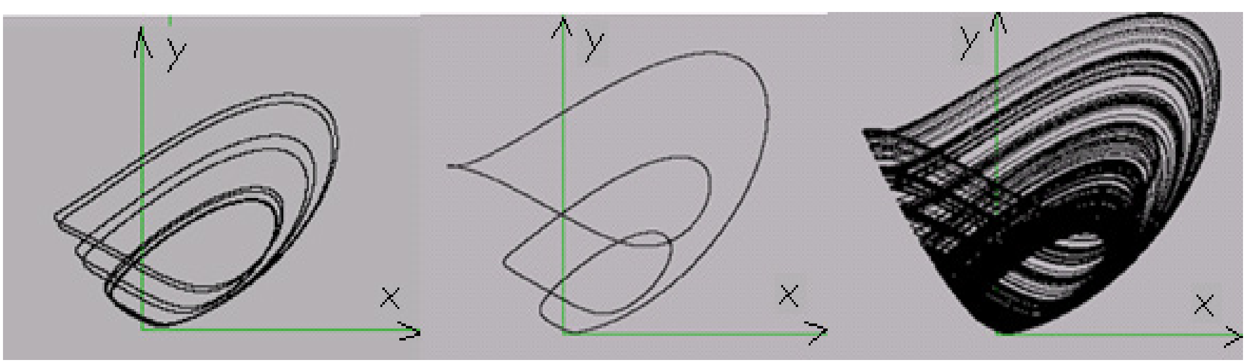

Рис. 1. Проекции на плоскость (x,y) циклов периодов 8 (***b***=0.927), 3 (***b***=0.982) и сингулярного аттрактора (***b***=1) системы (2)

есть все нерегулярные аттракторы системы, и, следовательно, аттрактор системы (1), рассмотренной в статьях [3, 4], являются сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ [1, 2].

Сделаем несколько общих замечаний по поводу хаотической динамики нелинейных систем дифференциальных уравнений, так как сама публикация работ [3, 4] и многих им подобных свидетельствует о полном непонимании механизмов перехода к хаосу в нелинейных системах дифференциальных уравнений. В работах одного из авторов настоящей статьи (см., например, [1, 2] и др.) на многочисленных примерах убедительно показано, что существует один универсальный бифуркационный сценарий перехода к хаосу во всех без исключения системах нелинейных дифференциальных уравнений: автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом. И это – сценарий Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, начинающийся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода цикла или тора и продолжающийся субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского рождения циклов (торов) любого периода вплоть до цикла (тора) периода три, и затем гомоклиническим (или гетероклиническим) каскадом бифуркаций Магницкого рождения гомоклинических (гетероклинических) циклов (торов), стягивающихся к гомоклиническому (гетероклиническому) контуру или соответствующей тороидальной структуре. Все рождающиеся в ходе реализации сценария нерегулярные аттракторы являются исключительно сингулярными аттракторами. Следовательно, не существует ни странных аттракторов, ни стохастических или хаотических аттракторов, ни гиперболических или квазиаттракторов, ни скрытых аттракторов, ни аттракторов типа Лоренца, Ресслера, Чуа, Шильникова, Чена, Спротта и многих других. Есть только сингулярные аттракторы, являющиеся непериодическими ограниченными траекториями в конечномерном или бесконечномерном фазовом пространстве, в любой окрестности которых содержится бесконечное число неустойчивых периодических траекторий. В любой системе может существовать бесконечное число различных сингулярных аттракторов, усложняющихся при изменении бифуркационного параметра в направлении ФШМ-каскада бифуркаций.

Таким образом, ни наличие или отсутствие в системе устойчивых или неустойчивых особых точек, ни наличие или отсутствие седло-узлов или седло-фокусов, а также гомоклинических или гетероклинических сепаратрисных контуров, не является критерием возникновения в системе хаотической динамики. Также не являются такими критериями ни положительность старшего показателя Ляпунова, ни доказательство наличия в системе подковы Смейла. Эффект положительности показателя Ляпунова является исключительно следствием ошибок вычислений, так как из-за наличия всюду плотного множества непериодических траекторий численное движение возможно только по всей области, занимаемой траекторией сингулярного аттрактора, а не по самой его траектории. Кроме того, показатель Ляпунова будет также положительным и при движении по устойчивой периодической траектории большого периода, находящейся в окрестности какого-либо сингулярного аттрактора. Наличие в системе подковы Смейла свидетельствует о сложной динамике решений, однако даже в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса, где по теореме Шильникова существует бесконечное число подков Смейла, динамика решений определяется не подковами, а значительно более сложным бесконечным множеством неустойчивых периодических решений, рожденных на всех стадиях всех трех каскадов бифуркаций ФШМ-сценария, гомоклинический каскад циклов которого заканчивается в пределе именно петлей сепаратрисы седло-фокуса.

Литература

1. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. - М.: Едиториал УРСС, 2011 - 320 С.
2. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations, chapter in monograph “Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications”. INTECH. 2012. Chapter 6. P. 133-174.
3. *Wang X., Chen G.R.* A chaotic system with only one stable equilibrium // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. No. 17. P.1264-1272.
4. *Huan S., Li Q., Yang X.-S.* Horseshoes in a chaotic system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2013. Vol. 23. No. 1, 1350002.

Магницкий Николай Александрович. Зав. лабораторией ИСА ФИЦ ИУ РАН. Д.ф-м.н., профессор. Окончил в 1974г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Количество печатных работ: более 200. Область научных интересов: нелинейные динамические системы, дифференциальные уравнения, математическая физика. E-mail: nikmagn@gmail.com

Побуринная Наталья Богдановна. Бакалавр МГУ им. М.В. Ломоносова. Окончила в 2016 г. МГУ. Количество печатных работ: 1. Область научных интересов: хаотическая динамика. E-mail: poburinnayan@gmail.com