

# Динамика макросистем

## Критерии робастной устойчивости нестационарных систем с интервальными ограничениями

М.В. Морозов

**Аннотация.** Рассматриваются линейные нестационарные системы управления с интервальными ограничениями на элементы матрицы системы. На основе метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида установлены достаточные условия робастной устойчивости таких систем. В случае периодических интервальных ограничений найден вид систем, для которых полученные условия являются не только достаточными, но также и необходимыми.

**Ключевые слова:** система управления, робастная устойчивость, интервальные ограничения, вектор-функция Ляпунова.

### 1. Введение

Важное место в теории управления занимает проблема робастной устойчивости, которая связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры. Решению проблемы робастной устойчивости для линейных систем управления с параметрической неопределенностью посвящено большое количество работ (см., например, библиографию в [1-8]). В этих работах рассматривались, как правило, лишь стационарные множества, задающие ограничения на параметры системы. Обычно для матрицы линейной части системы в качестве такого множества рассматривается некоторый выпуклый многогранник в пространстве матриц заданной размерности. В частном случае так называемых интервальных матриц [2,3,7] таким многогранником является многомерный параллелепипед, грани которого параллельны соответствующим координатным плоскостям в матричном пространстве. Относительно характеристик нелинейных элементов обычно предполагается, что они принадлежат заданным секторам (с фиксированными границами), как в случае классической задачи об абсолютной устойчивости.

Однако, как отмечалось в [9,10], ряд практических задач, в частности, задача об абсолютной

устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами приводит к необходимости рассмотрения таких множеств изменения параметров системы, границы которых изменяются по заданным периодическим законам.

В [11,12] с использованием метода функций Ляпунова были установлены общие критерии (необходимые и достаточные условия) робастной устойчивости для линейных нестационарных непрерывных и дискретных систем управления с периодически изменяющимися ограничениями на элементы матрицы системы. Эти критерии сформулированы в форме условий существования положительно определенной функции Ляпунова из некоторого функционального (в непрерывном случае) или параметрического (в дискретном случае) класса, строго убывающей на решениях рассматриваемой системы.

В общем случае эффективная проверка выполнения этих условий затруднительна, поскольку в конструкции соответствующей функции Ляпунова присутствуют параметры, значения которых априори неизвестны. В связи с этим несомненный теоретический и практический интерес представляет задача получения конструктивно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости для заданного класса

систем. Для линейных нестационарных систем управления со стационарными интервальными ограничениями на элементы матрицы системы такие достаточные условия были получены в работах [13] (в непрерывном случае) и [14,15] (в дискретном случае).

В настоящей работе установлены достаточные условия робастной устойчивости для случая нестационарных интервальных ограничений. Для их получения используется метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида. Показано, что если интервальные ограничения являются периодическими, то в ряде случаев полученные достаточные условия робастной устойчивости оказываются одновременно и необходимыми. Принципиальными отличиями данной работы от работ [11, 12] являются рассмотрение иного класса систем, использование метода вектор-функций Ляпунова, и сведение задачи робастной устойчивости исходной совокупности систем к проверке асимптотической устойчивости одной конкретной системы.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается линейная нестационарная система, описываемая уравнением вида:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$  – произвольная матрица ( $a_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  – измеримые функции), которая на всяком конечном интервале полуоси  $[0, \infty]$  почти всюду удовлетворяет неравенствам:

$$\underline{A}(t) \leq A(t) \leq \overline{A}(t), \quad \underline{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \\ \overline{A}(t) = (\overline{a}_{ij}(t))_{i,j=1}^n. \quad (2)$$

Матричные неравенства в (2) понимаются поэлементно (всюду в дальнейшем неравенства между матрицами и векторами понимаются как поэлементные неравенства), т.е.

$$\underline{a}_{ij}(t) \leq a_{ij}(t) \leq \overline{a}_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n},$$

где  $\underline{a}_{ij}(t)$ ,  $\overline{a}_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , произвольные измеримые функции.

Предположим, что заданные ограниченные «крайние» матрицы  $\underline{A}(t)$  и  $\overline{A}(t)$  периодичны с периодом  $T > 0$ , т.е. выполнены условия:

$$\underline{A}(t+T) \equiv \underline{A}(t), \quad \overline{A}(t+T) \equiv \overline{A}(t). \quad (3)$$

Таким образом, в силу (2) и (3), рассматривается не одна фиксированная система (1), а совокупность линейных нестационарных систем (1) с периодическими интервальными ограничениями

(2). Будем в дальнейшем называть систему (1) интервальной нестационарной системой.

Как и в [11], будем называть интервальную нестационарную систему (1) робастно устойчивой относительно ограничений (2), если ее нулевое решение  $x(t) \equiv 0$  асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе матрицы  $A(t)$ , удовлетворяющей неравенствам (2).

Задача состоит в получении эффективно проверяемых достаточных условий робастной устойчивости нестационарной интервальной системы (1). Основой для получения этих условий является метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова специального вида [16].

## 3. Основные результаты

Введем в рассмотрение периодическую матрицу

$$\widehat{A} = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad \widehat{A}(t+T) = \widehat{A}(t), \\ \widehat{a}_{ii}(t) = \overline{a}_{ii}(t), \quad \widehat{a}_{ij}(t) = \max\{|\underline{a}_{ij}(t)|, |\overline{a}_{ij}(t)|\}, \\ i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Сопоставим матрице  $\widehat{A}(t)$  периодическую систему

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x. \quad (4)$$

**Теорема 1.** *Интервальная нестационарная система (1) робастно устойчива относительно ограничений (2), если система (4) асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Как известно [17], необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (4) является неравенство:

$$\rho(\Phi(T)) < 1, \quad (5)$$

где через  $\rho(\Phi(T))$  обозначен спектральный радиус матрицы монодромии  $\Phi(T)$  системы (4).

В общем случае аналитическая проверка выполнения условия (5) затруднительна в связи со сложностью построения матрицы монодромии  $\Phi(T)$  в явном виде. В таких случаях можно использовать численно-аналитические методы [17], связанные с численным построением матрицы  $\Phi(T)$ .

Можно выделить один частный случай, когда достаточные условия робастной устойчивости системы (1) с интервальными ограничениями (2) периодического вида (3), устанавливаемые Теоремой 1, оказываются одновременно и необходимыми.

**Теорема 2.** Пусть выполнены неравенства

$$|\underline{a}_{ij}(t)| \leq \overline{a}_{ij}(t) \text{ при всех } i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Тогда для робастной устойчивости системы (1) относительно интервальных ограничений (2) периодического вида (3) необходимо и достаточно, чтобы система (4) была асимптотически устойчива по Ляпунову.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

#### 4. Примеры

**Пример 1.** В работе [18] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам вида (1) с ограничениями (2). Это и следящие системы, элементы которых работают на переменном токе, и системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией, и задачи, возникающие при исследовании вибрации фрезерных станков. В частности показано [18], что периодические ограничения вида (2), (3) возникают, например, при рассмотрении нестационарной системы (1), в которой элементы  $a_{ij}(t)$  матрицы  $A(t)$  представимы в виде:

$$a_{ij}(t) = u_{ij}(t)f_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где  $f_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , – заданные периодические функции периода  $T$ , а  $u_{ij}(t)$  – произвольные измеримые функции, удовлетворяющие стационарным ограничениям:

$$\alpha_{ij}(t) \leq a_{ij} \leq \beta_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае периодические функции  $\underline{a}_{ij}(t)$  и  $\overline{a}_{ij}(t)$  в (2) определяют равенствами:

$$\underline{a}_{ij}(t) = 0.5(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(t) - |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}|,$$

$$\overline{a}_{ij}(t) = 0.5\{(\alpha_{ij} + \beta_{ij})f_{ij}(t) + |\alpha_{ij} - \beta_{ij}||f_{ij}|\}.$$

Заметим, что неравенства (6) заведомо выполнены в случае, когда элементы матрицы  $A(t)$  представимы в виде (7) и в неравенствах (8)  $\alpha_{ij} = -1$ ,  $\beta_{ij}(t) = 1$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Приведем примеры, иллюстрирующие Теорему 1 и 2.

**Пример 2.** Рассмотрим систему (1), (2), в которой

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 3 & -1 \\ -1 & \sin t - 5 \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & \sin t / 2 \\ \cos t / 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\underline{A}(t)$  и  $\overline{A}(t)$  имеют период  $2\pi$ , а матрица  $\hat{A}(t)$  вид:

$$\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет два вещественных отрицательных корня и система (4) является асимптотически устойчивой. Следовательно, по Теореме 1 система (1) с ограничениями (2) является робастно устойчивой.

**Пример 3.** Рассмотрим систему (1), (2), в которой

$$\underline{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cos t + 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае  $\hat{A}(t) = \overline{A}(t)$  и можно применить Теорему 2. Матрицант и матрица монодромии системы (4) имеют вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin + 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 6\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  и условие (5) не выполнено. Следовательно, по Теореме 2 система (1) не является робастно устойчивой относительно ограничений (2).

#### Приложение

**Доказательство Теоремы 1.** Используем метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова [16]. Рассмотрим вектор-функцию Ляпунова вида

$$V(x) = |x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^{\hat{O}} \quad (\text{П.1})$$

с компонентами

$$V_i(x) = |x_i|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (\text{П.2})$$

В (П.1) и далее под абсолютной величиной  $|x|$  вектора  $x \in R^n$  понимается  $n$ -мерный вектор с компонентами  $|x_1|, \dots, |x_n|$ .

Правой верхней производной от  $V(x)$  относительно системы (1) будем называть вектор-функцию [13]

$$D^+V(x(t)) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{V(x(t+h)) - V(x(t))}{h}.$$

Вычислим компоненты вектор-функции:  
 $D^+V(x(t)) = (D^+V_1(x(t)), \dots, D^+V_n(x(t)))^T$ :

$$D^+V_i(x(t)) = \text{sign } x_i(t+0) \dot{x}_i(t) = a_{ii}(t)|x_i(t)| + \left\{ \text{sign } x_i(t+0) \right\} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(t)x_j(t) \leq a_{ii}(t)|x_i(t)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}(t)| |x_j(t)|.$$

Отсюда с учетом неравенства (2) и определения матрицы  $\bar{A}(t)$  вытекает неравенство:

$$D^+V_i(x(t)) \leq \bar{a}_{ii}(t)|x_i(t)| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{a}_{ij}(t)|x_j(t)|. \quad (\text{П.3})$$

Следовательно, в силу (П.2) и (П.3) справедливо неравенство:

$$D^+V_i(x(t)) \leq \bar{a}_{ii}(t)V_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{a}_{ij}(t)V_j(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (\text{П.4})$$

Система скалярных неравенств (П.4) эквивалентна матричному неравенству:

$$D^+V(x(t)) \leq \bar{A}(t)V(x(t)). \quad (\text{П.5})$$

В [16, в параграфе 1 главы 2] рассматривается система:

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad x \in R^n. \quad (\text{П.6})$$

Вещественные функции  $X^i(t, x^1, \dots, x^n)$  определены и непрерывны в области  $\Gamma = \{(t, x) : \|x\| < \eta, t \geq 0\}$  ( $\eta = \text{const} > 0$  или  $\eta = +\infty$ ) и имеют в ней непрерывные частные производные по  $x^1, \dots, x^n$ , которые ограничены в каждой замкнутой области  $\Gamma_0 = \{(t, x) \in \Gamma : \|x\| \leq \eta_0, t \geq 0\}$ ,  $0 < \eta_0 < \eta$ . Это обеспечивает существование, единственность и нелокальную продолжимость решений системы, непрерывную зависимость их от начальных условий (и времени  $t$ ) в области  $\Gamma$ . При  $\eta = +\infty$  предполагается продолжимость решений для всех  $t \in I = [0, +\infty)$ . Рассматривается также вектор-функция  $\gamma(t, x) = (\gamma^1(t, x), \dots, \gamma^k(t, x))^T$ ,  $\gamma : \Gamma \rightarrow R^k$ . Для нее вводится норма  $\|\gamma(t, x)\| = |\gamma^1(t, x)| + \dots + |\gamma^k(t, x)|$  и производная по времени в силу системы (П.6)

$$\dot{\gamma}(t, x) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1(t, x) \\ \dots \\ \dot{\gamma}^k(t, x) \end{pmatrix} = \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma(t, x)}{\partial x} X(t, x),$$

где  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$  – вектор-столбец, а  $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$  –  $k \times n$ -матрица с элементами  $\frac{\partial \gamma^s}{\partial x^i}$ .

Непрерывно дифференцируемая функция  $\gamma : \Gamma \rightarrow R^k$  и вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y \in R^k, \quad (\text{П.7})$$

называются вектор-функцией сравнения и системой сравнения для системы (П.6), если для них выполнены условия:

$$\dot{\gamma}(t, x) \leq f(t, \gamma(t, x)) \quad \text{при } (t, x) \in \Gamma,$$

$$f \in W(\Omega), \quad f(t, 0) = 0,$$

$$\Omega = \{(t, y) \in I \times R^k : \|y\| < K_1, t \geq 0\},$$

$$K_1 = +\infty \text{ или}$$

$$\sup_{(t, x) \in \Gamma} \|\gamma(t, x)\| = K < K_1 < +\infty,$$

$$(t, x) \in \Gamma$$

где  $W(\Omega)$  – класс функций, определенных, непрерывных в открытой области  $\Omega \subseteq I \times R^k$  и квазимонотонных в следующем смысле: каждая вещественная функция  $f^s$  является неубывающей по совокупности внедиагональных переменных  $(y^1, \dots, y^{s-1}, y^{s+1}, \dots, y^k)$  в области  $\Omega$ , т.е. такой, что  $f^s(t, y_1) \leq f^s(t, y_2)$  для любых

$$(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega : y_1^1 \leq y_2^1, \dots, y_1^{s-1} \leq y_2^{s-1},$$

$$y_1^s = y_2^s, y_1^{s+1} \leq y_2^{s+1}, \dots, y_1^k \leq y_2^k.$$

Для вектор-функции  $\gamma(t, x)$  и целого числа  $l (1 \leq l \leq k)$  на  $\Gamma$  определена скалярная непрерывная функция

$$\bar{\gamma}(t, x) = \max_{s = \overline{1, l}} \gamma^s(t, x).$$

Вектор-функция сравнения  $\gamma$  для (П.6) называется вектор-функцией Ляпунова для уравнения (П.6), если она обладает одним из следующих свойств:

$$\dot{\gamma}(t, x) > 0 \quad \text{при } \|x\| > 0, t \geq 0,$$

$$\dot{\gamma}(t, x) \text{ – определено положительно,}$$

$$\dot{\gamma}(t, x) \text{ допускает бесконечно большой низший предел,}$$

$$\bar{\gamma}(t, x) \geq \alpha \|x\|^\xi \quad (\alpha > 0, \xi \geq 1),$$

$$\gamma^s(t, x) \text{ допускает бесконечно малый высший предел,}$$

$$\|\gamma(t, x)\| \leq \beta \|x\|^\xi \quad (\beta > 0, \xi \geq 1).$$

В работе [16, глава 2, параграф 4] доказана следующая теорема.

Для асимптотической устойчивости невозмущенного движения  $x = 0$  системы (П.6) достаточно, чтобы для некоторых  $\Gamma_0, k$  и  $l$  ( $1 \leq l \leq k$ ) существовала вектор-функция Ляпунова, обладающая в  $\Gamma_0$  следующими свойствами:

1. Функция  $\gamma(t, x)$  определена положительно.

2. Нулевое решение системы сравнения (П.7) асимптотически устойчиво относительно  $y^1, \dots, y^l$  при условии  $y_0 = \gamma(t_0, x_0)$ , при  $(t_0, x_0) \in \Gamma_0$ .

Так как  $\bar{v}(x) = \max_{1 \leq i \leq n} V_i(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  как скалярная функция определено-поло-

жительна в  $R^n$ , то в соответствии с приведенными выше определениями, с учетом неравенства (П.5) вектор-функция  $V(x)$  и система (4) являются соответственно вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для всякой конкретной системы вида (1) при любом выборе матрицы  $A(t)$ , удовлетворяющей неравенствам (2). Поэтому из приведенной выше теоремы следует, что условие асимптотической устойчивости системы сравнения (4) обеспечивает асимптотическую устойчивость всякой системы из интервального множества (1),(2), а значит, и робастную устойчивость системы (1) относительно интервальных ограничений (2). Теорема 1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** В доказательстве нуждается лишь необходимость, так как достаточность следует из Теоремы 1. Для доказательства необходимости заметим, что из определения матрицы  $\bar{A}(t)$  и условия (6), вытекает неравенство  $\bar{A}(t) = \bar{A}(t)$ . Поэтому в рассматриваемом случае матрица  $\Phi(T)$  будет матрицей монодромии для периодической системы

$$\dot{x} = \bar{A}(t)x. \quad (\text{П.8})$$

Асимптотическая устойчивость системы (П.8) является необходимым условием для робастной устойчивости интервальной системы (1),(2). Следовательно, в условиях Теоремы 2 асимптотическая устойчивость системы (4) является не только достаточным, но и необходимым условием робастной устойчивости системы (1)-(2). Теорема 2 доказана.

## Литература

1. Dorato P., Yedavalli R.K. Recent Advances in Robust Control. - New York: IEEE Press, 1990.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных ин-

тервальных динамических систем (состояние проблемы). I, II // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1991. - № 1. - С. 3-23; - № 2. - С. 3-30.

3. Ackermann J. Robust Control: Systems With Uncertain Physical Parameters. New York: Springer-Verlag. 1993.
4. Barmish B.R. New Tools for Robustness of Linear Systems. New York: MacMillan. 1995.
5. Sanchez-Pena R., Sznaier M. Robust systems: theory and applications. New York, Wiley, 1998.
6. Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Robust stability and performance with fixed-order controllers // Automatica. 1999. V. 35. P. 1717-1724.
7. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.
8. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления и некоторые подходы к их решению // АИТ. - 2005. - № 5. - С. 7-46.
9. Молчанов А.П., Морозов М.В. Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АИТ. - 1992. - № 2. - С. 49-59.
10. Молчанов А.П., Морозов М.В. Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // АИТ. - 1992. - № 10. - С. 37-45.
11. Молчанов А.П., Морозов М.В. Робастная устойчивость линейных нестационарных систем с периодическими параметрами // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления / Тез. докл. Международного семинара. Самара: Июль 1994, - С. 32.
12. Молчанов А.П., Морозов М.В. Робастная абсолютная устойчивость нестационарных дискретных систем управления с периодическими ограничениями // АИТ. - 1995. - № 10. - С. 93-100.
13. Xu Daoui. Simple Criteria for Stability of Interval Matrices // Internat. Journ. Contr. - 1985. - V. 41. - N 1. - P. 289-295.
14. Bauer P.H., Premaratne K. Robust Stability of Time-Variant Interval Matrices // Proc. 29th Conference on Decision and Control. Honolulu, HI. - Dec. 1990. - P. 334-335.
15. Mota F, Kaszkurewicz and Bhaya A. Robust Stabilization of Time-Varying Discrete Interval Systems // Proc. 31st Conference on Decision and Control. Tucson, AZ. - Dec. 1992. - P. 341-346.
16. Абдуллин Р.З. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. Воронова А.А., Матросова В.М. - М.: Наука, 1987.

17. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные и дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. - М.: Наука, 1978.
18. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. - М.: Наука, 1978.

**Морозов Михаил Владимирович.** С. н. с. ИПУ РАН. К. ф.-м. н. Окончил в 1982 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Количество печатных работ: 45. Область научных интересов: теория управления, теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости. E-mail: miguel@ipu.ru