

О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами

М.В. Морозов

Аннотация. Установлены некоторые свойства решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами.

Ключевые слова: периодические по времени дифференциальные включения, асимптотически устойчивые множества.

Введение

Изучение систем управления привело к использованию теории дифференциальных включений.

Рассмотрим систему управления:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, $\dot{x} = dx/dt$ – вектор скорости, t – время, а $u = u(t)$ – управление, на которое наложено ограничение

$$u(t) \in U, \quad (2)$$

U – произвольное множество, $U \in R^n$.

При довольно общих предположениях система управления (1) с ограничениями (2) эквивалентна дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (3)$$

где $F(t, x)$ – некоторое заданное многозначное отображение, т.е. функция, которая каждому моменту времени t и каждой фазовой точке $x \in R^n$ ставит в соответствие множество $F(t, x) \in R^n$.

В форме дифференциального включения (3) можно представить не только систему управления (1), (2), но также различные классы других объектов. Это и системы управления с переменной областью управления $\dot{x} = f(t, x, u)$, $u \in U(t, x)$, и системы дифференциальных неравенств, и неявные дифференциальные уравнения, и системы управления с фазовыми ограничениями, и дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.

Теория дифференциальных включений хорошо развита, см., например, обзоры [1,2]. Однако работы, связанные с периодическими по времени дифференциальными включениями (например, [3-5]), в основном посвящены вопросам существования

периодических решений. Немного работ посвящено исследованию свойств решений периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [6,7] для периодического по времени дифференциального включения строится дифференциальное включение первого приближения. Доказано, что если дифференциальное включение первого приближения слабо асимптотически (или экспоненциально) устойчиво, то и рассматриваемое периодическое дифференциальное включение слабо асимптотически (или экспоненциально) устойчиво. Показано, что предложенный метод можно использовать для исследования свойств слабой асимптотической (или экспоненциальной) устойчивости включений эквивалентных системам управления. В [8] доказано, что периодические дифференциальные включения обладают рядом свойств, которые были установлены для автономных дифференциальных включений. Данная работа является продолжением [8].

1. Постановка задачи

В работах [9-13] решались задачи об абсолютной или робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами. В [9] установлено, что рассматриваемая система управления с периодическими параметрами эквивалентна периодическому по времени дифференциальному включению. В [13], в качестве обобщения, рассматривались линейные нестационарные системы управления, описываемые уравнениями вида:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) A_k(t) x, \quad (4)$$

где $x = (x_i)_{i=1}^m \in R^n$ – n -мерный вектор состояния системы, $A_k(t) = (a_{ij}^k(t))_{i,j=1}^n$ – заданные непре-

рывные периодические матрицы периода $T > 0$, $A_k(t+T) = A_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, а ограниченные измеримые функции $\lambda_k(t)$, $k = \overline{1, m}$ удовлетворяют при всех $t \geq 0$ условиям

$$\lambda_k(t) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) = 1. \quad (5)$$

Система (4), (5) эквивалентна периодическому дифференциальному включению

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in F(t, x), \quad F(t, x) \equiv F(t+T, x), \\ F(t, x) &= \\ &= \{y : y = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) A_k(t), \lambda_k(t) \geq 0, \sum_{k=1}^m \lambda_k(t) = 1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений системы (4), (5) и включения (6) при одинаковых начальных условиях. В [14] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам вида (4), (5). Это и следующие системы, элементы которых работают на переменном токе, и системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией, и задачи, возникающие при исследовании вибраций фрезерных станков.

Рассмотрим периодическое дифференциальное включение общего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in F(t, x), \quad F(t, x) \equiv F(t+T, x), \\ t &\geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad T = \text{const}, \quad T > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Везде далее будем предполагать, что многозначная функция $F(t, x)$ в некоторой области $G = \{0 \leq t \leq T, x \in G_R, G_R = \{x_0 : \|x_0\| \leq R\}\}$ удовлетворяет основным условиям [15, с. 60], т.е. при всех $(t, x) \in G$ множество $F(t, x) \subset \mathbb{R}^n$ является непустым, ограниченным, замкнутым, выпуклым и функция $F(t, x)$ полунепрерывна сверху [15, с. 52] по (t, x) .

Решением включения (7) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке I , которая почти всюду на I удовлетворяет (7). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t, x)$ при исследовании свойств решений $x(t, t_0, x_0)$ включения (7) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0, T]$. Из определения решения и периодичности по t правой части включения (7) вытекают следующие два свойства. Если функция $x(t)$ является решением включения (7) (при $\alpha < t < \beta$), то:

- 1) функция $x(t+kT)$ ($\alpha - kT < t < \beta - kT$, k – любое целое число) также является решением включения (7) и эти решения имеют одну и ту же траекторию;
- 2) для любых $t_0 \in [0, T]$, t_1, t таких, что $t_0 \leq t_1 \leq t$, выполнено равенство $x(t, t_1, x(t_1)) = x(t, t_0, x_0)$, где $x(t_1) = x(t_1, t_0, x_0)$.

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ – точки (векторы) с координатами a_i, b_i , $i = \overline{1, n}$. $B \subset \mathbb{R}^n$ – множество. Под расстоянием ρ между точками или точкой и множеством будем понимать следующие неотрицательные числа:

$$\rho(a, b) = \|a - b\| = \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(a, b).$$

Известно, что функция $\varphi(x) = \rho(x, B)$ равномерно непрерывна, для любых точек $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ $|\rho(x, B) - \rho(y, B)| \leq \rho(x, y)$. Замкнутой ε -окрестностью M^ε множества M будем называть множество таких точек x , что $\rho(x, M) \leq \varepsilon$. Пусть $M \subset G$.

Определение 1. Множество M называется асимптотически устойчивым для включения (7), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого x_0 , для которого $\rho(x_0, M) \leq \delta(\varepsilon)$, существует решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Все такие решения продолжаются на интервал $t_0 \leq t < \infty$ и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \rho(x(t), M) &\leq \varepsilon \text{ при } t_0 \leq t < \infty, \\ \rho(x(t), M) &\rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Задача состоит в исследовании свойств решений включения (7) при наличии асимптотически устойчивого множества M .

2. Основные результаты

Теорема 1. Если ограниченное множество M асимптотически устойчиво для включения (7), то существует такое $\delta_0 > 0$, что для любых $t_0 \in [0, T]$ и $x_0 \in M^{\delta_0}$ все решения $x(t, t_0, x_0)$ включения (7) удовлетворяют условию

$$\rho(x(t), M) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (8)$$

равномерно по (t_0, x_0) .

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Теорема 1 является обобщением Леммы 2, доказанной для автономных дифференциальных включений [16].

Ниже будем рассматривать однородные по $x \in \mathbb{R}^n$ дифференциальные включения. Если B – множество в $\mathbb{R}^n$, c – число, то cB обозначает множество точек вида cx для всех $x \in B$.

Определение 2. Многозначная функция $F(t, x)$ называется однородной (первой степени) по x , если $F(t, cx) \equiv cF(t, x)$ для всех $c > 0$.

Определение 3. Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (F(t, cx) \equiv cF(t, x), \quad c > 0) \quad (9)$$

называется однородным по x .

Однородное дифференциальное включение (9) не меняется при замене $x = cx_1$ с любым $c > 0$. Это значит, что если функция $x = \varphi(t)$ – решение включения (9), то для любого $c > 0$ функция $x = c\varphi(t)$ тоже является решением.

Рассмотрим периодическое по t и однородное по x дифференциальное включение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in F(t, x), \quad (t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n), \\ F(t, x) &\equiv F(t+T, x), \quad (T = \text{const}, \quad T > 0), \\ F(t, cx) &\equiv cF(t, x), \quad (c > 0). \end{aligned} \quad (10)$$

В силу однородности включения (10) по x справедливо

Следствие теоремы 1. Если ограниченное множество M асимптотически устойчиво для включения (10), то все решения $x(t, t_0, x(t_0))$ включения (10) с начальными условиями $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in G_R$ (где R – любое положительное число) удовлетворяют условию (8) равномерно по (t_0, x_0) .

Для включения (10) имеет место

Теорема 2. Выполнение условия (8) для всех решений включения (10) необходимо и достаточно для того, чтобы множество M было асимптотически устойчивым равномерно по (t_0, x_0) ($t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in G_R$, R – любое положительное число).

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие теоремы 2. Асимптотическая устойчивость множества M для включения (10) эквивалентна его равномерной по (t_0, x_0) $\{t_0 \in [0, T], x_0 \in G_R, R - \text{любое положительное число}\}$ асимптотической устойчивости.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Докажем вначале, что существует такое $\delta_0 > 0$, при котором все решения включения (7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in M^{\delta_0}$ удовлетворяют условию (8) равномерно при всяком фиксированном $t_0 \in [0, T]$.

Допустим противное, тогда для любого $\delta > 0$, существуют такие $\eta(\delta) > 0$, $t_0 \in [0, T]$, последовательность решений $x_k(t)$ включения (7), последовательности чисел $t_k \geq t_0 + kT$ и векторов x_0^k , $k = 1, 2, \dots$, что $x_0^k \in M^\delta$, $\rho(x_k(t_k, t_0, x_0^k), M) > \eta(\delta) > 0$, $k = 1, 2, \dots$; $t_k \rightarrow \infty$.

Так как M асимптотически устойчиво, то для любого $\varepsilon > 0$ можно взять δ столь малым, что для всех решений с $x(t_0) \in M^\delta$ будут выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \rho(x(t, t_0, x(t_0)), M) &\leq \varepsilon \quad (t_0 \leq t < \infty), \\ \rho(x(t), M) &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Следовательно, существует такое число $\mu > 0$, что для всех решений включения (7) с $x(t_0) \in M^\mu$ справедливо неравенство:

$$\rho(x(t, t_0, x(t_0)), M) \leq \eta(\delta) \quad (t_0 \leq t < \infty). \quad (\text{П.2})$$

Покажем, что для всех $x_k(t, t_0, x_0^k)$ выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} x_0^k &\in M^\delta \\ \mu &\leq \rho(x_k(t_0 + mT, t_0, x_0^k), M) \leq \varepsilon, \\ m &= \overline{1, k}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Действительно, в противном случае существовали бы такие $\tilde{k}$ и $m(\tilde{k})$ ($1 \leq m(\tilde{k}) \leq \tilde{k}$), что $\rho(x_{\tilde{k}}(t_0 + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}}), M) < \mu$, $x_0^{\tilde{k}} \in M^\delta$. Тогда для решения включения (7) $z(t) = z(t, t_0, x_{\tilde{k}}(t_0 + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}})) = x_{\tilde{k}}(t + m(\tilde{k})T, t_0 + m(\tilde{k})T, x_{\tilde{k}}(t_0 + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}})) = x_{\tilde{k}}(t + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}})$ ($t_0 \leq t < \infty$) выполнялись бы соотношения:

$$\begin{aligned} \rho(z(t_0), M) &= \\ &= \rho(x_{\tilde{k}}(t_0 + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}}), M) < \mu, \\ \rho(z(t_{\tilde{k}} - m(\tilde{k})T, t_0, x_{\tilde{k}}(t_0 + m(\tilde{k})T, t_0, x_0^{\tilde{k}})), M) &= \\ &= \rho(x_{\tilde{k}}(t_{\tilde{k}}, t_0, x_0^{\tilde{k}}), M) > \eta(\varepsilon), \end{aligned}$$

что противоречит (П.2).

Из последовательности отрезков решений $x_k(t)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $t_0 \leq t \leq t_1$, а из нее – новую подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $t_0 \leq t \leq t_2$ и т.д. Поскольку $F(t, x)$ удовлетворяет основным условиям предельная функция $x(t)$ является решением включения (7) [15, с. 60], для которого в силу (П.3) $x(t_0) \in M^\delta$, $\mu \leq \rho(x(t_0 + kT, t_0, x(t_0)), M) \leq \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots$, что противоречит (П.1). Таким образом, справедливо утверждение, сформулированное в начале доказательства теоремы.

Докажем теперь утверждение теоремы 1. Пусть оно не выполнено, тогда для любого $\delta > 0$ существуют такие числа $\eta(\delta) > 0$, последовательность решений $x_k(t)$ включения (7), последовательности чисел t_0^k ($t_0^k \in [0, T]$), $t_k \geq t_0^k + kT$ и векторов x_0^k , $k = 1, 2, \dots$, что

$$\begin{aligned} x_0^k &\in M^\delta \\ \rho(x_k(t_k, t_0^k, x_0^k), M) &> \eta(\delta) > 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad t_k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Без ограничения общности можно считать, что $\delta < \delta_0$, где δ_0 – число, при котором выполняется доказанное выше утверждение. Поскольку $x_0^k \in M^\delta$, $t_0^k \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$, из последовательности чисел $k = 1, 2, \dots$ можно выделить такую подпоследовательность $\{k'\}$ ($k' \rightarrow \infty$), что одновременно существуют пределы $\lim_{k' \rightarrow \infty} x_0^{k'} = x'_0$ ($x'_0 \in M^\delta$), $\lim_{k' \rightarrow \infty} t_0^{k'} = t'_0$ ($t'_0 \in [0, T]$). Для упрощения записи будем считать, что $t_0^k = t'_0$, $x_0^k = x'_0$, $k' = k = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_0^k = x_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_0^k = t_0. \quad (\text{П.5})$$

Пусть $\delta_0 - \rho(x_0, M) = \beta > 0$. Из (П.5) следует, что существует такое K_1 , что для всех $k \geq K_1$

$$\rho(x_0^k, x_0) < \beta/2. \quad (\text{П.6})$$

Так как все решения включения (7) в любой замкнутой ограниченной области, принадлежащей области G равномерно непрерывны [15, с. 61], то они будут равномерно непрерывны и в области $\{x \in M^{\delta_0}, t \in [0, T]\}$. Поэтому для точки t_0 существует такая окрестность $S_\gamma(t_0) = \{t : |t - t_0| \leq \gamma/2, t \in [0, T]\}$, $S_\gamma(t_0) = [a, b]$ (при $t_0 = 0$: $a = t_0$, при $t_0 = T$: $b = t_0$), что для всех решений $x(t, \tilde{t}_0, x(\tilde{t}_0))$ включения (7) при $\tilde{t}_0 \in [a, b]$ и $x(\tilde{t}_0) \in M^\delta$

$$\rho(x(b, \tilde{t}_0, x(\tilde{t}_0)), x(\tilde{t}_0)) < \beta/2. \quad (\text{П.7})$$

Тогда для решений $x_k(t)$ при $k \geq K_1$, учитывая равномерную непрерывность функции $\varphi(x) = \rho(x, M)$, (П.6) и (П.7), имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \rho(x_0^k, M) - \rho(x_0, M) &= |\rho(x_0^k, M) - \rho(x_0, M)| \leq \\ &\leq \rho(x_0^k, x_0) < \beta/2 \\ \rho(x_k(b, t_0^k, x_0^k), M) - \rho(x_0^k, M) &\leq \\ &\leq |\rho(x_k(b, t_0^k, x_0^k), M) - \rho(x_0^k, M)| \leq \\ &\leq \rho(x_k(b, t_0^k, x_0^k), x_0^k) < \beta/2. \end{aligned}$$

Складывая последние два неравенства получим:

$$\rho(x_k(b, t_0^k, x_0^k), M) < \beta + \rho(x_0, M) = \delta_0, \quad k \geq K_1. \quad (\text{П.8})$$

Отсюда и из (П.4), (П.5) следует, что существует K_2 такое, что для всех $k \geq K_2$ будут одновременно выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} t_0^k \leq b \leq T, \quad \rho(x_k(b, t_0^k, x_0^k), M) &< \delta_0, \\ \rho(x_k(t_k, t_0^k, x_0^k), M) &> \eta(\delta). \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

От последовательности решений $x_k(t)$ включения (7), удовлетворяющей неравенствам (П.4), учитывая (П.9), при $k \geq K_2$ перейдем к по-

следовательности решений $y_k(t) = x_k(t, t_0^k, x_0^k)$, определяемой соотношениями:

$$y_k(b) = y_0^k = x_k(b), \quad \rho(y_0^k, M) < \delta_0,$$

$$\rho(y_k(t_k, b, y_0^k), M) > \eta(\delta), \quad t_k \rightarrow \infty. \quad (\text{П.10})$$

Существование последовательности $y_k(t)$, $k = K_2, K_2 + 1, K_2 + 2, \dots$ ($b \leq t < \infty, 0 < b \leq T$), удовлетворяющей условиям (П.10), противоречит доказанному выше равномерному по x_0 (при $x_0 \in M^{\delta_0}$, $t_0 \in [0, T]$) выполнению соотношения (8) для всех решений включения (7). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость следует из определения асимптотической устойчивости множества M для включения (10) [15, с.115] в силу свойства однородности.

Достаточность. Предположим, что M не является устойчивым равномерно по $t_0 \in [0, T]$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность решений $x_k(t)$ включения (10) и последовательности чисел $t_0^k \in [0, T]$, δ_k , $k = 1, 2, \dots$, что

$$\begin{aligned} \rho(x_k(t_0^k), M) &= \delta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \\ \rho(x_k(t_k, t_0^k, x_k(t_0^k)), M) &\geq \varepsilon, \quad (t_k > t_0^k). \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Пусть a_k – последняя из точек отрезка $[t_0^k, t_k]$, в которой $\rho(x_k(a_k), M) = \delta_k$, а b_k – первая после a_k точка, в которой $\rho(x_k(b_k), M) = \varepsilon$. При $t \in [a_k, b_k]$ выполнены неравенства $\delta_k \leq \rho(x_k(t), M) \leq \varepsilon$.

В силу однородности включения (10) функция $y_k(t) = \delta_k^{-1} x_k(t)$ – решение, для которого выполнены соотношения:

$$\rho(y_k(a_k), M) = 1,$$

$$\rho(y_k(b_k), M) = \delta_k^{-1} \varepsilon \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$1 \leq \rho(y_k(t), M) \leq \delta_k^{-1} \varepsilon \quad (a_k \leq t \leq b_k). \quad (\text{П.12})$$

Из (П.11) следует, что $\rho(x_k(t_0^k), M) \leq \delta_0$, $k = 1, 2, \dots$. Кроме того, $t_0^k \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots$. Все решения $x(t, t_0, x_0)$ ($t_0 \in [0, T]$, $\|x_0\| \leq \delta_0$) включения (10) существуют при $t_0 \leq t < \infty$, так как по условию они удовлетворяют соотношению (8). Следовательно, по теореме 3 [15, с. 62] множество этих решений на любом отрезке $[t_0, L]$ компактно в метрике $C[t_0, L]$, а значит, ограничено. Поэтому $b_k \rightarrow \infty$, $(b_k - a_k) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Тогда существует такое K , что для всех $k \geq K$ $b_k - a_k > T$. Пусть $m_k T$ – первое после a_k число, кратное T , такое, что $m_k T > a_k$. Тогда из (П.12) следует, что $\gamma_k = \rho(y_k(m_k T), M) \geq 1$, $k \geq K$.

Применяя еще раз теорему 3 из [15, с.62], получим неравенства

$$1 \leq \gamma_k \leq Q < \infty, \quad (\text{П.13})$$

справедливые при $k \geq K$. Однако, переобозначив последовательность $y_k(t)$, можно считать, что все сказанное о ней выше (и, в частности, неравенство (П.13) выполнено при $k = 1, 2, \dots$

В силу периодичности включения (10) функция $\tilde{y}_k(t) = y_k(t + m_k T)$ будет решением этого включения. Учитывая соотношения (П.12), получим:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{y}_k(0), M) &= \gamma_k, \\ \rho(\tilde{y}_k(\tilde{b}_k), M) &= \delta_k^{-1} \varepsilon \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty), \\ 1 &\leq \rho(\tilde{y}_k(t), M) \leq \delta_k^{-1} \varepsilon \\ (0 \leq t \leq \tilde{b}_k), \quad \tilde{b}_k &= (b_k - m_k T) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

От решений $\tilde{y}_k(t)$, используя свойство однородности включения (10), перейдем к решениям $z_k(t) = \gamma_k^{-1} \tilde{y}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). Из (П.13), (П.14) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} \rho(z_k(0), M) &= 1, \\ &= \gamma_k^{-1} \delta_k^{-1} \varepsilon \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty), \\ Q^{-1} &\leq \rho(z_k(t), M) \leq \\ &\leq \gamma_k^{-1} \delta_k^{-1} \varepsilon \quad (0 \leq t \leq \tilde{b}_k). \end{aligned}$$

Из последовательности $\{z_k(t)\}$ выделим подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $0 \leq t \leq 1$, а из нее – подпоследовательность равномерно сходящуюся при $0 \leq t \leq 2$, и т.д. Предельная функция $z(t)$ – решение включения (10) [15, с.60], $Q^{-1} \leq \rho(z(t), M)$ при $0 \leq t < \infty$, а это противоречит тому, что все решения включения (10) удовлетворяют условию (8).

Следовательно, исходное предположение неверно и множество M устойчиво равномерно по $t_0 \in [0, T]$ для включения (10). Так как все решения включения (10) удовлетворяют условию (8), то M асимптотически устойчиво. Тогда, согласно следствию теоремы 1, множество M будет асимптотически устойчиво равномерно по $(t_0, x_0) \{t_0 \in [0, T], \|x_0\| \leq R, R - \text{любое положительное число}\}$. Теорема 2 доказана.

Литература

- Благодатских В. И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор). – In. Summer school on ordinary differential equations. Brno. 1975. С. 29-67.
- Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. P.: Univ. Paris IX Dauphine, 1983.
- Поволоцкий А. И., Ганго Е. А. Существование периодических решений дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Республиканский сборник трудов «Математический анализ и теория функций». Вып. 8. М.: МОПИ им. Н. К. Крупской. 1977. С. 106-113.
- Ирисов А. Е., Тонкова В. С., Тонков Е. Л. Периодические решения дифференциального включения // Сборник трудов «Нелинейные колебания и теория управления». Вып. 2. Ижевск: Удмуртский государственный университет. 1978. С.3-15.
- Jack W. Macki, Paolo Nistri and Pietro Zecca The existence of periodic solutions to non-autonomous differential inclusions // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1988. Vol.104. No. 3. P.840-844.
- Smirnov G. V. Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential inclusions // Nonlinear differential equations and applications. 1995. V. 2, Number 4, P.445-461.
- Gama R., Smirnov G. V. Weak exponential stability for time-periodic differential inclusions via first approximation averaging. // Set-valued and variational analysis. 2013. Vol. 21. Issue 2. P. 191-200
- Морозов М. В. О свойствах периодических дифференциальных включений // Диф. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 612-617.
- Молчанов А. П., Морозов М. В. Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 2. С. 49-59.
- Молчанов А.П., Морозов М.В. Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 10. С. 37-45..
- Морозов М.В. Критерии робастной абсолютной устойчивости дискретных систем управления с периодическими ограничениями // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64. Вып. 2. С. 13-18.
- Молчанов А.П., Морозов М.В. Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими интервальными ограничениями // АиТ. 1997. № 1. С. 100 - 107.
- Молчанов А. П., Морозов М. В. Алгоритмы анализа робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями // АиТ. 1997. № 5. С. 100–111.
- Шильман С.В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука. 1978.
- Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.
- Филиппов А.Ф. Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными и многозначными правыми частями // Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 1018-1027.

Морозов Михаил Владимирович. Старший научный сотрудник ИПУ РАН. Окончил в 1982 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 46. Область научных интересов: теория управления, теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости, E-mail: miguel@ipu.ru

On properties of the solutions of time-periodic differential inclusions with asymptotically stable sets

M. V. Morozov

Abstract. Some properties of the solutions of time-periodic differential inclusions with asymptotically stable sets were established.

Key words: *time-periodic differential inclusions, asymptotically stable sets*

References

1. *Blagodatskih V. I.* Some results on the theory of differential inclusions (review). In: Summer school on ordinary differential equations. Brno. 1975. PP. 29-67.
2. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. P.: Univ. Paris IX Dauphine, 1983.
3. *Povolotskiy A. I., Gango E. A.* Existence of periodic solutions of differential equations with multivalued right-hand side. Republican proceedings 'Mathematic analysis and the theory of functions'. Issue No. 8, Moscow, MOPI by the name of Krupskaya N. K. 1977. PP. 106-113.
4. *Irisov A. E., Tonkova V. S., Tonkov E. L.* Periodic solutions of differential inclusion. Proceedings 'Nonlinear oscillations and control theory'. Issue No. 2. Izhevsk. Udmurt state university. 1978. PP.3-15.
5. *Jack W. Macki, Paolo Nistri and Pietro Zecca* The existence of periodic solutions to non-autonomous differential inclusions // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1988. Vol.104. No. 3. PP.840-844.
6. *Smirnov G. V.* Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential inclusions // Nonlinear differential equations and applications. 1995. V. 2, Number 4, PP.445-461.
7. *Gama R., Smirnov G. V.* Weak exponential stability for time-periodic differential inclusions via first approximation averaging. // Set-valued and variational analysis. 2013. Vol. 21. Issue 2. PP. 191-200
8. *Morozov M. V.* Properties of solutions of periodic differential inclusions // Differential equations, Vol. 36, No. 5, 2000, PP. 677-682.
9. *Molchanov A. P., Morozov M. V.* Absolute stability of nonlinear nonstationary control systems with periodic linear sections // Automation and Remote Control, Vol. 53, No. 2, Part 1, PP. 189-198, 1992.
10. *Molchanov A. P., Morozov M. V.* Lyapunov functions for nonlinear nonstationary discrete control systems with a periodic linear part // Automation and Remote Control, Vol. 53, No. 10, Part 1, PP. 1505-1513, 1992.
11. *Morozov M. V.* Criteria of robust absolute stability for discrete control systems with periodic constraints // Proceedings of Institute for Systems Analysis, 2014, Vol. 64, No. 2, PP. 13-18.
12. *Molchanov A. P., Morozov M. V.* Sufficient conditions for robust stability of linear nonstationary control systems with periodic interval constraints // Automation and Remote Control, Vol. 58, No. 1, Part 2, 1997, PP. 82-87.
13. *Molchanov A. P., Morozov M. V.* Algorithms for robust stability analysis of linear time-varying control systems with periodic constraints // Automation and Remote Control, Vol. 58, No. 5, Part 2, 1997, PP. 795-804.
14. *Shi'lman S. V.* Generating functions method in the theory of dynamic systems, Moscow, Nauka, 1978.
15. *Filippov A. F.* Differential equations with discontinuous right-hand side, Moscow, Nauka, 1985.
16. *Filippov A. F.* Stability for differential equations with discontinuous and multivalued right-hand sides // Differents. Uravn., 1979. Vol. 15. No 6. PP. 1018-1027.

Morozov Mikhail Vladimirovich. Senior researcher of the Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences Candidate of science Background: Moscow state university by the name of M. V. Lomonosov, 1982. Publications: 46. Scientific interests: theory of control, theory of differential equations, theory of stability. E-mail: miguel@ipu.ru