

# Математические модели социально-экономических процессов

## Экономико-математическое исследование процесса производства в машиностроении

В.И. Водолазский

**Аннотация.** Экономико-математическое исследование процесса производства проводится в терминах категорий классической политической экономии. В основу экономического анализа производства положен основной экономический закон – закон стоимости, закон минимальных затрат общественно необходимого рабочего времени. Анализируются затраты производительного труда, овеществленного в товаре, и подготовительно-заключительного труда, оказывающего услуги не в качестве вещи, а в качестве деятельности организации производительного труда. Анализируется изменение стоимости овеществленного труда в течение промежутка времени между производством и потреблением товара. Предложена система уравнений в качестве микроэкономической модели процесса производства.

**Ключевые слова:** закон стоимости, оптимальная партия изделий, норма штучного времени, норма подготовительно-заключительного времени, серийное производство, микроэкономическая модель.

### Введение

Современное промышленное производство является сложной социально-технической системой. Социальную сторону производства составляют производственные отношения людей. Эти отношения изучает политическая экономия. Техническую сторону производства изучают специальные технические дисциплины, такие как технология штамповки, технология резания металлов, технология машиностроения и т.д. Каждая из этих дисциплин изучает технологию производства конкретных изделий. Общим, что объединяет различные производства, являются затраты человеческого труда. Естественной мерой затрат труда является рабочее время. «Но рабочее время изменяется с каждым изменением производительной силы труда. Производительная сила труда определяется разнообразными обстоятельствами, меж-

ду прочим средней степенью искусства рабочего, уровнем развития науки и степенью ее технологического применения, общественной комбинацией производственного процесса, размерами и эффективностью средств производства, природными условиями» [1, с.48].

При анализе производственного процесса и затрат рабочего времени существует два подхода, во-первых, – статистический анализ данных об обрабатываемых изделиях [2-4], и, во-вторых, – анализ технических особенностей наладки и функционирования производственного оборудования [5, 6]. Здесь два принципиально различных подхода: в первом случае анализируется продукт труда, а во втором – средство труда. Уместно напомнить, что «Экономические эпохи различаются не тем, что производится, а тем, как производится, какими средствами труда» [1, с.191]. Следовательно, иссле-

дование процесса труда необходимо начинать не с анализа продуктов труда, а с анализа орудий труда, с анализа развития их производительной силы.

Орудие труда является для рабочего проводником его воздействия на предмет труда. Воздействуя на предмет труда различными орудиями, человек добивается качественных изменений предмета труда и превращения его в продукт труда определенной стоимости. Воздействуя на предмет труда, «он в то же время изменяет свою собственную природу» [1, с.184].

Задачей статьи является экономико-математическое исследование процесса труда в условиях производства и вывод системы уравнений серийного производства. Такова основная задача и цель настоящей работы.

## 1. Уравнение оптимума

Исследуя товарное производство, К. Маркс назвал труд субстанцией стоимости, а естественной мерой труда считал в первую очередь его продолжительность. «Общественно необходимое рабочее время есть то рабочее время, которое требуется для изготовления какой-либо потребительской стоимости при наличии общественно нормальных условиях производства и при среднем в данном обществе уровне умелости и интенсивности труда» [1, с.47]. Это общественно необходимое рабочее время производства изделия в нормальных условиях и при средней умелости и интенсивности труда определяется технической трудоемкостью. В машиностроении техническая трудоемкость определяет время, затраченное основными рабочими на производство партии изделий, и определяется [7, с.30] по формуле

$$T = n\tau + t_z \quad (1)$$

где  $T$  – техническая трудоемкость партии  $n$  изделий;

$n$  – размер партии изделий,

$\tau = \sum \tau_i$  – норма штучного времени обработки изделия по всем  $i$  операциям;

$t_z = \sum t_{zj}$  – норма подготовительно-заключительного времени по всем  $j$  операциям.

Присутствие в формуле (1) двух слагаемых является признаком качественного различия штучного и подготовительно-заключительного времени. Штучное время  $\tau$  определяет производительные затраты рабочего времени при использовании общественно необходимых орудий труда. Производительное время овеществляется в каждом изделии в качестве меновой стоимости товара. Производительные затраты рабочего времени зависят от умелости рабочего и совершенства используемых

орудий труда и поэтому являются показателем развития производительной силы труда.

Подготовительно-заключительное время  $t_z$  обусловлено знакомством рабочего с чертежом, заготовкой инструмента, приспособлений, наладкой станка и т.п. Этот труд по отношению к штучному «...оказывает услуги не в качестве вещи, а в качестве деятельности» [8, с.413] и выступает как стоимость организации самой возможности производства изделий.

Затраты производительного и подготовительного рабочего времени присущи любому способу производственной деятельности, где имеет место производство не только предметов потребления, но и орудий труда. Уже для нашего предка, для которого охота была еще единственной сферой производственной деятельности, затрата времени для производства стрелы была подготовительной по сравнению с затратой времени на охоту. И ему было безразлично, какую часть времени он затратил на изготовление стрелы, потому что, «если дикарь изготавливает лук, стрелы, каменные молотки, топоры, корзины и т.п., – то он совершенно отчетливо сознает, что израсходованное на это время он употребил не на производство предметов потребления» [9, с.439].

Величина затрат общественно необходимого рабочего времени обусловлена в каждый исторический период уровнем развития производительных сил, т.е. общественно необходимым, производительное и подготовительно-заключительное время являются экономическими категориями, а в математическом отношении функциями времени  $t$ . Поэтому формулу (1) перепишем в виде

$$T(t) = n\tau(t) + t_z(t). \quad (2)$$

Таким образом, формула (2) выражает в различных экономических условиях ( $t$ ) количественные соотношения между затратами общественно необходимого  $T(t)$ , производительного  $T_p(t)$  и подготовительного труда  $t_z(t)$  на производство партии  $n$  изделий. В целом, формула (2) определяет вновь созданную товарную стоимость во время ( $t$ ).

Товарная стоимость создается затратами производительного труда и в этом отношении выражение

$$T_p(t) = n\tau(t) \quad (3)$$

определяет овеществленную стоимость во вновь созданной товарной стоимости.

Учитывая (3), формулу (2) перепишем в виде

$$T_p(t) = T(t) - t_z(t), \quad (4)$$

которая отражает овеществленную стоимость, созданную производительным трудом.

Производство и потребление товара, как правило, разделено во времени, а товарная стоимость в момент потребления может существенным образом отличаться от стоимости продукта труда во время производства. Такое различие стоимости может быть результатом пересмотра норм штучного времени, так как «пересмотр действующих норм проводится по мере разработки и внедрения организационно технических мероприятий, направленных на дальнейшее повышение производительности труда» [7, с.61].

Если на изготовление  $n$  изделий в момент времени  $t$  было затрачено только производительное время (3), а в течение времени  $\Delta t$  они оставались невостребованными, то в момент потребления  $(t+\Delta t)$  фактически будет востребована стоимость, которая оценивается по трудоемкости в момент потребления  $(t+\Delta t)$ , а не в момент производства  $(t)$ . Вследствие роста производительности труда  $p'(t)$ , которая определяется плановым пересмотром (уменьшением) норм штучного времени  $\tau(t)$  фактически будет востребована несколько меньшая стоимость

$$T_p(t+\Delta t) = n\tau(t) - p' n\tau(t)\Delta t, \quad (5)$$

в которой производительные затраты  $n\tau(t)$  выступают как овеществленная стоимость  $T(t+\Delta t)$  в момент потребления  $(t+\Delta t)$  предыдущей партии товара, а величина  $-p'n\tau(t)\Delta t$  как плата за замораживание овеществленного труда на период  $\Delta t$ , как плата, аналогичная величине  $t_z(t+\Delta t)$ , за повторную переналадку оборудования. Учитывая это замечание выражение (5) перепишем в виде

$$T_p(t+\Delta t) = T(t+\Delta t) - p' n\tau(t)\Delta t. \quad (6)$$

Такое допущение имеет место при серийном производстве, когда периодически повторяется запуск изделий партиями. В этом случае, если закончилась предыдущая партия изделий, то в момент  $(t+\Delta t)$  будет произведена новая партия и в соответствии с (4) создана товарная стоимость

$$T_p(t+\Delta t) = T(t+\Delta t) - t_z(t+\Delta t). \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) выражают одну и ту же стоимость во время  $(t+\Delta t)$ . Приравняв правые части выражений (6) и (7) получим уравнение экономически целесообразного повторного запуска партии изделий:

$$t_z(t+\Delta t) = p' n\tau(t)\Delta t. \quad (8)$$

Экономическое содержание уравнения (8) состоит в том, что, если потери производительного труда на партию изделий за период потребления предыдущей партии сравнимы с затратами труда

на повторный запуск новой партии, то повторный запуск производства изделий экономически оправдан. В этом случае потери производительного времени от замораживания овеществленного труда будут равны подготовительно-заключительному времени повторного запуска производства изделий. Уравнение (8) будем называть *уравнением оптимума*.

Из уравнения (8) получаем в явном виде формулу для вычисления *оптимального размера партии изделий*

$$n = \frac{1}{p' \Delta t} \cdot \frac{t_z(t+\Delta t)}{\tau(t)}. \quad (9)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой в практике вычисления оптимального размера партии, необходимо определить длительность  $\Delta t$  потребления предыдущей партии.

## 2. Интегральное уравнение оптимума

Исходной формулой для анализа затрат производительного рабочего времени является формула (5), которую с учетом (3) перепишем в виде

$$T_p(t+\Delta t) = T_p(t) - p' T_p(t) \Delta t, \quad (10)$$

или

$$\frac{T_p(t+\Delta t) - T_p(t)}{\Delta t} = -p' T_p(t). \quad (11)$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом

$$\frac{dT_p(t)}{dt} = -p' T_p(t). \quad (12)$$

Решение этого уравнения [10, с.243] с точностью до *const* является функция

$$T_p(t) = T_p(0) \times \exp(-p' t), \quad (13)$$

которая дает количественную оценку уменьшения затрат производительного рабочего времени в течение промежутка времени  $t$  при данном темпе роста  $p'$  производительности общественного труда. Разницу затрат производительного времени  $T_p(t)$  за промежуток времени  $t$  от замораживания овеществленного труда вычислим используя значения функции (13) для  $t = 0$  и  $t' = t$

$$\begin{aligned} \Delta T_p(t) &= T_p(0) - T_p(t) = T_p(0) - T_p(0) \times \exp(-p' t) = \\ &= T_p(0) \times (1 - \exp(-p' t)). \end{aligned} \quad (14)$$

Экономический смысл этих математических преобразований состоит в том, что мы получили аналитическую формулу уменьшения затрат производительного труда в зависимости от темпов роста производительности общественного труда и длительности промежутка времени между про-

извоздством и потреблением товара. При серийном производстве, когда периодически повторяется запуск производства изделий естественную убыль стоимости  $\Delta T_p(t)$  в выражении (14) можно приравнять к издержкам повторного запуска производства изделий в текущий момент времени. В этом случае уравнение равнозначности потерь от замораживания овеществленного труда и от повторного запуска изделий получим по аналогии с (8) в виде

$$t_z(t) = T_p(0)(1 - \exp(-p' t)). \quad (15)$$

Уравнение (15) функционально объединяет издержки повторного запуска производства партии изделий с издержками от естественной убыли меновой стоимости изделий в течение промежутка времени  $t$ . Уравнение (15) является интегральной формой (8) и выражает условие, при котором достигаются минимальные потери производительного рабочего времени при повторном запуске партии изделий в производство. Уравнение (15) будем называть *интегральным уравнением оптимума*. Экономическое содержание этого уравнения следующее: оно показывает, на сколь длительное время  $t$  экономически допустимо замораживание овеществленного труда  $T_p$  при данных темпах  $p'$  роста производительности труда, если сама возможность функционирования производительного труда в течении  $T_p$  часов стоит затрат  $t_z(t)$ .

Теперь необходимо обсудить, насколько правомерно дифференцирование и интегрирование функции затрат производительного рабочего времени  $T_p(t)$ . Если рассматривать конкретную выборку изделий станочного производства, то вполне вероятно, что за время их производства вплоть до морального износа оборудования штучное время не будет пересмотрено. Но если взять в рассмотрение всю номенклатуру изделий станочного цеха крупного машиностроительного завода, перечень которых насчитывает тысячи наименований, то процесс пересмотра норм штучного времени приобретет плановый характер, т.е. в математическом отношении станет непрерывной и дифференцируемой функцией времени. Если проанализировать незначительную номенклатуру изделий определенной технологической группы (например, токарной) и рассмотреть статистику за длительный промежуток времени (3-5лет) их производства, то также выявится закономерность непрерывного снижения нормы штучного времени.

Учитывая (2) и (3) для  $t=0$  и подставляя значение  $T_p(0) = \tau \nu(0)$  в уравнение (15), получаем в явном виде формулу для вычисления *оптимального размера партии* изделий

$$n = \frac{1}{1 - \exp(-p' t)} \cdot \frac{t_z(0)}{\tau(0)}. \quad (16)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой в практике вычисления оптимального размера партии, необходимо определить длительность  $t$  потребления предыдущей партии изделий.

### 3. Уравнение серийного процесса производства

При серийном производстве выпуск продукции производится сериями, а деталей – партиями. Партии деталей передаются участкам с определенным интервалом в последовательности выполнения технологических операций. Такую последовательность выпуска изделий можно характеризовать потоками производства и потребления деталей отдельными участками (цехами). Задача управления серийным производством состоит в синхронизации ритма этих потоков, т.е. поток потребления изделий должен быть во времени сбалансирован потоком их производства.

В условиях серийного производства суточное (сменное) потребление деталей представим в виде непрерывного потока событий с плотностью  $\nu$ . В общем случае плотность потока есть функция времени

$$\nu = \nu(\theta), \quad (17)$$

которая определяет количество деталей, потребляемых за единицу времени в момент  $\theta$ . Количество деталей, потребляемое в течение времени  $t$  будет

$$n(t) = \int_0^t \nu(\theta) d\theta. \quad (18)$$

Промежуток времени  $t$  в выражении (18) означает длительность потребления предшествующей партии деталей, размер которой определяется выражением (16) при производстве изделий оптимальными партиями. Приравнивая правые части формул (16) и (18) получим уравнение баланса производства и потребления при серийном производстве

$$\frac{1}{1 - \exp(-p' t)} \cdot \frac{t_z(0)}{\tau(0)} = \int_0^t \nu(\theta) d\theta. \quad (19)$$

Уравнение (19) функционально объединяет такие важнейшие параметры производства, как суточная потребность  $\nu(\theta)$  в изделиях, норма штучного времени  $\tau$ , затраты  $t_z$  на повторный запуск деталей, периодичность  $t$  технологического цикла при данных темпах роста производительности труда  $p'$ . Поэтому это уравнение будем называть *уравнением серийного процесса производства*.

В практике производства приходится решать обратную задачу: устанавливается директивно длительность  $t$  технологического цикла (период повторяемости запуска изделий) и требуется так организовать производство (провести технологическую подготовку производства с затратами  $t_z$ ), чтобы в течение всего срока  $t$  удовлетворялась потребность (18) в изделиях при наименьших затратах труда (16). Эта задача сводится к решению уравнения процесса производства (19) при условии повторного запуска изделий в момент времени  $t$  оптимальными партиями (16), т. е. к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{1 - \exp(-p't)} \cdot \frac{t_z(0)}{\tau(0)} = \int_0^t v(\theta) d\theta, \\ n = \frac{1}{1 - \exp(-p't)} \cdot \frac{t_z(t)}{\tau(t)}. \end{cases} \quad (20)$$

Система уравнений (20) позволяет так организовать подготовку  $t_z(t)$  и спланировать производство деталей оптимальными партиями  $n$ , чтобы в течение времени  $t$  была бы обеспечена суточная (сменная) потребность  $v(\theta)$  деталями трудоемкостью  $\tau(t)$ . Поэтому уравнения (20) будем называть *системой уравнений организации серийного процесса производства*.

Система уравнений (20) содержит параметр  $-p'$ , с помощью которого мы характеризовали среднестатистическое уменьшение нормы штучного времени в нашей микроэкономической модели производства. В тоже время параметр  $p'$  характеризовал темпы роста производительных сил. В этом отношении параметр  $p'$  выступает как параметр макроэкономической модели развития производительных сил общества. Для применения системы уравнений (20) в практике решения прикладных задач необходимо найти метод измерения параметра  $p'$ .

### Заключение

При выводе системы уравнений рассматривались качественно различные величины, как по численному значению, так и по содержанию:  $\tau$  – штучное время, измеряемое, как правило, минутами,  $t_z$  – подготовительно-заключительное время, измеряемое десятками минут и часами,  $t$  – период повторного запуска изделий, измеряемый месяцами. Каждая из этих величин характеризует качественно различные затраты труда: минуты измеряют затраты сил и нервов живого труда станочника, часы характеризуют затраты подготовительно-за-

ключительного времени и труд наладчиков и инженеров. Период повторного запуска изделий, используемый совместно с параметром  $p'$  в качестве показателя экспоненты, отслеживает экономические и технологические изменения в производстве изделия, которые происходят в течение длительного времени и отражают определенные тенденции развития предприятия (отрасли).

Анализируя затраты общественно необходимого рабочего времени, мы получили микроэкономическую модель в виде системы уравнений серийного процесса производства. Задавая экономические характеристики изделия и оборудования, которые выражаются в норме штучного и подготовительно-заключительного рабочего времени, эта система уравнений может быть применена для определения оптимального размера партии изделий или для определения экономически целесообразных границ областей применения производственного оборудования определенной технологической группы. В результате решения этих задач получим численные значения таких важных параметров подготовки производства, как длительность технологического цикла и длительность опережения запуска, величину технологического задела и оптимальный коэффициент подготовительно-заключительного времени. Все эти показатели обладают внутренним единством, поскольку отражают экономическую сущность производства, математически выраженную системой уравнений.

Полученные уравнения характеризуют динамику функционирования производства предприятия в целом. Производство каждого конкретного изделия регулируется величиной экспоненциального параметра  $p'$  с производством всей совокупности комплектующих, наличием сырья, материалов и рабочей силы. Эта система уравнений выражает, что производство и применение техники определяется законом стоимости.

### Литература

1. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Т. 1, кн. 1. Процесс производства капитала. М.: Госполитиздат, 1963. 908 с.
2. Ходилин С.И., Гордон А.Л. «Новое в оперативном планировании на промышленных предприятиях». М.: Экономика, 1964
3. Васильев В.С., Этин А.О., Шумацкий Б.Л. Определение областей применения металлорежущих станков на основе статистического анализа данных об обрабатываемых деталях. М.: Вестник машиностроения, 1966. №7

4. *Иволгин А.И.* Определение экономической целесообразности применения универсальных станков. М.: Станки и инструмент, 1968. №1
5. *Либерман Е.Г., Звягинцев Ю.Е. и др.* «Организация и планирование на машиностроительных предприятиях». М.: Машиностроение, 1967
6. *Якобсон М.О., Шумяцкий Б.Л.* Определение границ областей применения станков токарной группы. М.: Станки и инструмент, 1967. №12
7. *Миллер Э.Э.* Техническое нормирование в машиностроении. Изд. 3-е. М.: Машиностроение. 1972. 248 с.
8. *Маркс К., Энгельс Ф.* Соч. 2-е изд. Т. 26. Ч. 1. М.: Госполитиздат, 1962.
9. *Маркс К.* Капитал. Т. 2. Критика политической экономии. Кн. 2. Процесс обращения капитала. М.: Госполитиздат, 1955. 530 с.
10. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. 615 с.

**Водолазский Вячеслав Иванович.** С.н.с. ВЦ ФИЦ ИУ РАН. К.т.н. Окончил в 1962 г. Томский государственный университет им. В.В. Куйбышева. Количество печатных работ: 62 (в т.ч. 1 монография). Область научных интересов: экономика, автоматизированные системы проектирования (САПР), программирование. E-mail: slavod135@yandex.ru

### Microeconomic model of process of production in mechanical engineering

*V.I. Vodolazsky*

**Abstract.** The economic-mathematical research of process of production is conducted in terms of categories of classical political economy. The basic economic law – the Law of Value, the law of the minimum expenses of socially necessary working hours is the basis for the economic analysis of production. Expenses of the productive work substantiated in goods and the preparatory and final work rendering services not as a thing, and as activity of the organization of productive work are analyzed. Change of cost of the substantiated work during a period between production and consumption of goods is analyzed. The system of the equations as microeconomic model of process of production is offered.

**Keywords:** Law of Value, optimum lot of products, norm of piece time, norm of preparatory and final time, mass production, microeconomic model.

### References

1. *Marx K.* Kapital. Die Kritik der politischen Ökonomie. T. 1, das Buch. 1. Der Prozess der Produktion des Kapitals. M: Gospolitizdat, 1963. 908 s.
2. *Khodilin S.I., Gordon A.L.* «Novoe v operativnom planirovanii na promyshlennykh predpriyatiyakh» [New in operational planning at the industrial enterprises]. М.: Экономика, 1964.
3. *Vasil'ev V.S., Etin A.O., Shumyatskiy B.L.* Opredelenie oblastey primeneniya metallorazhushchikh stankov na osnove statisticheskogo analiza dannykh ob obrabatyvaemykh detalyakh [Definition of ranges of application of metal-cutting machines on the basis of the statistical analysis of data on the processed details]. М.: Vestnik mashinostroeniya, 1966. №7.
4. *Ivolgin A.I.* Opredelenie ekonomicheskoy tselesobraznosti primeneniya universal'nykh stankov [Definition of economic feasibility of use of universal machines]. М.: Станки и инструмент, 1968. №1.
5. *Liberman E.G., Zvyagintsev Yu.E. i dr.* «Organizatsiya i planirovanie na mashinostroitel'nykh predpriyatiyakh» [Organization and planning at machine-building enterprises]. М.: Mashinostroenie, 1967.
6. *Yakobson M.O., Shumyatskiy B.L.* Opredelenie granits oblastey primeneniya stankov tokarnoy gruppy [Delimitation of ranges of application of machines of turning group]. М.: Станки и инструмент, 1967. №12.
7. *Miller E.E.* Tekhnicheskoe normirovanie v mashinostroenii. Izd. 3-e. [Technical rationing in mechanical engineering. Prod. the 3rd]. М.: Mashinostroenie. 1972. 248 s.
8. *Marx K, Engels F.* Sotsch. 2 Ausgabe. T. 26. Der Teil 1. M: Gospolitizdat, 1962.
9. *Marx K.* Kapital. T. 2. Die Kritik der politischen Ökonomie. Das Buch 2. Der Prozess der Anrede des Kapitals. M: Gospolitizdat, 1955. 530 s.
10. *Zel'dovich Ya.B., Myshkis A.D.* Elementy prikladnoy matematiki [Elements of applied mathematics]. М.: Nauka, 1965. 615 s.

**Vodolazsky Vyacheslav Ivanovich.** Senior research associate of Computer center of “Federal Research Center “Informatics and Managements” of the Russian Academy of Sciences” (CC FRC IM RAS), Moscow, Vavilov St., 44, kor.2. Candidate of Technical Sciences. In 1962 graduated from the Tomsk state university of V.V.Kuibyshev. Number of printing works: 62 (including 1 monograph). Area of scientific interests: economy, the automated systems of design (SAPR), programming. E-mail: slavod135@yandex.ru