

О математическом моделировании поведения сложных систем

Ю.И. Бродский¹

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе с позиций структурного метода рассматриваются общие проблемы математического моделирования. Что такое математическая модель и для чего она нужна? Обязательно ли она должна быть системой дифференциальных уравнений? Как моделировать поведение сложных систем? Что может дать для этого информатика?

Ключевые слова: сложные системы, математическое моделирование, структурализм, метод аналогий, информатика.

DOI: 10.14357/20790279180203

Введение

В ряде культур Востока известна притча о слоне и слепцах. Четверо слепых пытались узнать, что такое слон, путем его ощупывания, а затем делились впечатлениями. Один сказал, что слон – это что-то наподобие гибкой трубы, другой – что это колонна, третий – что это шершавая стена, и, наконец, последний – что слон – это что-то вроде веревки с кисточкой на конце. Существуют варианты притчи, где слепцов меньше или больше четырех, может меняться и то, чему уподобляются разные части слона: например, хобот вполне может быть змеей, нога может показаться деревом, бок может быть воспринят как бочка или забор, бивни – как копыта и т.д.

Притча хорошо иллюстрирует ситуацию, с которой начинается всякое моделирование. Чтобы приступить к изучению чего-то неизвестного, нужно уподобить его чему-то известному. Слово «модель» можно возвести к латинскому корню «modulus» – мера, мерило [4]; таким образом, чтобы понять неизвестное, можно попробовать измерить его известным, уподобляя ему.

Плодотворная аналогия выявляет и сохраняет некоторую структуру уподобляемого, как, например, в бурбаковских морфизмах [3], или функторах теории категорий [6].

В моделировании аналогии используются для отображения атрибутов предмета моделирования на множество характеристик модели. Иногда такое отображение очевидно, но чаще может быть оспорено с формальных позиций.

Для того чтобы уменьшить количество моделируемых атрибутов, можно либо факторизовать их по какому-либо отношению эквивалентности и

получить фактор-модель, либо разбить объект моделирования на взаимодействующие между собой подобъекты и затем строить из них синтез модели-комплекса – это «атомистическое» моделирование. Выбор аналогии для построения модели – в значительной мере искусство, а не наука.

1. Структурализм

В основе метода структурализма лежит выявление структуры как совокупности отношений на базисных множествах, которая сохраняется при некоторых их преобразованиях [5]. Поэтому внимание исследователя переносится с объектов базисных множеств и их свойств на отношения между этими объектами и определяемые ими общесистемные свойства.

Построить модель – значит задать связи между ее характеристиками так, чтобы они сохраняли закономерность связей атрибутов объекта моделирования. Лучшее, что можно сделать – это придумать такие соотношения между характеристиками модели, которые максимально уподобляли бы их изменения изменениям их прообразов – атрибутов моделируемого объекта.

Математика накопила запас структур, которыми можно связывать базисные множества. В качестве примеров можно начать с геометрической кинематики модели Птолемея, затем появились системы алгебраических уравнений, например, «у Маши и Пети пять яблок, у Пети на одно больше». Структура может быть задана таблицей, например, таблица Менделеева. Попытки обобщить и универсализировать различные математические структу-

ры привели к появлению понятий родов структур Н. Бурбаки [3], алгебраических моделей, категорий [6]. Нужно отметить, что все перечисленные выше структуры статичны. Некоторые авторы, например [5], на этом основании даже делают вывод, что недостатком структурализма как метода является его статичность. Придать динамичность статичной структуре можно, например, с помощью компьютерной программы, т.е. последовательного выполнения некоторого алгоритма. В модели Птолемея таким алгоритмом было равномерное движение по окружностям эпициклов и планет.

Особое место среди математических структур занимают дифференциальные уравнения.

2. Дифференциальные уравнения

В настоящее время дифференциальные уравнения являются основным инструментом построения математических моделей. Достоинства этого инструмента очевидны: во-первых, если в системе присутствует производная по времени, это сразу дает динамику и прогноз; во-вторых, к модели можно применить готовый аппарат, связанный с понятием корректности решения, что немаловажно. Действительно, если чего-то нет из существования решения, его единственности, непрерывной зависимости от начальных условий, устойчивости в каком-либо смысле, как можно доверять такой модели!?

Как придумать модель на основе дифференциальных уравнений? Вообще говоря, это тоже искусство, а не наука. Тем не менее существует (например, в физике) множество успешных математических моделей, основанных на дифференциальных уравнениях.

Продолжением достоинств дифференциальных уравнений как инструмента моделирования являются их недостатки, главный из которых – дифференциальные уравнения не слишком хорошо подходят для описания поведения. Если мы имеем корректную задачу – наша траектория единственна, непрерывно зависит от начальных условий и устойчива – и это не оставляет ей никаких поведенческих альтернатив.

Попытки преодолеть указанный недостаток известны. Можно вводить целевые функции в правые части дифференциальных уравнений. Нечто подобное предлагается и в позиционных дифференциальных играх. Но дифференциальные игры – весьма сложный математический объект. До конца удастся проанализировать лишь самые простейшие случаи, и даже в этих случаях может оказаться, что состояния равновесия игры очень сильно отличается от состояний равновесия системы ее дифференциальных ограничений с фиксированными управлениями.

3. Моделирование поведения

В работе [2] выделен класс систем, для которых возможно построение модели – некий аналог теорем существования решения для дифференциальных уравнений. Это класс замкнутых в каждой временной точке моделей, с кусочно-непрерывной и непрерывной слева траекторией. Замкнутость модели в точке означает способность по значениям ее внутренних и внешних переменных в этой точке детерминировано вычислить, есть ли в ней разрыв траектории первого рода, если есть – вычислить скачок, далее определить некоторый положительный интервал прогноза и вычислить непрерывную эволюцию траектории модели на нем. Непрерывность слева оговаривается для того, чтобы избежать ситуаций, подобных «мухе фон Неймана» [2] или «лампе Томсона» [7], когда нарушается обусловленность некоторых состояний системы их предысторией. Остальные компоненты традиционной корректности постановки задачи: единственность, непрерывная зависимость от начальных условий и устойчивость, – предлагается выяснять на построенной модели опытно, с помощью имитационных экспериментов.

В работах [1, 2] предложена сквозная технология описания, синтеза и программной реализации моделей сложных многокомпонентных систем. Основное понятие этой технологии – модель-компонент – представитель однопараметрического семейства родов структур в смысле Н. Бурбаки. В базисные множества моделей-компонент помимо характеристик модели входят также ее методы, вычисляющие скачки, непрерывную эволюцию траектории, а также события, связанные с окончанием интервалов прогноза. Динамику этим структурам обеспечивает универсальная программа выполнения моделей-компонент, способная организовать вычислительный процесс для любого представителя семейства и при этом ориентированная на параллельные и распределенные вычисления. Функционально модель-компонент аналогична операционной системе: она способна давать стандартные ответы на стандартные запросы внутренней и внешней среды.

Семейство моделей-компонент оказывается замкнутым относительно объединения конечного числа компонент в комплекс. Модель-комплекс также является представителем семейства моделей-компонент. Этот факт позволяет строить из моделей-компонент весьма сложные фрактальные конструкции, не опасаясь при этом вычислительной сложности таких конструкций. Организация вычислений при этом не меняется, более того, чем сложнее модель, тем больше вычислений может осуществляться параллельно.

Таким образом, для описания широкого класса систем, обладающих поведением, вместо традиционных дифференциальных уравнений предлагается новая структура, представляющая собой сочетание статичной бурбаковской структуры с придающей ей динамику несложной компьютерной программой, ориентированной на параллельность вычислений. Следует отметить, что частным случаем такой структуры (элементом базисного множества) может быть и любая система дифференциальных уравнений, что сохраняет преемственность с прежними методами моделирования.

Заключение

Гипотеза, лежащая в основе моделирования, утверждает, что атрибуты изучаемых явлений объединены неким постоянным законом, составляющим сущность изучаемого объекта и позволяющим объединить наблюдаемые явления в единый объект моделирования.

С помощью аналогий мы отображаем множество атрибутов объекта моделирования в множество характеристик модели. Вообще говоря, такое отображение не формализуемо, субъективно и легко может быть оспорено с формальных позиций, за исключением простейших случаев, когда характеристики очевидны и допускают непосредственное измерение.

На множестве характеристик модели, как на базисном множестве, мы строим модель, как математическую структуру. Построенная структура-модель отражает и представляет для нас сущность объекта моделирования. Верность этого отражения мы не можем гарантировать, даже если модель дает правильный прогноз на протяжении многих лет эксплуатации – совпадение прогноза с наблюдением есть лишь необходимое условие адекватности модели.

Модель строится исходя из имеющегося запаса математических структур.

Дифференциальные уравнения плохо подходят для моделирования систем с поведением, они слишком детерминированы, устойчивы и поэтому не дают поведенческих альтернатив.

В работах [1, 2] предложена универсальная структура и обоснована ее применимость для моделирования широкого класса объектов, обладающих поведением. Она была названа моделью-компонентой. Ее статическая часть принадлежит определенному семейству родов структур в смысле Н. Бурбаки [1, 3]. Необходимую динамику структуре придает объект информатики – относительно простая универсальная компьютерная программа, организующая выполнение любого представителя упомянутого семейства.

Функционально модель-компонента аналогична операционной системе. Ее задача – давать стандартные ответы на стандартные запросы среды. Предлагаемая в [1, 2] технология модельного синтеза и модельно-ориентированного программирования, кроме решения задач моделирования, позволяет декомпозировать большие программные комплексы и реализовывать их, избегая императивного программирования и получая код высокой степени параллельности.

Литература

1. *Бродский Ю.И.* Роды структур Н. Бурбаки в задаче синтеза имитационных моделей сложных систем и модельно-ориентированное программирование // Журнал Вычислительной математики и математической физики, 2015, Т. 55, № 1, С. 153–164.
2. *Бродский Ю.И.* Модельный синтез и модельно-ориентированное программирование. – М.: ВЦ РАН, 2013. 142 с.
3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965. 456 с.
4. *Гастев Ю.А.* Модель (в науке) // Статья в Большой Советской Энциклопедии. – М.: Советская энциклопедия, 1969–1978.
5. *Грецкий М.Н.* Структурализм (философ.) // Статья в Большой Советской Энциклопедии. – М.: Советская энциклопедия, 1969–1978.
6. *Маклейн С.* Категории для работающего математика / Перевод с англ. под ред. В.А. Артамонова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.
7. *Thomson J.F.* Tasks and Super-Tasks. // Analysis. 1954. Vol. 15 (1): 1–13.

Бродский Юрий Игоревич. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Доцент. Доктор физико-математических наук. Количество печатных работ: 170, (в т.ч. 15 монографий). Область научных интересов: имитационное моделирование сложных многокомпонентных систем, теория математического моделирования, распределенные и параллельные вычисления, теория программирования, математическое моделирование межкультурных взаимодействий, оптимальное управление. E-mail: yury_brodsky@mail.ru

On mathematical modeling of the behavior of complex systems

Yu.I. Brodsky¹

¹ Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. This paper dwells upon general problems of mathematical modeling from the structural method standpoint. What is a mathematical model and whether it always should be a system of differential equations. How to simulate the behavior of complex systems. What the computer science can contribute for this.

Keywords: *complex systems, structuralism, the method of analogies, mathematical modeling, computer science.*

DOI: 10.14357/20790279180203

References

1. *Brodsky Yu.I.* Bourbaki's Structure Theory in the Problem of Complex Systems Simulation Models Synthesis and Model-Oriented Programming // *Computational Mathematics and Mathematical Physics* Vol. 55 No. 1, 2015. P. 148-159.
2. *Brodsky Yu.I.* Model'nyj sintez i model'no-orientirovannoe programmirovaniye [Model synthesis and model-oriented programming] Moscow: CC RAS, 2013. 142 p.
3. *Bourbaki N.* “Elements of Mathematics, Theory of Set”. Springer, 2004. 414 p.
4. *Gastev Yu.A.* Model (in science). // Article in the Big Soviet Encyclopedia, the 3-rd ed., Moscow: Soviet encyclopedia, 1969-1978.
5. *Gretsky M.N.* Structuralism (philos.). // Article in the Big Soviet Encyclopedia, the 3-rd ed., Moscow: Soviet encyclopedia, 1969-1978.
6. *MacLane S.* Categories for the working mathematician. Springer, 1971. 263 p.
7. *Thomson J.F.* Tasks and Super-Tasks. // *Analysis*. 1954. Vol. 15 (1): 1-13.

Бродский Юрий И. Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, 44/2 Vavilova str., Moscow, Russia. Leading research scholar. Doctor of Mathematics, Associated Professor. Author of 170 scientific papers, (including 15 monographs). Research Interests: simulation of complex multi-component systems, theory of mathematical modeling, distributed and parallel computations, programming theory, modeling of cross-cultural interactions, optimal control. E-mail: yury_brodsky@mail.ru