Исследование бифуркационных свойств популяции с помощью метрических сетей*

Г.К. Каменев[1]

[1] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье методом построения (ε, δ)-сетей (Шеннон) исследуется поведение биологической популяции. Численность популяции приближенно описывается разностным уравнением с параметрами, характеризующими состояние окружающей среды. Показано, что предложенная методика позволяет приближенно строить и визуально исследовать бифуркационные диаграммы по произвольной кривой в пространстве параметров.

Ключевые слова: *биологическая популяция, дискретное отображение, метрическая сеть, аппроксимация, аттрактор, бифуркационная диаграмма.*

DOI: 10.14357/20790279180206

Введение

В настоящей работе рассматривается поведение популяции леммингов. Как показывают наблюдения, динамика численности в различных регионах может характеризоваться как цикличностью, так и нестабильными колебаниями. В настоящей работе исследуется модель популяции, основанная на одномерном унимодальном разностном уравнении с параметрами, связывающими численность леммингов в двух соседних годах. В [1] было показано, что метод построения метрических сетей на неявно заданных множествах позволяет исследовать бифуркационные диаграммы дискретной системы, представляющие собой изображения зависимости ее аттрактора от изменения одного из параметров. В настоящей работе мы покажем, что этот подход позволяет построить и визуализировать бифуркационную диаграмму по произвольной кривой в пространстве параметров, включающей в себя как участки с устойчивыми циклами, так и области хаоса, в которых присутствуют аномальные зоны больших или бесконечных периодов.

1. Математическая модель популяции

Рассмотрим разностное уравнение (см. [1]), связывающее нормированную численность $Y(t)$ леммингов в двух соседних годах: $Y(t+1)= F(Y(t)\ ,\ \lambda))$, где $\lambda=(P, r, d)\in\mathbf{R}^3$:

$$F(Y,\lambda)=\begin{cases} PY, & Y\le 1/P \\ 1-r(Y-1/P) & 1/P<Y\le 1/P+(1-d)/r \\ d & 1/P+(1-d)/r<Y\le 1 \end{cases}.$$

Здесь P, d и r описывают параметры среды обитания, на которые косвенно могут влиять биосферные климатические процессы, в том числе антропогенного характера. Параметр P характеризует прирост биомассы леммингов в благоприятный год. Величина d есть нормированная биомасса леммингов в оптимальном биотопе. Коэффициент r характеризует изменение биомассы леммингов в условиях нехватки кормов в весенний период. Мы будем рассматривать область параметров λ, где P, $r > 1$ и $0<d<1$.

Для $x\in[0,\ 1]$ *траекторией* будем называть множество:

$\mathbf{T}(x, \lambda)=\{(t, Y(t)): Y(t+1)= F(Y(t)\ , \lambda)), Y(0)=x, t=0, 1, \ldots\}$.

При некоторых значениях x и λ значения $Y(t)$ начинают циклически повторяться, начиная с некоторого шага N. Такие траектории мы будем называть циклами соответствующего периода, а набор повторяющихся значений – терминальным множеством траектории. Если терминальное множество оказывается устойчивым для всех $x\in U$, то такое множество мы будем называть *аттрактором*, соответствующим набору параметров λ в множестве U. Более формально, для $\mathbf{T}(x, \lambda)$, $x\in U$, определим аттрактор как множество:

$$\mathbf{A}(U,\lambda)=\bigcap_{t=0}^{\infty}\bigcup_{U}(Y(t)\ ,$$

где $(t,\ Y(t))\in\mathbf{T}(x, \lambda)$, $x\in U$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-11-00432.

Пусть задана параметризованная кривая Γ в пространстве параметров: $\Gamma=\{\lambda(\phi): \phi\in[a, b]\}$. Множество

$$\mathbf{D}(U, \Gamma) =\{(\phi, \mathbf{A}(U, \lambda(\phi))): \lambda(\phi)\in\Gamma\}$$

назовем *бифуркационной диаграммой* вдоль кривой Γ. В нашем случае она показывает, как меняется устоявшееся поведение популяции при изменении параметров окружающей среды. Опишем используемый способ приближенного построения (аппроксимацию) бифуркационных диаграмм вдоль контура параметров.

2. Аппроксимация с помощью метрических сетей

Универсальным средством аппроксимации сложных метрических объектов являются метрические ε-сети. Пусть A и U – непустые подмножества пространства **R** с метрикой ρ. Множество U называется метрической *ε-сетью для A*, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Если конечное U является метрической ε-сетью для A, то множество A имеет *аппроксимацию* в виде *ε-покрытия*, состоящего из системы шаров радиуса ε с центрами в точках U. В настоящей статье будет использован подход, разработанный в [2] для стохастически заданных множеств, т.е. для множеств с заданной на них вероятностной мерой.

Пусть задано некоторое конечное множество $T\subset\mathbf{R}$, которое мы будем в дальнейшем называть *базой* сети или покрытия. Обозначим через $(T)_\varepsilon$ его открытую ε-окрестность, т.е. множество $(T)_\varepsilon = \{a\in\mathbf{R}: \exists t\in U, \rho(t, a)<\varepsilon\}$, обозначим также $[T]_\varepsilon = \{a\in\mathbf{R}: \exists t\in T, \rho(t, a)\le\varepsilon\}$. Пусть на борелевской σ-алгебре $\mathbf{B}(A)$ задана вероятностная мера $\mu(\times)$, $\mu(A)=1$. Множество T называется (ε, δ)-*сетью* для A (в смысле определения К. Э. Шеннона), если $\mu(A/[T]_\varepsilon)\le\delta$, т.е. любая точка A, за исключением множества меры δ, расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U [3]. Методы построения (ε, δ)-сетей для стохастически заданных множеств рассмотрены в [2].

Рассмотрим теперь задачу аппроксимации аттрактора и построения бифуркационных диаграмм. Методы построения ε-сетей пригодны только для ограниченных множеств. Пусть заданы достаточно большие числа N_1 и N_2, $N_2 > N_1$. В качестве ограниченных аналогов аттрактора и бифуркационной диаграммы рассмотрим множества:

$$\mathbf{AN}(U, \lambda) =\{Y(t): (t, Y(t))\in\mathbf{T}(x, \lambda), x\in U, N_1\le t\le N_2\},$$
$$\mathbf{DN}(U, \Gamma) =\{(\lambda, \mathbf{AN}(U, \lambda)): \lambda\in\Gamma\}.$$

Пусть $\xi=(x, t)\in\Xi$, $\Xi=U\times[N_1, N_2]$, $f_{AN}(\xi, \lambda)=Y(t)$, где $(t, Y(t))\in\mathbf{T}(x, \lambda)$, тогда

$$\mathbf{AN}(U, \lambda) = f_{AN}(\Xi, \lambda).$$

Таким образом, построение аттрактора может быть осуществлено на основе генерирования большого числа случайных точек (x, t) в пространстве начальных значений размера популяции и терминального времени расчета, фильтрации точек алгоритмом [2] и оценки точности ε для заданных полноты и надежности (см. там же).

Пусть $\zeta=(\xi, \phi)\in Z$, $Z=\Xi\times[a, b]$, $f_{DN}(\zeta)=(\phi, f_{AN}(\Xi,\lambda(\phi))$, тогда

$$\mathbf{DN}(U, \Gamma) = f_{DN}(Z).$$

Таким образом, построение бифуркуционной диаграммы может быть осуществлено на основе генерирования случайных точек (x, t, ϕ) в пространстве начальных значений размера популяции, терминального времени расчета и параметра, определяющего величины трех параметров окружающей среды на заданной кривой, фильтрации точек алгоритмом [3] и оценки точности для заданных полноты и надежности.

3. Пример построения и исследования бифуркационной диаграммы

Пусть $\lambda^*=(1.5, 4, 0.3)$. При $t>10$ траектории системы имеют одинаковое терминальное четырехточечное множество. Таким образом, эти траектории являются циклами с периодом 4. Обозначим $P^*=1.5$, $r^*=4$ и $d^*=0.3$. Зафиксируем значение параметра $d=d^*$ и определим контур в пространстве параметров $\Gamma(R)$ как окружность $\lambda(\varphi, R) = (P(\varphi, R), r(\varphi, R), d^*)$, где $\varphi\in[0, 2\pi]$ и $P(\varphi, R) = (1+\sin(\varphi)R)P^*$, $r(\varphi, R) = (1+\cos(\varphi)R)r^*$.

Здесь $R\ge0$ – масштабирующий множитель, характеризующий удаление точек кривой в пространстве параметров от точки λ*. При $R=0$ кри-

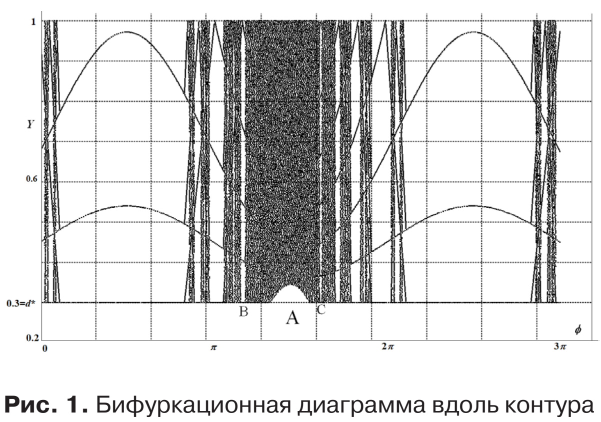

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма вдоль контура при R=0.3

вая параметров совпадает с точкой λ^*, а при $\varphi=\pi$ и $R^*=1\text{-}1/P^*=1/3$ значение одного из параметров выходит на предельно допустимую величину $P(\pi, R^*)=1$.

На рис. 1 представлена аппроксимация бифуркационной диаграммы $\mathbf{DN}(\{d^*\}, \Gamma(R))$ для $R=0.3<R^*=0.33$. Аппроксимация построена с помощью покрытия квадратами с центрами в (ε, δ)-сети. Точность ε составляет приблизительно 10^{-4} от относительного размера множества. Доля δ вне покрытия составляет 0.01. Оценки сделаны с надежностью $\chi=0.999$ на выборках объема $N=30000$ (см. [2]).

Из рисунка видно, что на большем протяжении кривой доминирует устойчивый аттрактор в виде 3-цикла, на некоторых участках его сменяет 4-цикл и циклы более высоких порядков, в центре (при φ приблизительно от 3.7 до 5.4) находится зона хаоса, в которой выделяется *аномальная зона* А (при φ приблизительно от 4.2 до 4.8), когда аттрактор, состоящий из практически бесконечного числа точек, не касается минимального уровня популяции $d^*=0.3$.

В аномальной зоне траектории, начавшись на минимально возможном уровне, более не возвращаются к нему в асимптотике. Это соответствует «перегреву» популяции, которая, тем не менее, остается ограниченной по численности. Такое поведение моделируемой системы можно сравнить с приближением к так называемой сингулярности или «катастрофе голубого неба», сопровождающейся неограниченным ростом периода циклов траектории с сохранением ограниченности ее фазовой локализации. Область параметров модели, а также период циклов популяции вблизи сингулярности «голубого неба» более подробно рассмотрены в [1]. Как видно из рисунка, имеет место быстрое восстановление циклических свойств системы при выходе из аномальной зоны: легко различимы 5-цикл B слева от A и 7-цикл C справа от A. Это также соответствует свойству структурной устойчивости бифуркации «голубого неба».

Литература

1. *Georgy K. Kamenev, Oleg P. Lyulyakin, Dmitry A. Sarancha, Nikolai A. Lysenko, Valery O. Polyanovskii*. From chaos to order. Difference equations in one ecological problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2016, 31 (5), pp. 253-265.
2. *Kamenev G.K.* Approximation of Completely Bounded Sets by the Deep Holes Method // Comput. Maths. Math. Phys. 2001. Vol.41. N11. Pp. 1667-1675.
3. *Шеннон К.* Математическая теория связи (1948), приложение 7. В кн. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. иностранной литературы, 1963.

Каменев Георгий Кириллович. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Доктор физико-математических наук. В 1983 году окончил Московский физико-технический институт. Количество печатных работ: 53 (в т.ч. 6 монографий). Область научных интересов: выпуклая геометрия, многокритериальные решения. E-mail: gkk@ccas.ru.

Study of bifurcation properties of population by metric nets

G.K. Kamenev[1]

[1] Federal research center of Informatics and Management Dorodnicyn Computing centre of the Russian science academy

Abstract. In the article bifurcation properties of biological population are studied by (ε, δ)-nets (Shannon) construction. Difference equation (discrete mapping) with environment type parameters for the population dynamics is used. It is shown that the method proposed can be used to construct and visualize the bifurcation diagram for arbitrary curve in the parameters space.

Keywords: *biological population, discrete mapping, metric net, approximation, attractor, bifurcation diagram*.

DOI: 10.14357/20790279180206

References

1. *Georgy K. Kamenev, Oleg P. Lyulyakin, Dmitry A. Sarancha, Nikolai A. Lysenko, Valery O. Polyanovskii.* From chaos to order. Difference equations in one ecological problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2016, 31 (5), Pp. 253-265.
2. *Kamenev G.K.* Approximation of Completely Bounded Sets by the Deep Holes Method // Comput. Maths. Math. Phys. 2001. Vol.41. N11. Pp. 1667-1675.
3. *Shennon K.* Matematicheskaya teoriya svyazi, prilozhenie 7. V kn. Rabotyi po teorii informatsii i kibernetike. [The Mathematical Theory of Communication, Appendix 7. In the book. Works on the theory of information and cybernetics.] M.: Izd. Inostrannoy Literaturyi, 1963.

Kamenev Georgy Kirillovich. Federal research center of Informatics and Management Dorodnicyn Computing centre of the Russian science academy, Moscow, Russia, Vavilova str, 40. Leading Research Fellow. Ph.D., Dr. Hab. in Applied Mathematics. Senior researcher. Number of publications: 53 (6 monographies). Scientific interests: convex geometry, multiple criteria decisions. E-mail for correspondence: gkk@ccas.ru