

# Модель оптимального поведения агрегированного домохозяйства \*

И.П. СТАНКЕВИЧ<sup>1,2</sup>, А.А. УЖЕГОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия

<sup>2</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе представлена динамическая модель рационального поведения агрегированного домохозяйства, позволяющая описать динамику потребления и занятости российских домохозяйств исходя из классических представлений о полезности потребления и отвращении к труду. В модели домохозяйство предъявляет спрос на продукт и предлагает труд в рамках финансовых ограничений с учетом финансовых и инвестиционных инструментов в предположении точного предвидения цен, процентов, курса валюты и довольно сложного ограничения ликвидности. Особенностью работы является неожиданно простой мультипликативный вид функции полезности от потребления и труда. Задача рационального поведения домохозяйства ставится на конечном горизонте с терминальными условиями роста капитала и решаются с помощью достаточных условий оптимальности в форме Лагранжа. Благодаря специфике функции полезности задачу удается решить до конца аналитически для произвольных траекторий цен, ставки заработной платы и процентов.

**Ключевые слова:** домашнее хозяйство, занятость, динамическая нелинейная модель, макроэкономика.

**DOI:** 10.14357/20790279180214

## Введение

Фундаментальным вопросом в процессе моделирования поведения домохозяйства является выбор формы функции полезности для описания предпочтений потребителя. Один из самых распространенных в литературе вариантов – это CES-функции полезности (функции с постоянной эластичностью замещения). Они обладают целым рядом полезных свойств, в том числе связанных с возможностью их использования для описания иерархической полезности [1], а также содержат в качестве частных случаев ряд других функций полезности (линейную, леонтьевскую, Кобба-Дугласа). Это обусловило популярность CES-функций в многопродуктовых моделях, при этом при помощи таких функций описывается не только полезность потребителя, но и агрегирование промежуточных продуктов в финальные блага (то есть CES-функции используются не только как функции полезности, но и как функции свертки [2]). CES-функции проявляют свои свойства именно в рамках многопродуктовых моделей, в случае же одного продукта они сводятся к простым линейным функциям, кото-

рых явно недостаточно для корректного описания действительности. Одним из распространенных вариантов в этом случае является степенная функция, она же CRRA-функция (функция с постоянной относительной несклонностью к риску). Она часто используется для описания поведения потребителя в разного рода макроэкономических моделях [4], в моделях динамического стохастического общего равновесия, к примеру, [3]. При этом в большинстве работ предполагается, что потребление и труд (в той или иной форме – рабочее время, свободное время, занятость) входят в функцию полезности аддитивно. Что интересно, если потребление обычно входит как CRRA-функция от объема потребления агентом, то труд может входить и как CRRA-функция [4], и как функция другого вида [5]. Следуя за сложившейся традицией, мы будем вводить полезность от потребления и труда как CRRA-функции, но откажемся от ограничительной предпосылки, что эти две компоненты входят в итоговую функцию полезности аддитивно.

## 1. Задача агрегированного потребителя

Экономическая динамика описывается при помощи непрерывного времени. Временным мно-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ, грант Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых № МК-8181.2016.9.

жеством является отрезок  $[0, T]$ . Агрегированный потребитель максимизирует полезность потребления

$$\int_0^T u(C(t), R(t)) \exp\{-\delta t\} dt \rightarrow \max_{C(t), R(t)}, \quad (1)$$

выбирая траектории потребления  $C(t)$ , занятости  $R(t)$ , динамики наличных денег  $A(t)$ , кредитных займов  $L(t) \geq 0$ , депозитных вкладов  $S(t) \geq 0$ , объема ценных бумаг  $B(t) \geq 0$ , сальдо покупки-продажи иностранной валюты  $Q(t) \geq 0$  и сальдо покупки-продажи недвижимости  $E(t) \geq 0$  в рамках финансового баланса:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) = & (1-n(t))\omega(t)R(t) - p_C(t)C(t) + Tr(t) - r_L(t)L(t) + \frac{d}{dt} L(t) + \\ & + r_S S(t) - \frac{d}{dt} S(t) + r_B(t)B(t) - \frac{d}{dt} B(t) - w(t) \frac{d}{dt} Q(t) - p_E(t) \frac{d}{dt} E(t) - OC(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $OC(t)$  – чистые прочие доходы, при ограничении ликвидности

$$\begin{aligned} A(t) \geq & k_R(1-n(t))\omega(t)R(t) + k_C p_C(t)C(t) + k_L L(t) + \\ & + k_S S(t) + k_B B(t) + k_Q w(t)Q(t) + k_E p_E(t)E(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k_R, k_C, k_L, k_S, k_B, k_Q, k_E$  – константы, при известных на отрезке  $[0, T]$  переменных: оплата труда  $\omega(t)$ , дефлятор потребления  $p_C(t)$ , процентная ставка по кредитам  $r_L(t)$ , процентная ставка по депозитам  $r_S(t)$ , доходность ценных бумаг  $r_B(t)$ , курс доллара США к рублю  $w(t)$ , индекс цен на недвижимость  $p_E(t)$ . Переменные социальные трансферты  $Tr(t)$  и прочие денежные остатки  $OC(t)$  являются экзогенно заданными.

Функцией полезности агрегированного потребителя является модифицированная функция CRRA вида:

$$u(C(t), R(t)) = \frac{C(t)^{1-\beta} R(t)^{1-\alpha}}{1-\beta \quad 1-\alpha},$$

при ограничениях на параметры

$$\alpha < 0, \beta > 1, \alpha + \beta < 1. \quad (4)$$

## 2. Решение задачи агрегированного потребителя

Решением задачи являются уравнения для траекторий:

$$C(t) = C(0) \left[ \left( \frac{p_C(t)}{p_C(0)} \right)^\alpha \left( \frac{(1-n(t))\omega(t)}{(1-n(0))\omega(0)} \right)^{1-\alpha} \exp\left\{-\int_0^t \rho(u) du\right\} \exp\{\delta t\} \right]^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (5)$$

$$R(t) = R(0) \left[ \left( \frac{p_C(t)}{p_C(0)} \right)^{1-\beta} \left( \frac{(1-n(t))\omega(t)}{(1-n(0))\omega(0)} \right)^\beta \exp\left\{-\int_0^t \rho(u) du\right\} \exp\{\delta t\} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \quad (6)$$

$$\rho(t) = -\frac{\frac{d}{dt} \xi(t)}{\xi(t)} \quad (7)$$

$\rho(t)$  интерпретируется как доходность домашнего хозяйства.

Траектории для финансовых и инвестиционных инструментов получены путем смягчения соответствующих условий дополняющей нежесткости:

$$L(t) = [a_L + b_L(\rho(t)(k_L - 1) + r_L(t))]L(t-1), \quad (8)$$

$$S(t) = [a_S + b_S(\rho(t)(k_S + 1) - r_S(t))]S(t-1), \quad (9)$$

$$Q(t) = [a_Q + b_Q(\rho(t)w(t)(k_Q + 1) - \frac{d}{dt} w(t))]Q(t-1), \quad (10)$$

$$B(t) = [a_B + b_B(\rho(t)(k_B + 1) - r_B(t))]B(t-1), \quad (11)$$

$$E(t) = [a_E + b_E(\rho(t)p_E(t)(k_E + 1) - \frac{d}{dt} p_E(t))]E(t-1). \quad (12)$$

Домножение на  $L(t-1), S(t-1), Q(t-1), B(t-1), E(t-1)$  необходимо для выполнения условия стационарности для левой и правой частей уравнений (8) – (12).

На рис. 1 приводятся результаты модели для траекторий потребления из занятости в сравнении со статистическими данными.

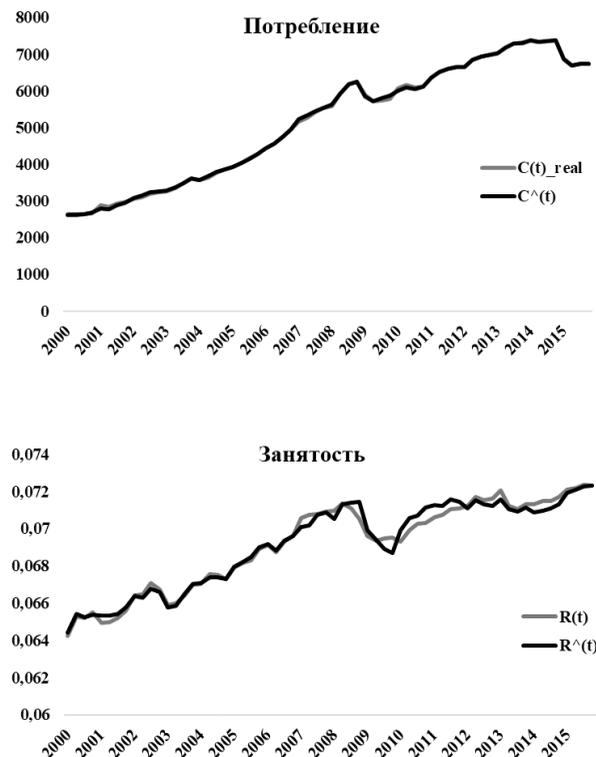


Рис. 1. Реальное потребление домашних хозяйств, млрд руб. Уровень занятости, млн чел. Статистические данные и модельная оценка

### Заключение

В результате, удалось построить динамическую нелинейную модель поведения агрегированного домохозяйства в экономике Российской Федерации, включающую описание потребления, занятости, изменения финансовых и инвестиционных инструментов. Найдено аналитическое решение задачи агрегированного домохозяйства, подготовленное для использования на статистических данных. Воспроизведена на модельном уровне траектория занятости, чего пока не удавалось получить в моделях подобного типа применительно к экономике России. Это стало возможным благодаря специфике предложенной в работе функции полезности. Исходя из классического представления о рациональном поведении агрегированного потребителя, с достаточно высокой точностью воспроизведены характеризующие его показатели.

### Литература

1. *Gorman W.M.* Separable Utility and Aggregation. // *Econometrica*. 1959. Vol. 27, No. 3, pp. 469-481
2. *Minniti A., Turino F.* Multi-product firms and business cycle dynamics // *European Economic Review*, Elsevier. 2013. vol. 57(C), P. 75-97
3. *An S., Schorfheide F.* Bayesian analysis of DSGE models // *Econometric reviews*. 2007. Т. 26. – №. 2-4. – С. 113-172.
4. *Soriano-Morales Y.V., Vallejo-Jiménez B., Venegas-Martínez F.* Impact of the Degree of Relative Risk Aversion, the Interest Rate and the Exchange Rate Depreciation on Economic Welfare in a Small Open Economy // 2017.
5. *Krause A.* Optimal Savings Taxation when Individuals have Different CRRA Utility Functions // *Annals of Economics and Statistics/Annales d'Économie et de Statistique*. 2014. №. 113-114. – С. 207-223.

**Станкевич Иван Павлович.** Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет экономических наук, департамент прикладной экономики, г. Москва, Россия. Старший преподаватель. Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, отдел теоретической физики, г. Москва, Россия. Младший научный сотрудник. Количество печатных работ: 6. Область научных интересов: математическая экономика, эконометрика временных рядов.  
E-mail: vpvstankevich@yandex.ru

**Ужегов Алексей Александрович.** Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». Стажер-исследователь, магистр экономики. Количество печатных работ: 2. Область научных интересов: математическая экономика, макроэкономика, макро моделирование поведения домашних хозяйств. E-mail: ujevov@gmail.com

## Model of the Aggregate Household Optimal Behavior

*I.P. Stankevich<sup>1,2</sup>, A.A. Ujegov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> National Research University Higher School of economics, Moscow, Russia.

<sup>2</sup> Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Abstract.** A non-standard macroeconomic approach is discussed in this paper. An aggregate household rational behavior nonlinear dynamic model is presented, in which household is characterized by budget constraint with inclusion of various financial and investment instruments. Model is fully solved what means that final trajectories for consumption and labor are derived. A key feature of this paper is specific type of utility function that allows to estimate both consumption and labor trajectories.

**Keywords:** *household, labour, nonlinear dynamic model, macroeconomics.*

**DOI:** 10.14357/20790279180214

### References

1. *Gorman W.M.* 1959. Separable utility and aggregation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 469-481.
2. *Minniti A. and Turino F.* 2013. Multi-product firms and business cycle dynamics. *European Economic Review*, 57:75-97.
3. *An S. and Schorfheide F.* 2007. Bayesian analysis of DSGE models. *Econometric reviews*, 26(2-4):113-172.
4. *Soriano-Morales Y.V., Vallejo-Jiménez B. and Venegas-Martínez F.* 2017. Impact of the degree of relative risk aversion, the Interest rate and the exchange rate depreciation on economic welfare In a small open economy.
5. *Krause A.* 2014. Optimal savings taxation when individuals have different CRRA utility functions. *Annals of Economics and Statistics/Annales d'Économie et de Statistique*, (113/114):207-223.

**Stankevich I.P.** National Research University Higher School of Economics, 101000, 20 Myasnitskaya str., Moscow, Russia. Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 119991, 53 Leninisky prospect, Moscow, Russia. E-mail: vpvstankevich@yandex.ru

**Ujegov A.A.** research intern, National Research University Higher School of Economics, 101000, 20 Myasnitskaya str., Moscow, Russia. E-mail: ujevov@gmail.com