

Модель корреляционной адаптометрии и ее приложения к биологическим задачам

М.И. Шпитонков¹

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. При построении модели предполагается, что плотность распределения численности биологической популяции удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка. Продемонстрировано применение методики корреляционной адаптометрии к оценке влияния низких температур на зимовщиков на станциях в Антарктиде в разные периоды года.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка, корреляционная адаптометрия, вес корреляционного графа.

DOI: 10.14357/20790279180218

Введение

В последней четверти прошлого века специалисты медико-биологического направления обнаружили изменения величины корреляционных связей между параметрами организмов при возникновении внешнего воздействия на популяцию.

Метод оценки этого воздействия был назван методом корреляционной адаптометрии. Попытки построения подхода для такого объяснения, базирующиеся на использовании принципов эволюционной оптимальности, были продемонстрированы в работах [1,2]. Результаты, связанные с практическими применениями данной методики для оценки эффективности лечения заболеваний человека представлены в работах [4,5]. В работе [6] была построена и обоснована диффузионная модель корреляционной адаптометрии для n – мерной области параметров. В представленной работе теоретическое исследование подкрепляется экологическим примером.

1. Диффузионная модель корреляционной адаптометрии

Рассматривается популяция, особи которой отличаются значениями некоторых индивидуальных параметров. Считается, что параметры непрерывны и ограничены, так что каждый их набор может быть описан некоторым элементом $x \in \Omega \subset R^n$ (n – число рассматриваемых параметров). При этом область Ω – ограниченная. Предполагается, что изменения параметров особи описываются непрерывным марковским диффузионным процессом. Тогда для плотности распределения численности популяции $u(x, t)$ будет

предполагаться выполненным уравнение Фоккера–Планка:

$$\partial_t u = -(\nabla, \vec{b}u) + a\Delta u, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$, $a > 0$ – коэффициент диффузии; $\vec{b}$ – вектор направленного сноса, моделирующий внешнее воздействие, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, $t \in R_+$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\partial_{x_i} = \partial / \partial x_i$; $\Delta = (\nabla, \nabla)$ – оператор Лапласа по x .

Считается, что ограниченная область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$, на которой существует единственная точка $s(\vec{b}) \in \partial\Omega$ такая, что вектор внешней нормали к границе в этой точке совпадает как по направлению, так и по знаку с вектором $\vec{b}$, причем вся область находится по одну сторону от $s(\vec{b})$ по направлению.

Для граничных условий непроницаемости

$$(bu - a\nabla u, \nu)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где ν – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ существует единственное стационарное решение задачи (1) вида:

$$u(x) = v(x_n) = v_0 e^{-\frac{bx_n}{a}} \quad (3)$$

То, что (3) является решением, проверяется его подстановкой в (1), (2), а единственность следует из его знакопостоянства.

Математической моделью величин, измеряемых в задачах корреляционной адаптометрии, являются наборы линейных функций:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i, \quad \psi = \sum_{i=1}^n \psi_i x_i \quad (4)$$

с ненулевым набором компонент, а моделью определяющих свойства адаптации статистических

характеристик – их коэффициенты корреляции по распределению (3):

$$K(\varphi, \psi) = \frac{M[(\varphi - M\varphi)(\psi - M\psi)]}{(M[(\varphi - M\varphi)^2]M[(\psi - M\psi)^2])^{1/2}} \quad (5)$$

где

$$M\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx}{\int_{\Omega} u(x) dx} \quad (6)$$

Рассматривается задача исследования зависимости выражения (5) от параметров уравнения (1) с учетом (4).

В случае общего положения в окрестности точки $s(b)$ граница области $\frac{\partial \Omega}{\partial \Omega} =$ может быть представлена в виде

$$\{x : x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 + o(x^2)\}, \text{ где все } a_i > 0, \\ i = 1, \dots, n-1.$$

Параболической аппроксимацией области Ω в точке $s(b)$ будем называть область вида:

$$\Omega_p = \{x : x_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2\}. \quad (7)$$

Расчеты коэффициентов корреляции (5) для распределения (3) будем проводить для области (7), так что в (6), интегрирование осуществляется по области Ω_p вместо Ω . Каждой функции φ

из (4) сопоставим вектор $\bar{\varphi} = (\frac{\varphi_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{\varphi_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}}}, 0)$.

Угол между векторами $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ будем обозначать как $\angle \bar{\varphi} \bar{\psi}$.

Для области (7) и функций из (4) справедлива следующая теорема:

при $b \rightarrow \infty$ и $\bar{\varphi} \neq 0, \bar{\psi} \neq 0$ $K(\varphi, \psi) \rightarrow \cos(\angle \bar{\varphi} \bar{\psi})$.
при $b \rightarrow 0$ и $\varphi_n \psi_n \neq 0$ $K(\varphi, \psi) \rightarrow \text{sign}(\varphi_n \psi_n)$.

Как правило, в практических задачах используется вес корреляционного графа $G = \sum_{i>j} |r_{i,j}|$, где $r_{i,j}$ – коэффициенты корреляции.

2. Биологический пример

В данном исследовании изучалось воздействие очень низкой температуры на контингент зимовщиков на станциях в Антарктиде в разные периоды года [3]. В качестве биохимических показателей были взяты следующие: липопротеиды

низкой плотности, липопротеиды очень низкой плотности, общие липиды, триглицериды, общий холестерин, глюкоза, соли жирных кислот и фосфолипиды. Первый анализ был взят у зимовщиков непосредственно после приезда на станцию, второй – приблизительно через полгода пребывания на станции. В качестве внешнего воздействия здесь выступает очень низкая температура, действующая достаточно длительное время.

Результаты корреляционного анализа показали следующее: вес корреляционного графа после полугода пребывания на станции примерно в полтора раза превышает тот же показатель непосредственно после приезда на станцию. Это свидетельствует о том, что чрезвычайно низкие температуры и другие негативные факторы, такие как ветры большой скорости, исключительный радиационный режим (чередование полярной ночи и полярного дня) и многие другие стрессорные факторы, крайне негативно действуют на организм зимовщиков.

Литература

1. Горбань А.Н., Манчук В.Е., Петушкова Е.В. Динамика корреляций между физиологическими параметрами и эколого-эволюционный принцип полифакториальности // Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. Л.: Гидрометеиздат., 1987, Т.10, с. 187-198.
2. Светличная Г.Н., Смирнова Е.В., Покидышева Л.И. Корреляционная адаптометрия как метод оценки кардиоваскулярного и респираторного взаимодействия // Физиология человека, 1997. Т.23, №3, с.58-62.
3. Панин Л.Е. Энергетические аспекты адаптации. Л.: Медицина, 1978. 191 с.
4. Васильев А.В., Мальцев Г.Ю., Хрущева Ю.В., Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И. Применение метода корреляционной адаптометрии для оценки эффективности лечения больных ожирением // Вопросы питания. Т. 76, №2, 2007, с.36-38.
5. Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И., Герасимов А.Н. Применение метода корреляционной адаптометрии в медико – биологических задачах // Исследование операций (модели, системы, решения). М.: ВЦ РАН, 2002, с.51-55.
6. Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И. Корреляционная адаптометрия. Модели и приложения к биомедицинским системам // Математическое моделирование, 2008, т.20, номер 8, с. 13-27.

Шпитонков Михаил Иванович. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, доцент. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 75. Область научных интересов: математические модели в биологии, медицине, эпидемиологии, физиологии, экологии, экономике. E-mail: mixash@bk.ru

Model correlation adaptometry and its applications to biological issues

M. I. Shpitonkov¹

¹ Dorodnicyn Computing Centre of Federal Research Centre “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. When building the model it is assumed that the distribution density of the number of biological populations satisfies the Fokker–Planck equation. Demonstrated the application of methods of correlation adaptometry to assessing the impact of low temperatures on the wintering in Antarctica at different times of the year.

Keywords: *Fokker–Planck equation, correlation adaptometry, the weight of the correlation graph.*

DOI: 10.14357/20790279180218

References

1. Gorban' A.N., Manchuk V.E., Petushkova E.V. Dinamika korrelyatsij mezhdru fiziologicheskimi parametrami i ekologo-evolucionnyi printsip polifaktorial'nosti [Dynamics of correlations between physiological parameters and ecological-evolutionary principle of polyfactorial] // Problemy ekologicheskogo monitoringa I modelirovanie ekosistem [Ecological monitoring problems and ecosystems modeling]. — 1987. — V10. — P.187-198.
2. Svetlichnaya G.N., Smirnova E.V., Pokidysheva L.I. Korrelyatsionnaya adaptometriya kak metod otsenki kardio-vaskulyarnogo I respiratornogo vzaimodejstviya [Correlation adaptometry as a method of evaluating cardiovascular and respiratory interaction] // Human physiology. — 1997. — Vol.23, No. 3. — P. 58–62.
3. Hanin. L.E. Energeticheskie aspekty adaptatsii. [Energy aspects of adaptation] L.: Medicine, 1978. 191 p.
4. Vasil'ev A.V., Mal'tsev G.Yu., Khrushcheva Yu.V., Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I. Primenenie metoda korrelyatsionnoj adaptometrii dlya otsenki effektivnosti lecheniya bol'nykh ozhireniem [Application of correlation adaptometry technique to assess the effectiveness of treatment of patients with obesity] // The nutrition issues. — 2007. — Vol. 76, No. 2. — P. 36–38.
5. Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I., Gerasimov A.N. Primenenie metoda korrelyatsionnoj adaptometrii v medico-biologicheskikh zadachakh [Application of the correlation adaptometry technique to biomedical tasks] // Trudy CCRAS Issledovanie operatsij (modeli, sistemy, resheniya) [Operations research (models, systems, solutions)]. — 2002. — P. 51-55.
6. Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I. Korrelyatsionnaya adaptometriya. Modeli I prilozheniya k biomeditsinskim sistemam [Correlation adaptometry. Models and applications to biomedical systems] // Mathematical modeling. . — 2008. — Vol. 20, No. 8. — P. 13–27.

Shpitonkov M.I. PhD, Dorodnicyn computing center Federal Research Centre “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, 44/2 Vavilova str., Moscow, Russia. Senior researcher, associate professor. Number of publications: 75. Research interests: mathematical models in biology, medicine, epidemiology, physiology, ecology. E-mail: mixash@bk.ru