

Теория принятия решений

Эксперименты с гибридными методами аппроксимации оболочки Эджворта-Парето*

А.В. Лотов¹, В.Е. Березкин¹, Е.А. Лотова¹, А.И. Рябиков¹

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Описываются эксперименты с гибридными методами аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в сложных нелинейных задачах многокритериальной оптимизации. Методы основаны на сочетании локальной оптимизации и генетических методов.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, граница Парето, оболочка Эджворта-Парето.

DOI: 10.14357/20790279180202

Введение

Методы решения задач многокритериальной оптимизации, основанные на аппроксимации и изучении границы Парето [1-3], занимают важное место среди других методов решения этой задачи. В работе рассматривается проблема аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) множества достижимых критериальных векторов, которая возникает в рамках метода Диалоговых карт решений [2], использующегося для изучения многомерной границы Парето на основе ее визуализации.

Задача аппроксимации ОЭП ранее получила эффективное решение для выпуклых (в том числе линейных) многокритериальных проблем [2]. В нелинейном случае дело обстоит значительно сложнее. Для нелинейных проблем, для которых удается достаточно точно решить значительное число задач глобальной оптимизации некоторых скалярных функций критериев (сверток критериев), задача аппроксимации границы Парето и ОЭП может быть решена на основе решения таких задач оптимизации [1]. В случае сложных критериев оптимизации, для которых, однако, можно рассчитать постоянные Липшица, при небольшой размерности пространства решений удобно использовать методы, основанные на покрытии множества допустимых решений [3].

В данной работе описывается опыт применения методов аппроксимации ОЭП для нелинейных невыпуклых систем, в которых критериальные функции связаны с допустимыми решениями вычислительным модулем. В этом случае знание значения (и даже наличие) постоянной Липшица не предполагается. Кроме того, допускается, что размерность пространства решений велика (несколько сотен). Для моделей с относительно малым числом локальных экстремумов критериальных функций были предложены многофазные и гибридные методы аппроксимации ОЭП [4], в которых локальная оптимизация сочетается с генетическими методами. Так, в [4] предложен метод «оштукатуривания ОЭП», который отличается от стандартных генетических методов аппроксимации границы Парето [5] отсутствием фазы мутации. В настоящей работе описывается опыт использования гибридных методов аппроксимации ОЭП и описываются результаты эксперимента с новым гибридным методом аппроксимации ОЭП, предназначенным для большого числа локальных экстремумов сверток критериальных функций. В новом гибридном методе локальная оптимизация применяется не ко всему допустимому множеству, а к его подмножеству, которое строится с помощью классического генетического метода NSGA [5].

В Разделе 1 приводится постановка задачи. В Разделе 2 описывается опыт аппроксимации ОЭП

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-11-00432.

с использованием двухфазного метода, дополненного методом «оштукатуривания», а в Разделе 3 – опыт использования нового гибридного метода.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача многокритериальной оптимизации, в которой $x \in X \subset R^n$, множество X компактно; $y=f(x)$, Рассмотрим задачу многокритериальной минимизации. Точнее говоря, будем считать, что критериальная точка y' более предпочтительна, чем точка y (y' доминирует y по Парето), если $y' \leq y$ и $y' \neq y$. Решением задачи являются паретова (она же недоминируемая) граница $P(Y)$ множества $Y=f(X)$, определяемая как

$$P(Y) = \{y \in Y : \{y' \in Y : y' \leq y, y' \neq y\} = \emptyset\},$$

и множество $P(X)$ решений, оптимальных (эффективных) по Парето, т.е. совокупность точек X , порождающих $P(Y)$. Оболочка Эджворта-Парето (ОЭП) множества $Y=f(X)$ в задачах многокритериальной минимизации определяется как $Y^* = Y + R_+^m$, где R_+^m – неотрицательный конус пространства R^m . При этом границы Парето Y^* и Y совпадают. Благодаря этому, визуализация Y^* позволяет получить информацию о границе Парето. Важно, что доминируемые границы Y , мешающие исследованию при $m > 2$, исчезают при переходе к множеству Y^* , что в значительной степени облегчает визуализацию $P(Y)$.

В случае невыпуклых нелинейных задач многокритериальной оптимизации множество ОЭП в МДЦ аппроксимируется множеством $T^* = \bigcup \{y + R_+^m : y \in T\}$, где T – конечное число точек Y , называемых базой аппроксимации.

2. Подход на основе синтеза двухфазного метода и «оштукатуривания ОЭП»

Двухфазный метод является итерационным, на каждой итерации генерируется случайная выборка H_N точек множества X , а далее к сгенерированным точкам применяется некоторое отображение $\Phi: X \rightarrow X$, приближающее эти точки к $P(X)$. Полученные точки $f(\Phi(H_N))$ используются для проверки правила остановки алгоритма. Если правило остановки не выполняется, критериальные точки, не принадлежащие текущей аппроксимации ОЭП, включаются в новую базу аппроксимации. Реализация отображения Φ в двухфазном методе основана на решении задачи локальной однокритериальной оптимизации, где в качестве целевой функции берется некоторая скалярная свертка $\varphi(f(x))$ векторного критерия $f(x)$. В результате применения

процедуры локальной оптимизации находится локальный минимум $x' \in X$, зависящий от начальной точки $x^0 \in H_N$. Правило остановки процедуры основано на величине максимального отклонения полученных критериальных точек от текущей аппроксимации.

Изучение описанного метода проводилось на проблеме выбора параметров системы водного охлаждения стали в процессе ее непрерывной разливки [2], которая сводится к сложной нелинейной задаче многокритериальной оптимизации в частных производных с четырьмя критериями выбора решения и большой размерностью пространства решений (325 параметров).

С помощью многофазного метода была построена база аппроксимации, состоящая из 40 точек. Далее были проведены две итерации метода «оштукатуривания ОЭП», направленной на уточнение аппроксимации ОЭП. В результате аппроксимация ОЭП описывалась 13622 недоминируемыми точками. Это позволило значительно улучшить аппроксимацию ОЭП. Наилучшая критериальная точка, найденная ранее в процессе оптимизации системы, оказалась внутри аппроксимации.

3. Новый гибридный метод аппроксимации ОЭП

Локальная оптимизация не в состоянии приблизить случайную точку к множеству оптимальных решений в том случае, когда имеется большое число локальных экстремумов свертки критериев. Для преодоления этого недостатка был предложен новый гибридный метод аппроксимации ОЭП, в котором локальная оптимизация начинается из случайных некоторого подмножества. В качестве средства формирования такого множества используются генетические методы аппроксимации границы Парето, для которых наличие локальных экстремумов свертки критериев не является помехой. В то же время, главный недостаток генетических методов, а именно прекращение улучшения текущей недоминируемой границы задолго до ее приближения к истинной границе Парето, компенсируется с использованием локальной оптимизации.

Шаг 1. На множестве X методом мультистарта строится предварительное множество исходных точек. Далее с помощью метода NSGA [5] строится множество X_{ini} начальных точек для процедуры локальной оптимизации.

Шаг 2. Аппроксимация ОЭП строится на основе итеративной локальной оптимизации случайных точек $x^0 \in X_{ini}$. Используется адаптивная свертка критериев, параметрами которой являются

координаты $f(x^0)$.

Шаг 3. Аппроксимация ОЭП улучшается с помощью генетических методов.

Новый гибридный метод использовался в задаче разработки правил управления каскадом гидроэлектростанций трех водохранилищ реки Ангара. Была использована нелинейная математическая модель, связывающая параметры правил с конечным числом критериев качества управления. Эта задача оптимизации характеризуется большим числом локальных экстремумов. Число параметров правил каскада оказалось равно 284. Рассматривалось 24 критерия выбора, значения которых находились путем имитации 100-летнего периода.

На первом шаге на 284-мерном допустимом множестве была сгенерирована случайная выборка объемом в 100 точек и были найдены параметры, дающие минимальные значения каждого из критериев. Начиная с этих точек, генетический алгоритм NSGA за 198 итераций построил множество X_{int} , состоящее приблизительно из 10 тысяч точек. Отклонение новых точек на последней итерации метода составляло 0.7%, т.е. метод был практически не способен улучшать полученную аппроксимацию.

На втором этапе применялся итерационный метод, основанный на локальной скалярной оптимизации сверток критериев. Объем выборки на каждой итерации составлял 100 точек. Всего было проведено 18 итераций метода. При этом отклонение получаемых точек падало от 2.5% характерного размера границы Парето на первой итерации до 1% на последней. В построенной базе аппроксимации оказалось 890 точек.

На третьем этапе метода база аппроксимации улучшалась с помощью метода NSGA. Всего было проведено 8 итераций метода. Отклонение получаемых точек от предыдущей аппроксимации ОЭП менялось от 2.2% на первой итерации до 1.0% на восьмой. Было получено 2963 точки базы аппроксимации и соответствующих им наборов параметров управления. Оказалось, что аппроксимации ОЭП принадлежит контрольная точка, найденная ранее в процессе оптимизации системы и считающаяся удовлетворительным правилом управления.

Литература

1. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Попов Н.М. Оптимизация в автоматизированном проектировании. – М.: Макс Пресс, 2008.
2. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
3. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью. // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 2. С. 209-224.
4. Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 2009-2023.
5. Deb K. Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. – Chichester, UK: Wiley, 2001.

Лотов Александр Владимирович. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник, профессор. Доктор физико-математических наук. Количество печатных работ: более 160 (в том числе 4 монографии и 4 учебных пособия). Область научных интересов: многокритериальная оптимизация, теория управления. Email: avlotov@yandex.ru

Березкин Вадим Евгеньевич. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 21. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация. Email: rdeals@mail.ru

Лотова Елизавета Александровна. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Инженер-исследователь. Количество печатных работ: 5. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация. Email: lizalota@yandex.ru

Рябиков Андрей Игоревич. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва, Россия. Младший научный сотрудник. Количество печатных работ: 23. Область научных интересов: многокритериальная оптимизация. Email: ariabikov@gmail.com

Experiments with hybrid methods for Edgeworth-Pareto Hull approximation

Lotov A.V.¹, Berezkin V.E.¹, Lotova E.A.¹, Riabikov A.I.¹

¹ Dorodnicyn Computing Centre of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Experiments with hybrid methods for Edgeworth-Pareto Hull approximation in complicated nonlinear problems of multiobjective optimization are described. The methods are based on hybridization of the local optimization and the genetic methods.

Keywords: *multiobjective optimization, Pareto frontier, Edgeworth-Pareto Hull*

DOI: 10.14357/20790279180202

References

1. *Krasnozhchokov P.S., Morozov V.V., Popov N.M.* Optimizaciya v avtomatizirovannom projektirovanii [Optimization in automatized projecting]. – Moscow: Maks Press, 2008.
2. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
3. *Evtushenko Yu.G., Posypkin M.A.* 2013. Nonuniform covering method as applied to multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy. *Comput. Math. and Math. Phys.* (2013) 53(2): 209-224.
4. *Berezkin V.E., Kamenev G.K., Lotov A.V.* 2006. Hybrid Adaptive Methods for Approximating a Non-convex Multidimensional Pareto Frontier. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 46(11): 1918-1931.
5. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. – Chichester, UK: Wiley, 2001.

Lotov A.V. Dr. Hub., Professor. Dorodnicyn Computing Centre of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, Vavilova str., 40, Moscow, Russia, email: avlotov@gmail.com

Berezkin V.E. Dorodnicyn Computing Centre of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, Vavilova str., 40, Moscow, Russia, email: rdeals@mail.ru

Lotova E.A. Dorodnicyn Computing Centre of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, Vavilova str., 40, Moscow, Russia, email: lizalota@yandex.ru

Riabikov A.I. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 119333, Vavilova str., 40, Moscow, Russia, email: ariabikov@gmail.com