Применение аппроксимации «среднего поля» в моделировании экономических процессов*

Н.В. Трусов[1]

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Данная работа основывается на модели, предложенной Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C., Zirilli F. [1] и является ее развитием. Предметом изучения является оптимальная стратегия профессионального трейдера на фоне непрофессиональных трейдеров.

Ключевые слова: *уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, уравнение Фоккера-Планка, уравнения Риккати, принцип максимума Понтрягина.*

DOI: 10.14357/20790279180221

Введение

Рассматривается модель финансового рынка, описывающая поведение профессионального трейдера и множества непрофессиональных трейдеров, оперирующих акциями рискового актива. Участниками финансового рынка являются основные инвесторы, профессиональные и непрофессиональные трейдеры. Основными инвесторами являются долгосрочные инвесторы, которые вкладывают свои сбережения в покупку большого пакета акций в расчете на дивиденды и рост курсовой стоимости акции. Профессиональные и непрофессиональные трейдеры относятся к высокочастотным трейдерам, которые пытаются заработать на колебаниях акций. Профессиональных трейдеров также называют проницательными трейдерами. В данной работе рассматривается модель с участием одного проницательного трейдера и множества непрофессиональных. Поведение непрофессиональных трейдеров описывается с помощью игры «среднего поля». Проницательный трейдер, угадав динамику цен финансовых активов, использует ее для извлечения прибыли. Его поведение моделируется задачей оптимального управления. В данной работе исследуется стратегия проницательного трейдера, чтобы проанализировать показатели финансового рынка.

В данной работе рассматривается следующая задача. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ проницательный трейдер имеет некий бюджет $P_0 > 0$. К моменту времени $T > 0$ проницательный трейдер хочет максимизировать свой бюджет путем открытия позиций на финансовом рынке. Будем полагать, что проницательный трейдер не может брать кредитов, т.е. его бюджет $P(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$.

1. Поведение непрофессиональных трейдеров

Поведение непрофессиональных трейдеров описывается системой УЧП, состоящей из уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, эволюционирующего в обратном времени и уравнения Фоккера-Планка – в прямом времени. Объединяя данные уравнения в систему, мы получаем задачу игры среднего поля.

Мы полагаем, что поведение непрофессиональных трейдеров на интервале времени $[0,T]$ описывается функцией полезности, представленной в [1]. В соответствии с данной функцией полезности, определим функцию цены:

$$u(t,x) = \max_{\alpha\in \mathrm{A}_1} \mathrm{E}\left(\int_t^T \left(\ln m(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{2}\alpha^2(\tau) - \lambda x^2(\tau)\right) d\tau \mid x(t) = x\right), \quad (1)$$

где $m(t,x)$ – плотность распределения непрофессиональных трейдеров по запасам акций, $x(t)\in\mathbb{R}$ – число акций непрофессионального трейдера в момент времени $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in \mathrm{A}_1$ – управление непрофессиональных трейдеров, $\alpha(\tau) = \dfrac{\partial x}{\partial \tau}$, $\lambda > 0$, A_1 – множество квадрируемых процессов:

$$\gamma(t)\in \mathrm{A}_1 \Longleftrightarrow \mathrm{E}\left(\int_0^T \gamma^2(t)dt\right) < \infty .$$

Система УЧП имеет следующий вид [1]:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ №17-07-00507.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2-\lambda x^2=-\ln m(t,x), \\ \dfrac{\partial m}{\partial t}(t,x)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)m(t,x)\right)-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 m}{\partial x^2}(t,x)=0, \\ u(T,x)=-\theta(x-a)^2, \\ m(0,x)=m_0(x), \end{cases} \qquad (2)$$

где $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$, $m(t,x)$ – плотность распределения непрофессиональных трейдеров по запасам акций, $u(t,x)$ задается уравнением (1), $\theta\ge 0$, $a\in\mathbb{R}$ – заданные параметры.

Предполагая, что плотность распределения непрофессиональных трейдеров в начальный момент времени имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ_0 и дисперсией δ_0^2, система (2) может быть сведена к системе [1]:

$$\begin{cases} u(t,x)=C_0(t)+C_1(t)x+C_2(t)x^2, \\ m(t,x)=\exp\left[D_0(t)+D_1(t)x+D_2(t)x^2\right], \\ \alpha(t,x)=C_1(t)+C_2(t)x, \end{cases} \qquad (3)$$

где $x\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$, функции $C_0(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $D_0(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$ являются решениями шести уравнений Риккати [1]:

$$\begin{cases} \dot{D}_0=\dfrac{\sigma^2}{2}D_1^2-C_1D_1+\sigma^2D_2-2C_2, \\ \dot{D}_1=2\sigma^2D_1D_2-2C_2D_1-2C_1D_2, \\ \dot{D}_2=2\sigma^2D_2^2-4C_2D_2, \\ \dot{C}_0=-D_0-\dfrac{C_1^2}{2}-\sigma^2C_2, \\ \dot{C}_1=-D_1-2C_1C_2, \\ \dot{C}_2=-D_2-2C_2^2+\lambda, \end{cases} \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$D_0(0)=-\frac{\mu_0}{2\delta_0^2}-\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\delta_0^2\right), \qquad D_1(0)=\frac{\mu_0}{\delta_0^2},$$

$$D_2(0)=-\frac{1}{2\delta_0^2}, \quad C_0(T)=-a^2\theta, \quad C_1(T)=2a\theta,$$

$$C_2(T)=-\theta;$$

где μ_0 – запас акций непрофессиональных трейдеров в момент времени $t=0$, $\mu_0\in\mathbb{R}$, a – позиция, которую пытаются достичь непрофессиональные трейдеры к моменту времени $t=T$, $a\in\mathbb{R}$, $\delta_0^2>0$, $\sigma^2>0$, $\lambda>0$, $\theta\ge 0$ – заданные параметры.

Функция $D_2(t)<0$, $\forall t\in[0,T]$ гарантирует принадлежность функции плотности к Гауссовскому распределению.

2. Поведение профессионального трейдера

Будем считать, что цена акции удовлетворяет следующему динамическому уравнению [1]:

$$S(t)=S^0(t)+\eta_1M(t)+\eta_2\beta(t), \qquad (5)$$

где $t\in(0,T]$, $M(t)=\int_{\mathbb{R}}\alpha(t,x)m(t,x)dx$, $\eta_1>0$, $\eta_2>0$, $S^0(t)$ – цена акции в отсутствие торгов.

Мы полагаем, что $S^0(t)$ имеет скачкообразный вид с величиной скачка $h>0$ в момент времени $\tau\in(0,T)$ и известна проницательному трейдеру. Пусть $y(t)$, $t\in[0,T]$ – запас акций проницательного трейдера, $y(0)=y(T)=0$; $P(t)>0$, $t\in[0,T]$ - бюджет проницательного трейдера, $P(0)=P_0>0$. Тогда задача оптимального управления, характеризующая оптимальную стратегию проницательного трейдера имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=\beta(t), \\ \dot{P}(t)=-\left(S^0(t)+\eta_1\left(C_1(t)-C_2(t)\cdot\dfrac{D_1(t)}{D_2(t)}\right)+\eta_2\beta(t)\right)\beta(t), \end{cases} \qquad (6)$$

где $t\in[0,T]$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$ – уравнения Риккати, определенные в (4).

Цель проницательного трейдера: максимизировать доход в конечный момент времени:

$$J=P(T)\to\max. \qquad (7)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина [2], получаем следующий вид оптимального управления проницательного трейдера:

$$\beta^*=\frac{1}{2\eta_2}\left(C-S^0(t)-\eta_1C_1(t)+\frac{\eta_1}{D_2(t)}C_2(t)D_1(t)\right), \qquad (8)$$

где C – константа, определяющаяся единственным образом при подстановке оптимального управления (8) в систему (6). Параметр η_2 является параметром масштабирования оптимального управления проницательного трейдера.

3. Численные эксперименты

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, введем характеристики, описывающие деятельность высокочастотных трейдеров.

Введем понятие показателя ликвидности проницательного трейдера. Пусть $\tilde{P}$ – затраченный бюджет проницательного трейдера, тогда показатель ликвидности:

$$L_{BT}=\frac{\left(P(T)-P_0\right)\cdot S^0(0)}{\tilde{P}\left(S^0(T)-S^0(0)\right)}. \qquad (9)$$

Пусть $K(t)$, $t\in[0,T]$ - бюджет непрофессиональных трейдеров, определяющийся следующим соотношением: $\dot{K} = -S(t)\int_{\mathbb{R}} \alpha(t,x)m(t,x)\,dx$, $K(0) = K_0$. Тогда изменение активов непрофессиональных трейдеров на рассматриваемом временном отрезке есть показатель:

$$F = K(T) - x(T)\cdot S(T) - \big(K(0) + x(0)\cdot S(0)\big). \quad (10)$$

Численные решения задачи оптимального управления (6)-(7) проводились в среде MatLab.

3.1. Малый показатель ликвидности проницательного трейдера

Рассмотрим следующие параметры: $T = 4$, $P_0 = 100$, $S^0(0) = 1$, $\tau = 0.5$, $h = 15$, $\mu_0 = 0.5$, $a = 1$, $K_0 = 10$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0.251$, $\lambda = 1$, $\sigma = 2$, $\delta_0 = 1$, $\theta = 1.2$.

Итоговый бюджет проницательного трейдера составил $P(T) = 206.44$ единицы, изменения активов непрофессиональных трейдеров $F = 2.11$ единицы, показатель ликвидности проницательного трейдера $L_{BT} = 0.072$.

Рис. 1. Акции проницательного трейдера

Рис. 2. Бюджет проницательного трейдера

3.2. Зависимость прибыли непрофессиональных трейдеров от параметров μ_0 и a

Рассматривая параметры, определенные в 3.1, зафиксировав параметр $\eta_2 = 0.8$, будем варьировать параметрами μ_0 и a на квадрате [-2,3]. Находясь изначально в коротких позициях, непрофессиональные трейдеры остаются в проигрыше из-за резкого подорожания цены акции.

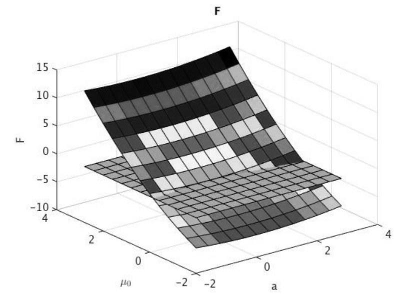

Рис. 3. Изменение активов непрофессиональных трейдеров

3.3. Уход в короткие позиции проницательного трейдера

Рассмотрим следующие параметры: $T = 5$, $P_0 = 70$, $S^0(0) = 10$, $h = 3$, $\tau = 0.5$, $\mu_0 = -1$, $a = 1$, $K_0 = 10$, $\eta_1 = 5$, $\eta_2 = 0.5$, $\lambda = 0.5$, $\sigma = 2$, $\delta_0 = 0.8$, $\theta = 1$. В результате применения оптимальной стратегии проницательно трейдера, получаем: $P(T) = 71.31$, $F = 0.8$, $L_{BT} = 0.4$.

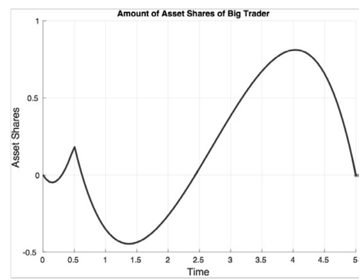

Рис. 4. Число акций проницательного трейдера

Рис. 5. Изменение цены акции

Литература

1. *Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C. and Zirilli F.* (2014) A Trading Executional Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. Applied Mathematics, 5, 3091-3116.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392с.

Трусов Николай Всеволодович. Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия. Студент. Область научных интересов: математическое моделирование экономики. E-mail: trunick.10.96@gmail.com

Application of Mean Field Games approximation to economic processes modeling

N.V. Trusov[1]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. We present a trading execution model of professional trader and retail traders on financial market [1]. The behavior of retail traders is described by a system of PDE's that, by some assumptions, can be reduced to ODE's system. The optimal strategy of professional trader is based on optimal control theory.

Keywords: *Bellman equation, Fokker-Planck equation, optimal control, Riccati equations.*

DOI: 10.14357/20790279180221

References

1. *Fatone L., Mariani F., Recchioni M.C. and Zirilli F.* (2014) A Trading Executional Model Based on Mean Field Games and Optimal Control. Applied Mathematics, 5, 3091-3116.
2. *Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Mathematical theory of optimal processes (in Russian). Moscow: Nauka, 1983.

Trusov N.V. Bachelor, Lomonosov Moscow State University, 119234, 1 Leninskie gory, Moscow, Russia. Research interests: mathematical modeling in economics. E-mail: trunick.10.96@gmail.com