

Математическое моделирование

Динамическая модель миграционного взаимодействия региональных систем с энтропийным оператором*

Ю.С. Попков^{1,II}

¹ Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

^{II} Braude College of Haifa University, Karmiel, Israel

Аннотация. Разработана динамическая модель миграционного взаимодействия региональных систем с энтропийным оператором. Исследованы свойства энтропийного оператора, получены условия существования и единственности сингулярной точки в динамической модели с энтропийным оператором. Рассмотрен иллюстративный пример миграционного взаимодействия региональных систем.

Ключевые слова: миграция, региональная мобильность, априорные вероятности миграционных переходов, динамическая система с энтропийным оператором, монотонный оператор, устойчивость в малом, сингулярная точка.

DOI: 10.14357/20790279180301

Введение

Процессы миграции населения, наряду с биологическим воспроизводством, являются одним из важнейших факторов, определяющих его пространственное распределение. Реализация указанных факторов происходит в существенно различных временных шкалах. Считается, что время релаксации процессов миграции составляет 2–3 года, тогда как время релаксации процессов биологического воспроизводства составляет 10–13 лет. (см. [1–3]. Одной из характеристик населения является его численность, а точнее, ее распределение на некотором регионализированном пространстве. Миграция оказывает существенное влияние на пространственно-временную эволюцию распределения численности населения. Если рассматривать интервалы времени, соизмеримые с временем релаксации миграционных процессов, то влияние факторов биологического воспроизводства не велико и им можно пренебречь.

Математическому моделированию и исследованию процессов межрегиональной миграции посвящено огромное количество работ. Кажется уместным

начать с монографий [7, 8], которые посвящены широкому кругу проблем межрегиональной миграции, включая проблемы математического моделирования миграционных потоков. Следует отметить, что проблема миграции затрагивает многие аспекты социально-экономического, психологического, политического статуса пространства, на котором происходит движение населения. Поэтому весьма важным оказывается структурный анализ межрегиональных и внутри-региональных миграционных потоков [5] и мотиваций, генерирующих эти потоки [9,10]. Результаты структурного и мотивационного анализа миграционных процессов являются основой их компьютерного моделирования. В этой области наметилось три направления, каждое из которых опирается на некоторую системы гипотез. Одно из них базируется на стохастической гипотезе о происхождении миграционных мотиваций [6], которая имитируется агентными технологиями компьютерного моделирования [11,12]. К этому направлению примыкают работы, основанные на термодинамической модели миграционных потоков [14,15]. Конечно, этот скромный перечень работ по миграции не ограничивает их многообразие, а лишь, возможно, дает некоторое представление об их тематике.

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 16-29-12878).

В настоящей статье рассматривается взаимодействие двух региональных систем, в одной из которых имеют место традиционные миграционные процессы, а вторая является источником миграционных потоков в первую. Предлагается математическая модель такого взаимодействия в виде динамической системы с энтропийным оператором. В основе ее лежит стохастическая гипотеза о происхождении миграционных потоков, реализованная в терминах условной максимизации обобщенной информационной энтропии. Развивается метод качественного анализа такой динамической системы, включающий определение существования и единственности равновесных распределений региональной численности населения и их устойчивости.

Развиваемый метод иллюстрируется на примере моделирования миграционного взаимодействия трех Европейских стран (Германии, Франции, Италии – система ГФИ) с двумя странами-источниками иммиграции (Сирия, Ливия – СЛ). Сформировано множество равновесных распределений региональной численности, параметризованное следующими характеристиками системы ГФИ: региональной мобильностью, априорными вероятностями миграционных переходов, нормированными удельными региональными затратами на обеспечение иммиграции; и системы СЛ – априорными вероятностями иммиграционных переходов.

1. Структура динамической модели миграции с энтропийным оператором

Рассмотрим пространственную систему, разделенную на N регионов, между которыми происходит обмен населением. Состояние системы в момент времени t характеризуется распределением численности населения по регионам, т.е. вектором $\mathbf{K}(t) = \{K_1(t), \dots, K_N(t)\}$. Изменение этого распределения во времени происходит под влиянием межрегиональной миграции внутри системы и внешней иммиграции, источником которой являются M внешних регионов.

Здесь будет использоваться стохастическая модель миграционных потоков [13]. Согласно этой модели межрегиональные потоки есть следствие случайного, независимого, с некоторыми априорными вероятностями распределения потенциальных мигрантов между регионами системы. Аналогичный механизм описывает иммиграционные потоки из внешних регионов в регионы системы. Иммиграция также характеризуется априорными вероятностями перемещения

потенциальных иммигрантов из внешних регионов в регионы системы. Вероятностной характеристикой этих механизмов, т.е. распределения миграционных потоков, являются соответствующие энтропийные функции или функционалы. Миграционный обмен между регионами системы осуществляется в условиях ограничений на размеры так называемого мобильного населения (населения, склонного к миграции). Обычно предполагается, что количество мобильного населения пропорционально его региональной численности, а коэффициент пропорциональности имеет региональный индекс. Потенциальный объем внешней иммиграции определить трудно, а иногда и невозможно. Однако удается иногда иметь экспертные оценки возможных потоков иммиграции из внешних регионов в регионы системы. Обычно они сильно завышены. Поэтому приходится ограничивать на внешнюю иммиграцию связывать со стоимостными затратами на абсорбцию иммигрантов в регионах системы. Энтропийные характеристики миграционных потоков как функции распределения потоков обладают так называемым <<острым максимумом>>. Это служит основанием гипотезы о существовании реализуемого распределения миграционных и иммиграционных потоков, соответствующих условному максимуму энтропии.

Для того чтобы трансформировать описанную феноменологию в математическую модель, введем следующие обозначения:

- $x_{in}(t), (i, n) = \overline{1, N}$ – миграционные потоки ($i \rightleftharpoons j$) внутри системы;
- $a_{in}(t), (i, n) = \overline{1, N}$ – априорные вероятности перемещения индивида между (i, j) регионами системы;
- $\alpha_n, n = \overline{1, N}$ – доли населения в регионах системы, склонные к миграции;
- $y_{kn}, k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}$ – иммиграционные потоки ($k \rightarrow j$) из внешних регионов в регионы системы;
- $b_{kn}, k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}$ – априорные вероятности иммиграции индивидов из внешних k -регионов в j -регионы системы;
- $c_{kn}, k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}$ – нормированные* удельные обобщенные стоимостные затраты на иммиграцию в регионы системы;
- $c_{kn}^{(s)}, k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}, s = \overline{1, r}$ – нормированные удельные стоимостные затраты на иммиграцию в регионы системы по видам (r) ресурсов;

* Здесь под <<нормированными>> понимаются значения удельных затрат из интервала $[0, 1]$.

- $T(K_1, \dots, K_N)$ – нормированная* функция запасов обобщенного стоимостного ресурса, который может быть израсходован на иммиграцию;
- $T^{(s)}(K_1, \dots, K_N)$ – нормированные функции по типам запасов $s = \overline{1, r}$ стоимостных ресурсов, которые могут быть израсходованы на иммиграцию.

Для моделирования миграционных и иммиграционных потоков будем опираться на стохастические механизмы миграции, характеризующиеся обобщенной информационной энтропией Больцмана:

- для межрегиональной миграции в системе

$$H_M(X) = - \sum_{(i,n)=1; i \neq n}^N x_{in} \ln \frac{x_{in}}{a_{in}}; \quad (1)$$

- для иммиграции из внешних регионов

$$H_I(X) = - \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N y_{kn} \ln \frac{y_{kn}}{b_{kn}}. \quad (2)$$

Миграционные процессы всегда связаны с некоторыми ограничениями. Для межрегиональной миграции внутри системы такие ограничения связаны с количеством мобильного населения в регионах:

$$X \in D(\mathbf{K}) = \{X : \sum_{i=1}^N x_{ni} = \alpha_n K_n(t), \quad n = \overline{1, N}\}. \quad (3)$$

В случае внешней иммиграции такими являются ограничения на ресурсы, которые затрачиваются в системе на обеспечение внешней иммиграции. Согласно указанной выше классификации, имеем следующие модели затрат на иммиграцию:

- обобщенные затраты
- $$Y \in D_G(\mathbf{K}) = \{Y : \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} y_{kn} = T(\mathbf{K}(t))\}, \quad (4)$$

$$c_{kn} \in [0, 1]; \quad T(\mathbf{K}(t)) = \frac{1}{c} \tilde{T}(\mathbf{K}(t)), \quad c = \max_{kn} c_{kn};$$

- затраты по видам ресурсов
- $$Y \in D_D(\mathbf{K}) = \left\{ \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn}^{(s)} y_{kn} = \tilde{T}^{(s)}(\mathbf{K}(t)) \right\}, \quad (5)$$

$$c_{kn}^{(s)} \in [0, 1]; \quad \tilde{T}^{(s)}(\mathbf{K}(t)) = \frac{1}{c^{(s)}} T^{(s)}(\mathbf{K}(t)),$$

$$c^{(s)} = \max_{kn} c_{kn}^{(s)}, \quad s = \overline{1, r}.$$

Функции $T(\mathbf{K}(t))$ и $T^{(1)}(\mathbf{K}(t)), \dots, T^{(r)}(\mathbf{K}(t))$ зависят от распределения численности населения в системе, причем эти зависимости линейные:

$$T(\mathbf{K}(t)) = \sum_{n=1}^N \gamma_n K_n(t), \quad (6)$$

$$T^{(s)}(\mathbf{K}(t)) = \sum_{n=1}^N \beta_{sn} K_n(t), \quad s = \overline{1, r}.$$

* Здесь под «нормированными функциями запаса» понимаются следующее: $T(K_1, \dots, K_N) = \frac{1}{c} \tilde{T}(K_1, \dots, K_N)$, $c = \max_{kn} c_{kn}$, где $\tilde{T}(K_1, \dots, K_N)$ – функция запаса.

Таким образом, энтропийные модели распределения межрегиональных

- миграционных потоков в системе имеет вид:

$$x_{in}^*(t) = \operatorname{argmax} (H_M(X), X \in D(\mathbf{K})), \quad (7)$$

$$(i, n) = \overline{1, N};$$

- иммиграционных потоков из внешних регионов с обобщенными затратами имеет вид:

$$y_{kn}^*(t) = \operatorname{argmax} (H_I(Y), Y \in D_G(\mathbf{K})), \quad (8)$$

$$k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N};$$

- иммиграционных потоков из внешних регионов с затратами по типам ресурсов имеет вид:

$$y_{kn}^*(t) = \operatorname{argmax} (H_I(Y), Y \in D_D(\mathbf{K})), \quad (9)$$

$$k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}.$$

Приведенные модели представляют собой соответствующие *энтропийные операторы*, отображающие пространство R_+^N векторов $\mathbf{K}(t)$ на пространство $R_+^{N^2}$ матриц X , или на пространство R_+^{NM} матриц Y .

2. Исследования энтропийных операторов

2.1 Энтропийный оператор $\mathbf{K} \rightarrow X$

Рассмотрим задачу условной максимизации энтропии (1, 3) и соответствующую функцию Лагранжа:

$$L_M(X, \lambda) = H_M(X) + \sum_{n=1}^N \lambda_n (\alpha_n K_n(t) - \sum_{i=1}^N x_{ni}), \quad (10)$$

где $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ – множители Лагранжа. Условия оптимальности имеют вид:

$$-\left(\ln \frac{x_{ni}}{a_{ni}} + 1 \right) - \lambda_n = 0, \quad (n, i) = \overline{1, N}; \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ni} - \alpha_n K_n(t) = 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

Решение этих уравнений, т.е. потоки эмиграции из n -го региона в i -ый ($i \neq n$), образующие матрицу X_* , имеют вид:

$$x_{ni}^* = \frac{a_{ni}}{\sum_{l=1}^N a_{nl}} \alpha_n K_n(t), \quad (n, i) = \overline{1, N}. \quad (12)$$

В данном случае отображение $(\mathbf{K} \in R_+^N \rightarrow X \in R_+^{N^2})$, т.е. энтропийный оператор, имеет аналитическую форму (12).

Транспонированная матрица X_*^\top имеет элементы:

$$x_{in}^* = \frac{a_{in}}{\sum_{l=1}^N a_{il}} \alpha_i K_i(t), \quad (n, i) = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Ее элементы представляют собой иммиграционные потоки из i -го региона в n -ый ($i \neq n$).

Отсюда следует, что поток сальдо миграции для n -го региона равен

$$S_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^N a_{in} \alpha_i K_i(t)}{\sum_{l=1}^N a_{ln}} - \alpha_n K_n(t), \quad n = \overline{1, N}. \quad (14)$$

2.2 Энтропийный оператор $\mathbf{K} \rightarrow Y$

Рассмотрим задачу максимизации энтропии (2, 3) и соответствующую функцию Лагранжа:

$$L_l(Y, \lambda) = H_l(Y) + \lambda \left[T(\mathbf{K}(t)) - \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} y_{kn} \right], \quad (15)$$

где λ - множитель Лагранжа, и значения нормированных удельных обобщенных стоимостей имеют вид:

$$c_{k_0, n_0} = c = 1, \quad 0 < c_{kn} < 1. \quad (16)$$

Условия оптимальности имеют вид:

$$-\left(\ln \frac{y_{kn}}{b_{kn}} + 1 \right) - \lambda = 0, \quad k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}, \quad (17)$$

$$-\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} y_{kn} + T(\mathbf{K}(t)) = 0.$$

Из этих уравнений получаем энтропийно-оптимальные потоки иммиграции из внешних в регионы системы:

$$y_{kn}^* = \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}}, \quad k = \overline{1, M}, n = \overline{1, N}, \quad (18)$$

$$z = \exp(\lambda) \geq 0, \quad \tilde{b}_{kn} = e^{-1} b_{kn}.$$

Экспоненциальный множитель Лагранжа z определяется решением следующего уравнения:

$$\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}} - T(\mathbf{K}(t)) = 0. \quad (19)$$

В данном случае отображение $\mathbf{K} \rightarrow Y$, характеризующее энтропийный оператор, описывается равенствами (18) и уравнением (19).

Суммарный иммиграционный поток из внешних регионов в регионы системы равен

$$I_n(t) = \sum_{k=1}^M y_{kn}^* = \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (20)$$

3. Исследование модели миграционного взаимодействия региональных систем

В рамках сделанных выше предположений, эволюция состояния системы происходит под влиянием внутренних потоков миграционного сальдо и потока сальдо иммиграционных потоков из внешних регионов:

$$\frac{dK_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N [x_{in}^*(t) - x_{ni}^*(t)] + \sum_{k=1}^M y_{kn}^*, \quad n = \overline{1, N}. \quad (21)$$

Подставляя сюда выражения для миграцион-

ных потоков внутри системы и внешних иммиграционных потоков, получим уравнения динамической модели взаимодействия региональных систем в следующем виде:

$$\frac{dK_n(t)}{dt} = -\alpha_n K_n(t) + \sum_{i=1}^N \frac{a_{in}}{\sum_{l=1}^N a_{ln}} \alpha_i K_i(t) + \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}}, \quad (22)$$

$$n = \overline{1, N},$$

$$\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}} - T(\mathbf{K}(t)) = 0, \quad z \geq 0.$$

3.1 Существование и единственность сингулярной точки

Проблема существования и единственности равновесного состояния в системе связана с исследованием следующих уравнений:

$$(1 - \alpha_n) K_n + \sum_{i=1, i \neq n}^N a_{in} \alpha_i K_i + \sum_{k=1}^M b_{kn} z^{c_{kn}} = K_n, \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\gamma}_n K_n(t) + z - \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}} = z,$$

Введем вектор переменных

$$\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N, u_{(N+1)}\}, \quad (24)$$

$$u_n = K_n, \quad n = \overline{1, N}; u_{(N+1)} = z.$$

Тогда уравнения (23) можно представить в виде:

$$A(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \geq 0, \quad (25)$$

где вектор-функция

$$A(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_1)u_1 + \sum_{i=1, i \neq 1}^N a_{i1} \alpha_i u_i + \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{k1} u_{(N+1)}^{c_{k1}} \\ \dots \\ (1 - \alpha_N)u_N + \sum_{i=1, i \neq N}^N a_{iN} \alpha_i u_i + \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{kN} u_{(N+1)}^{c_{kN}} \\ \sum_{n=1}^N \tilde{\gamma}_n u_n + u_{N+1} - \sum_{k=1}^M \sum_{n=1, n \neq n_0}^N \tilde{c}_{kn} \tilde{b}_{kn} u_{(N+1)}^{c_{kn}} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Якобиан этой функции имеет вид:

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$J_{11} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & a_{21} \alpha_2 & \dots & a_{N1} \alpha_N \\ a_{12} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & \dots & a_{N2} \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} \alpha_1 & a_{2N} \alpha_2 & \dots & -\alpha_N \end{pmatrix} > 0, \quad (28)$$

$$J_{12} = \left(\sum_{k=1}^M \tilde{b}_{k1} c_{k1} u_{(N+1)}^{(c_{k1}-1)} \dots \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{kN} c_{kN} u_{(N+1)}^{(c_{kN}-1)} \right)^T > 0,$$

$$J_{21} = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_N) > 0,$$

$$J_{22} = 1 - \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn} \tilde{b}_{kn} c_{kn} u_{N+1}^{(c_{kn}-1)}.$$

Теорема 1. Пусть $J_{22} > 0$. Тогда функция $A(\mathbf{u})$ – строго монотонна на $R_+^{(N+1)}$.

Доказательство. При выполнении условия теоремы все элементы якобиана больше нуля, что и доказывает утверждение теоремы.

Пусть известно распределение населения по регионам системы в начальный момент времени t_0 , т.е. $\{K_1(t_0) = u_1^0, \dots, K_N(t_0) = u_N^0\}$. Обозначим решение последнего уравнения в (25), (26) $u_{N+1}^0 > 0$. Определим вектор $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, \dots, u_N^0, u_{N+1}^0\}$. Допустим, что по экспертной оценке объемов иммиграция из внешних регионов, численность населения в регионах системы может увеличиться в $\kappa > 1$ раз. Это означает, что для $t > t_0$ численности $\{K_1(t) < \kappa u_1^0 = \tilde{u}_1, \dots, K_N(t) < \kappa u_N^0 = \tilde{u}_N\}$. Обозначим решение последнего уравнения в (25), (26) для указанного набора верхних оценок региональных численностей населения $\tilde{u}_{N+1} > u_{N+1}^0 > 0$. Определим вектор $\tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N, \tilde{u}_{N+1}\}$. Определим векторный отрезок $U = \{\mathbf{u}^0, \tilde{\mathbf{u}}\}$.

Теорема 2. Пусть для уравнения (26) выполняются следующие условия:

$$A(\mathbf{u}^0) > \mathbf{u}^0, \quad A(\tilde{\mathbf{u}}) < \tilde{\mathbf{u}}. \quad (29)$$

Тогда на векторном отрезке U существует по крайней мере одно решение \mathbf{u}^* уравнения (26).

Доказательство следует из ([17], теорема 3.1, стр.48). Из этой теоремы также следует, что итерационный процесс

$$A(\mathbf{u}^s) = \mathbf{u}^{(s+1)}, \quad \mathbf{u}(0) \in U, \quad (30)$$

сходится к точке \mathbf{u}^* .

3.2 Устойчивость сингулярной точки

Для анализа устойчивости сингулярной точки представим систему уравнений (22) в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(\mathbf{u}) - \mathbf{u}. \quad (31)$$

Обозначим $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*$ – отклонение от сингулярной точки. Применяя стандартную процедуру линеаризации, получим следующее дифференциальное уравнение относительно отклонения от сингулярной точки:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \tilde{J}(\mathbf{u}^*)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in R^{(N+1)}, \quad (32)$$

где

$$\tilde{J}(\mathbf{u}^*) = J(\mathbf{u}^*) - E. \quad (33)$$

Система дифференциальных уравнений (38) линейная, и существует много методов исследова-

ния устойчивости ее положения равновесия. Изложим здесь метод, основанный на локализации собственных чисел матрицы $\tilde{J}(\mathbf{u}^*)$ с помощью кругов Гершгорина [18]. Согласно теореме Гершгорина, любое собственное число матрицы $\tilde{J}(\mathbf{u}^*)$ лежит по крайней мере в одном из кругов комплексной плоскости с центром c_i и радиусом ϱ_i , где

$$c_i = \begin{cases} -\alpha_i, & i = \overline{1, N}, \\ -\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn}^2 \tilde{b}_{kn} u_{N+1}^{(c_{kn}-1)}, & i = N+1, \end{cases} \quad (34)$$

$$\varrho_i = \sum_{j=i}^{(N+1)} |d_{ij}|, \quad i = \overline{1, (N+1)}, \quad (35)$$

где

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & (i, j) = \overline{1, N}, j \neq i, \\ \sum_{k=1}^M \tilde{b}_{kn} c_{ki} [u_{N+1}^{(c_{ki}-1)}]^*, & i = \overline{1, N}, j = N+1, \\ \gamma_j, & i = N+1, j = \overline{1, N}, \\ -\sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N c_{kn}^2 \tilde{b}_{kn} [u_{N+1}^{(c_{kn}-1)}]^*, & (i, j) = N+1. \end{cases} \quad (36)$$

Из этих равенств следует, что центры $c_i < 0, i = \overline{1, (N+1)}$, а радиусы $\varrho_i > 0, i = \overline{1, (N+1)}$.

Теорема 3. Пусть

$$c_i + \varrho_i < 0, i = \overline{1, (N+1)}. \quad (37)$$

Тогда сингулярная точка \mathbf{u}^* системы (22) устойчива в малом.

Доказательство. При выполнении условий теоремы вещественные части собственных чисел матрицы $\tilde{J}(\mathbf{u}^*)$ отрицательные.

4. Пример модели миграционного взаимодействия

Появление территорий, экономический статус которых падает, всегда приводит к росту иммиграционной активности. Начало XXI века сопровождалось формированием многочисленных таких территорий в Северной и Центральной Африке, Ближнем Востоке, Афганистане и др. В результате в Европу двинулись десятки миллионов мигрантов, уровень жизни которых в этих зонах опустился ниже прожиточного минимума. Для фильтрации и приема иммигрантов страны Европы вынуждены заграничивать значительные ресурсы, необходимый объем которых не всегда оказывается допустимым для них.

Рассмотрим в качестве иллюстрации миграционное взаимодействие между тремя европейскими странами (система S) - регионы с индексом

n : Германия (1), Франция (2) и Италия (3), и двумя источниками иммиграции (система I)- регионы с индексом k : Сирия (1), Ливия (2). В терминах математической модели (22) будем иметь:

$$\frac{dK_n(t)}{dt} = -\alpha_n K_n(t) + \sum_{i=1, i \neq n}^3 \frac{a_{in}}{\sum_{l=1, l \neq n}^n a_{ln}} \alpha_i K_i(t) + \sum_{k=1}^2 \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}},$$

$$n = 1, 2, 3;$$

$$\sum_{n=1}^3 \gamma_n K_n(t) - \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^3 c_{kn} \tilde{b}_{kn} z^{c_{kn}} = 0. \quad (38)$$

4.1 Формирования массивов данных для численного исследования модели (38)

Эта модель имеет четыре группы модельных параметров:

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – характеристики мобильности населения в системе S ;
- $A = [a_{in}, (i, n) = 1, N, a_{nn} = 0]$ – матрица априорных вероятностей индивидуальной миграции в системе S ;
- $B = [b_{kn}, k = 1, 2; n = 1, 2, 3]$ – матрица априорных вероятностей индивидуальной иммиграции из системы I ;
- $C = [c_{kn}, k = 1, 2; n = 1, 2, 3]$ – матрица удельных нормированных затрат в системе S на обеспечение иммиграции из системы I .

Напомним, что значения элементов первых трех групп параметров строго меньше единицы. Матрица C имеет максимальный элемент, равный 1, и остальные строго меньше единицы. Коэффициенты* $\gamma_1 = 2,00; \gamma_2 = 2,53; \gamma_3 = 1,65$.

Введем четырехмерное признаковое пространство $P \subset R_+^4$ статусных переменных: ν - мобильности, π - миграционного выбора, μ - иммиграционного выбора, T - масштаба затрат. Внутри каждой группы назначим соотношения в баллах по десятичной шкале между параметрами, которые в основном определяются региональной численностью и уровнем экономического развития:

- мобильность (m): $m_1 = 7; m_2 = 8; m_3 = 5$;
- миграционный выбор (h): $h_{12} = 3, h_{13} = 3, h_{21} = 5, h_{23} = 2, h_{31} = 6, h_{32} = 4$;
- иммиграционный выбор (q): $q_{11} = 6, q_{12} = 5, q_{13} = 4, q_{21} = 4, q_{22} = 6, q_{23} = 6$;
- иммиграционные затраты (e): $e_{11} = 5, e_{12} = 6, e_{13} = 5, e_{21} = 5, e_{22} = 6, e_{23} = 5$.

Тогда параметры в указанных группах представим в следующем виде:

- характеристики мобильности населения в системе S

$$\alpha_n = \nu m_n, \quad n = 1, 2, 3; \quad (39)$$

- априорные вероятности индивидуальной миграции в системе S

$$a_{in} = \pi h_{in}, \quad (i, n) = 1, 2, 3; \quad (40)$$

- априорные вероятности индивидуальной иммиграции из системы I ;

$$\tilde{b}_{kn} = \mu q_{kn}, \quad k = 1, 2; n = 1, 2, 3; \quad (41)$$

- удельные нормированные затраты в системе S на обеспечение иммиграции из системы I

$$c_{kn} = T e_{kn}, \quad k = 1, 2; n = 1, 2, 3. \quad (42)$$

Определим области существования F статусных переменных в виде:

$$F = N \otimes P \otimes M \otimes T,$$

$$\nu \in N = [10^{-3}; 2 \cdot 10^{-3}]; \pi \in P = [0,5 \cdot 10^{-1}; 1,5 \cdot 10^{-1}]; \quad (43)$$

$$\mu \in M = [0,5 \cdot 10^{-1}; 1,5 \cdot 10^{-1}]; T \in T = [0,1; 0,5]. \quad (44)$$

Поскольку далее будет использоваться простой перебор на пространственной сетке, то каждый интервал разделим на четыре подинтервала. Тогда реализуется простой перебор на 256-ти узлах сетки. Дискретные формы представленных выше интервалов имеют вид:

$$\tilde{N} = 10^{(-1)} \cdot [0,5; 1,0; 1,5; 2,0], \quad \tilde{P} = 10^{-1} \cdot [0,75; 1,00; 1,25; 1,50],$$

$$\tilde{M} = 10^{-1} [0,75; 1,00; 1,25; 1,50], \quad \tilde{T} = [0,2; 0,3; 0,4; 0,5]. \quad (45)$$

Сетка есть прямое произведение этих интервалов:

$$\tilde{F} = \tilde{N} \otimes \tilde{P} \otimes \tilde{M} \otimes \tilde{T}. \quad (46)$$

4.2 Равновесные распределения региональной численности в системе S

Исследование равновесий в системе S связано с поиском решений следующих уравнений:

$$-\nu m_n K_n + \sum_{i=1, i \neq n}^3 \frac{\pi h_{in}}{\sum_{l=1, l \neq n}^n \pi h_{ln}} \nu m_l K_l + \sum_{k=1}^2 \mu q_{kn} z^{T e_{kn}} = 0,$$

$$n = 1, 2, 3;$$

$$2,0K_1 + 2,53K_2 + 1,65K_3 - \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^3 T e_{kn} \mu q_{kn} z^{T e_{kn}} = 0. \quad (47)$$

Начальные значения переменных $K_1^0 = 82, K_2^0 = 67, K_3^0 = 60, z^0 = 0,1$. Численность населения в млн. чел. На рис. 1 показаны результаты вычислений равновесных распределений региональной численности (K_1^*, K_2^*, K_3^*) для значений параметров систем S и I из сетки F (52). Облако K содержит 256 точек, соответствующих узлам сетки (52). Центр облака соответствует среднему распределению региональной численности:

$$\bar{K} = \frac{1}{256} \sum_{i=1}^{256} K^i = \{82,4742; 67,4147; 60,9189\}. \quad (48)$$

* Значения этих коэффициентов определяются правилом распределения иммиграционной части бюджета ЕЭС между странами-членами.

Полезной характеристикой облака является его дисперсионное ядро R – куб внутри облака со сторонами, равными

$$R_n = \frac{2}{256} \sum_{i=1}^{256} (K_n - \bar{K}_n)^2, \quad n = 1, 2, 3;$$

$$R_1 = 0,5692; R_2 = 0,4626; R_3 = 0,3436.$$

4.3 Устойчивость равновесного распределения региональной численности в системе S

Для устойчивости в малом равновесных распределений необходимо и достаточно, чтобы вещественные части собственных чисел матрицы \tilde{J} (33) находились в интервалах (37). Согласно теореме 3 имеем следующее условие устойчивости:

$$\max_i (c_{ii}^* + \varrho_i^*) \leq 0, \quad (49)$$

где знак (*) обозначает значения переменных, соответствующие равновесному распределению, ϱ_i^* определено равенством (41), и

$$c_{ii}^* = \begin{cases} -v^* m_i, & i = \overline{1, 3}, \\ -[T^2 \mu]^* \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N e_{kn}^2 q_{kn} [z^*]^{(T^* e_{kn} - 1)}, & i = 4; \end{cases} \quad (50)$$

$$d_{ij}^* = \begin{cases} \pi^* h_{ij}, & (i, j) = \overline{1, 3}, j \neq i, \\ [T \mu]^* \sum_{k=1}^M q_{ki} e_{ki} [z^*]^{(T^* e_{ki} - 1)}, & i = \overline{1, 3}, j = 4, \\ \gamma_j, & i = 4, j = \overline{1, 3}, \\ -[T^2 \mu]^* \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N e_{kn}^2 q_{kn} [z^*]^{(T^* e_{kn} - 1)}, & (i, j) = 4. \end{cases} \quad (51)$$

Табл. 1

Коэффициенты мобильности

| Обозначения | α_1 | α_2 | α_3 |
|-------------|------------|------------|------------|
| C_1 | 0,0105 | 0,0120 | 0,0075 |
| C_2 | 0,0070 | 0,0080 | 0,0050 |
| C_3 | 0,0140 | 0,0160 | 0,0100 |

Табл. 2

Априорные вероятности региональной мобильности

| C_1 | | | C_2 | | | C_3 | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,000 | 0,375 | 0,375 | 0,000 | 0,300 | 0,300 | 0,000 | 0,450 | 0,450 |
| 0,625 | 0,000 | 0,250 | 0,500 | 0,000 | 0,200 | 0,750 | 0,000 | 0,300 |
| 0,750 | 0,500 | 0,000 | 0,600 | 0,400 | 0,000 | 0,900 | 0,600 | 0,000 |

Табл. 3

Априорные иммиграционные вероятности

| C_1 | | | C_2 | | | C_3 | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,900 | 0,750 | 0,600 | 0,750 | 0,625 | 0,500 | 0,600 | 0,500 | 0,600 |
| 0,600 | 0,900 | 0,900 | 0,500 | 0,750 | 0,750 | 0,400 | 0,600 | 0,600 |

Табл. 4

Удельные нормированные затраты

| C_1 | | | C_2 | | | C_3 | | |
|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
| 0,83 | 1,00 | 0,83 | 0,66 | 0,80 | 0,66 | 0,50 | 0,60 | 0,50 |
| 0,83 | 1,00 | 0,83 | 0,66 | 0,80 | 0,66 | 0,50 | 0,60 | 0,50 |

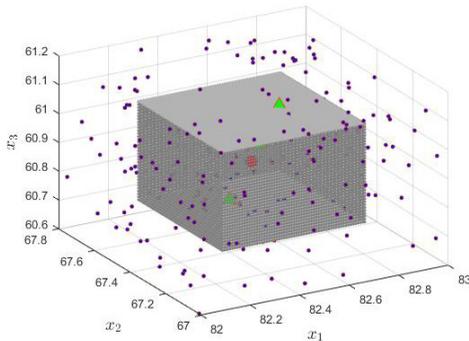


Рис. 1

На рис. 1 отмечены 3 равновесных распределений (треугольные знаки) с координатами:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{82, 6228; 67, 4256; 61, 0597, 1\}, \\
 C_2 &= \{82, 5310; 67, 4051; 60, 9496\}, \\
 C_3 &= \{82, 2856; 67, 2362; 60, 8639\}, \quad (52)
 \end{aligned}$$

для которых выполняются условия устойчивости в малом. Указанным устойчивым в малом равновесным распределениям региональной численности соответствуют параметры модели (38), приведенные в табл.1–3.

Таким образом, если известны параметры модели (38), то могут быть определены ее основные динамические характеристики – равновесные устойчивые распределения региональной численности, которые могут использоваться для краткосрочного прогнозирования.

Заключение

Разработана динамическая модель миграционного взаимодействия с энтропийным оператором. Исследованы энтропийные операторы, описывающие распределения миграционных и иммиграционных потоков. Получены условия существования и единственности равновесных распределений региональной численности, и их устойчивости. Разработанная модель применена для анализа равновесных распределений региональной численности населения и их устойчивости. Условия существования и устойчивости указанных распределений зависят от параметров модели, для определения которых могут быть применены методы рандомизированного машинного обучения.

Литература

1. Zelinsky W. The hypothesis of the Mobility Transition. *Geographic Review*, v.46, p.219-249.
2. Bilecen B., Van Mol C. Introduction international academic mobility and inequalities. *Journal of Ethic and Migration Studies*, 2017, v.43(8), p.1241-1255.

3. Weidlich W. *Sociodynamics*. Harwood Academic Publishers, 2000, 456 p.
4. Popkov Yu.S. Theory of dynamic entropy-operator systems and its applications. *Automation and Remote Control*, 2006, v.67, issue 6, p.900-926.
5. van der Knaap G.A., Steegers W.F. Structural Analysis of Interregional and Intraregional Migration Patterns. In: Heide H., Willekens F. *Demographic Research and Spatial Policy*. Academic Press, 1984, p. 123-134.
6. Pan J., Nagurney A. Using Markov chains to model human migration in a network equilibrium framework. *Mathematical and Computer Modelling*, 1994, v.19, is. 11, p.31-39.
7. Rogers A., Willekens F., Raymer J. Modelling Interregional Migration Flows: Continuity and Change. *Journal of Mathematical Population Studies*, 2001, v.9, is. 3-4, p.231-263.
8. Rogers A., Little J., Raymer J. *The Indirect Estimation of Migration: Methods for dealing with irregular, inadequate, and missing data*. 2010, Springer, Dordrecht.
9. Black R., Xiang B., Caller M., Engberson G., Heering L., Markova E. Migration and Development causes and consequences. In: Penninx R., Berger M., Kraal K. (eds) *The dynamics of international migration and settlement in Europe: a state of the art*. Amsterdam, 2006, Amsterdam University Press, p.41-63.
10. Volpert V., Petrovskii S., Zinenko A. Interaction of human migration and wealth distribution. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, v 150, p.408-423.
11. Klabunde A., Zinn S., Willekens F., Leuchter M., Multistable Modelling extended by behavioural rules. An application to migration. *Population Studies 71 (Special Issue)*, 2017, p.61-67.
12. Klabunde A., Willekens F. Decision-making in agent-based models of migration state of the art and challenges. *European Journal of Population*, 2016, v.32(1), p.73-97.
13. Popkov Yu.S. *Mathematical Demoeconomics: Integrative Demographic and Economic Approach*. De Gruyter, 2014, Berlin.
14. Wilson A.G. *Entropy in Urban and Regional modelling*. Pion Ltd, 1970, London.
15. Imelbayev Sh.S., Shmulyan B.L. Моделирование стохастических коммуникационных систем. В кн. Вильсон А.Дж. “Энтропийные методы моделирования сложных систем”. М.: Наука, 1975, с.170-234.
16. Popkov Yu.S. *Macrosystems Theory and its Applications*. Springer, NY, 1995, p.322.
17. Krasnoselsky M.A., et all *Priblizenie resheniya operatornih uravnenii*, М., “Nauka”, 1969, 345с..
18. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970, 564с..

Попков Юрий Соломонович. Институт системного анализа Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук. Москва, Россия. Директор, доктор технических наук, профессор, академик РАН. Количество печатных работ: 230 (в т.ч. 8 монографий). Область научных интересов: макросистемы, оптимизация, статистика, прогнозирование. E-mail: popkov.yuri@gmail.com

Dynamic model of migrative interaction of the regional systems with entropy operator

Yu.S. Popkov^{1,II}

¹ Federal Research Center “Informatics and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^{II} Braude College of Haifa University, Karmiel, Israel

Abstract. The dynamic model of migrative interaction of the regional systems with entropy operator is developed. Existing and uniqueness conditions are formulated. Example of migrative interaction is considered.

Keywords: migration, mobility, prior probability, dynamic system, stability, singular points.

DOI: 10.14357/20790279180301

References

1. Zelinsky W. The hypothesis of the Mobility Transition. *Geographic Review*, v.46, p.219-249.
2. Bilecen B., Van Mol C. Introduction international academic mobility and inequalities. *Journal of Ethic and Migration Studies*, 2017, v.43(8), p.1241-1255.
3. Weidlich W. *Sociodynamics*. Harwood Academic Publishers, 2000, 456 p.
4. Popkov Yu.S. Theory of dynamic entropy-operator systems and its applications. *Automation and Remote Control*, 2006, v.67, issue 6, p.900-926.
5. van der Knaap G.A., Steegers W.F. Structural Analysis of Interregional and Intraregional Migration Patterns. In: Heide H., Willekens F. *Demographic Research and Spatial Policy*. Academic Press, 1984, p. 123-134.
6. Pan J., Nagurney A. Using Markov chains to model human migration in a network equilibrium framework. *Mathematical and Computer Modelling*, 1994, v.19, is. 11, p.31-39.
7. Rogers A., Willekens F., Raymer J. Modelling Interregional Migration Flows: Continuity and Change. *Journal of Mathematical Population Studies*, 2001, v.9, is. 3-4, p.231-263.
8. Rogers A., Little J., Raymer J. *The Indirect Estimation of Migration: Methods for dealing with irregular, inadequate, and missing data*. 2010, Springer, Dordrecht.
9. Black R., Xiang B., Caller M., Engbersen G., Heering L., Markova E. Migration and Development causes and consequences. In: *Penninx R., Berger M., Kraal K. (eds) The dynamics of international migration and settlement in Europe: a state of the art*. Amsterdam, 2006, Amsterdam University Press, p.41-63.
10. Volpert V., Petrovskii S., Zencenko A. Interaction of human migration and wealth distribution. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2017, v 150, p.408-423.
11. Klabunde A., Zinn S., Willekens F., Leuchter M., Multistable Modelling extended by behavioural rules. An application to migration. *Population Studies* 71 (Special Issue), 2017, p.61-67.
12. Klabunde A., Willekens F. Decision-making in agent-based models of migration state of the art and challenges. *European Journal of Population*, 2016, v.32(1), p.73-97.
13. Popkov Yu.S. *Mathematical Demoeconomics: Integrative Demographic and Economic Approach*. De Gruyter, 2014, Berlin.
14. Wilson A.G. *Entropy in Urban and Regional modelling*. Pion Ltd, 1970, London.
15. Imelbayev Sh.S., Shmulyan B.L. *Modeling of stochastic communication systems*. In: A.G. Wilson “Entropy methods of modelling of complex systems”, Nauka, 1975, c.170-234.
16. Popkov Yu.S. *Macrosystems Theory and its Applications*. Springer, NY, 1995, p.322.
17. Krasnoselsky M.A., et al. *Priblizenie resheniya operatornih uravnenii*, M., “Nauka”, 1969, 345c.
18. Wilkinson J.H. *The algebraic eigenvalue problem*, 1965, Clarendon Press, Oxford, 564p.

Popkov Yuri Solomonovich. Institut for Systems Analysis, Federal Research Center “Informatics and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Director, dr.S, academision of RAS. 230 workpaper, Macrosystem theory, optimization, ctatistics. E-mail: popkov.yuri@gmail.com