Оценка решений периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством

М.В. Морозов[I]

[I] Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Получена оценка экспоненциального вида для решений периодического однородного дифференциального включения с асимптотически устойчивым множеством.

Ключевые слова: *периодическое однородное дифференциальное включение, асимптотически устойчивое множество.*

DOI: 10.14357/20790279180410

Введение

В [1] отмечено, что некоторые виды систем управления с периодическими параметрами эквивалентны (в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений) периодическому по времени дифференциальному включению. Теория дифференциальных включений хорошо развита, однако в работах, связанных с периодическими по времени дифференциальными включениями, в основном рассматриваются вопросы существования периодических решений. Немного работ посвящено исследованию свойств решений периодических по времени дифференциальных включений. В [1] дан краткий обзор таких публикаций и установлены некоторые свойства решений периодических дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами. Данная статья является продолжением [1].

1. Постановка задачи

Прежде чем сформулировать задачу приведем необходимые определения и теорему, доказанную в [1]. Рассмотрим периодическое дифференциальное включение вида:

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) \equiv F(t+T,x),$$
$$\mathrm{t} \geq 0,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \quad \mathrm{T} = \mathrm{const}, \quad \mathrm{T} > 0. \qquad (1)$$

Везде далее будем предполагать, что многозначная функция $F(t,x)$ в некоторой области $G = \{0 \leq t \leq T,\ x \in G_R,\ \mathrm{G_R} = \{x_0 : \|x_0\| \leq R\}$ удовлетворяет основным условиям [2, с. 60], т.е. при всех $(t,x) \in G$ множество $F(t,x) \subset R^n$ является непустым, ограниченным, замкнутым, выпуклым и функция $F(t,x)$ полунепрерывна сверху [2, с. 52] по (t,x).

Решением включения (1) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке **I**, которая почти всюду на **I** удовлетворяет (1). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t,x)$ при исследовании свойств решений $x(t,t_0,x_0)$ включения (1) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0,T]$.

Из определения решения и периодичности по t правой части включения (1) вытекают следующие два свойства. Если функция $x(t)$ является решением включения (1) (при $\alpha < t < \beta$), то:

1) функция $x(t+kT)$ ($\alpha - kT < t < \beta - kT$, k – любое целое число) также является решением включения (1) и эти решения имеют одну и ту же траекторию;
2) для любых $t_0 \in [0,T]$, t_1, t таких, что $t_0 \leq t_1 \leq t$, выполнено равенство $x(t,t_1,x(t_1)) = x(t,t_0,x_0)$, где $x(t_1) = x(t_1,t_0,x_0)$.

Пусть $a \in R^n$, $b \in R^n$ точки (векторы) с координатами a_i, b_i, $i = \overline{1,n}$. $B \subset R^n$ – множество. Под расстоянием ρ между точками или точкой и множеством будем понимать следующие неотрицательные числа:

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2\right)^{1/2},$$

$$\rho(a,B) = \inf_{b \in B}(a,b).$$

Известно, что функция $\varphi(x) = \rho(x,B)$ равномерно непрерывна, для любых точек $x \in R^n$, $y \in R^n$ выполнено неравенство $|\rho(\mathrm{x}, B) - \rho(\mathrm{y}, B)| \le \rho(x, \mathrm{y})$. Замкнутой ε-окрестностью M^{ε} множества M будем называть множество таких точек x, что $\rho(x, \mathrm{M}) \le \varepsilon$. Пусть $M^{\varepsilon_0} \subset G$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.

Определение 1. Множество M называется асимптотически устойчивым для включения (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого x_0, для которого $\rho(x_0, \mathrm{M}) \le \delta(\varepsilon)$, существует решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$, все такие решения продолжаются на интервал $t_0 \le t < \infty$ и удовлетворяют условиям:

$$\rho(x(t), \mathrm{M}) \le \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty,$$
$$\rho(x(t), \mathrm{M}) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Теорема 1. *Если ограниченное множество* M *асимптотически устойчиво для включения (1), то существует такое* $\delta_0 > 0$, *что для любых* $t_0 \in [0, T]$ *и* $x_0 \in M^{\delta_0}$ *все решения* $x(t, t_0, x_0)$ *включения (1) удовлетворяют условию*

$$\rho(x(t), \mathrm{M}) \to 0 \text{ при } t \to \infty \qquad (2)$$

равномерно по (t_0, x_0).

Доказательство Теоремы 1 приведено в [1].

Далее будем рассматривать однородные по $x \in R^n$ дифференциальные включения. Если B – множество в R^n, c – число, то cB обозначает множество точек вида cx для всех $x \in B$.

Определение 2. Многозначная функция $F(t, x)$ называется однородной (первой степени) по x, если $F(t, cx) \equiv cF(t, x)$ для всех $c > 0$.

Определение 3. Дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (F(t, cx) \equiv cF(t, x),\ c > 0) \qquad (3)$$

называется однородным по x.

Однородное дифференциальное включение (3) не меняется при замене $x = cx_1$ с любым $c > 0$. Это значит, что если функция $x = \varphi(t)$ – решение включения (3), то для любого $c > 0$ функция $x = c\varphi(t)$ тоже является решением.

Рассмотрим периодическое по t и однородное по x дифференциальное включение:

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (\mathrm{t} \ge 0,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^n),$$
$$F(t, x) \equiv F(t + T, x),\ (\mathrm{T} = \mathrm{const},\quad \mathrm{T} > 0),$$
$$F(t, cx) \equiv cF(t, x),\ \ (c > 0). \qquad (4)$$

В силу однородности включения (4) по x справедливо

Следствие теоремы 1. *Если ограниченное множество* M *асимптотически устойчиво для включения (4), то все решения* $x(t, t_0, x(t_0))$ *включения (4) с начальными условиями* $t_0 \in [0, T]$, $x_0 \in G_R$ *(где* R *– любое положительное число) удовлетворяют условию (2) равномерно по* (t_0, x_0).

Задача состоит в получении оценки экспоненциального вида для решений периодических однородных дифференциальных включений вида (4) при наличии асимптотически устойчивого множества.

2. Основной результат

Теорема 2. *Если ограниченное множество* M *асимптотически устойчиво для включения (4), то существуют такие числа* $c_0 > 0,\ c_1 > 0$, *что для каждого решения* $x(t, t_0, x_0)$ *включения (4) при любых* t_0 *и* $t \ge t_0$ *выполнена оценка*:

$$\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le c_0 \|x_0\| e^{-c_1 t} \quad (\mathrm{t}_0 \le t < \infty). \qquad (5)$$

Доказательство Теоремы 2 приведено в приложении.

3. Приложение

Доказательство Теоремы 2. В силу следствия Теоремы 1 для некоторого $\delta > 0$ существует такое $\tau > 0$ (не зависящее от (t_0, x_0)), $\tau = \tilde{k}T$ ($\tilde{k}$ – некоторое натуральное число), что для всех решений $x(t, t_0, x_0)$ с начальными условиями $\|x_0\| \le \delta$ выполнено неравенство $\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le \delta / 2$ при $\tau + \mathrm{t}_0 \le t < \infty$. В силу Теоремы 3 [2, с. 62] множество решений включения (4) компактно на отрезке $[t_0, \mathrm{t}_0 + \tau]$ в метрике $\mathbf{C}[t_0, \mathrm{t}_0 + \tau]$, поэтому $\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le c_2\delta$ $(c_2 > 0)$ при $t_0 \le t \le \mathrm{t}_0 + \tau$.

Если $x(t, t_0, x_0)$ – решение с любым $x_0 \ne 0$, то при $c = \delta / \|x_0\|$ функция $y(t, t_0, y_0) = cx(t, t_0, x_0)$ тоже решение, $\|y_0\| = \delta$, поэтому $\rho(y(t, t_0, \mathrm{y}_0), \mathrm{M}) \le \delta / 2$ $(\tau + \mathrm{t}_0 \le t < \infty)$, $\rho(y(t, t_0, \mathrm{y}_0), \mathrm{M}) \le c_2\delta$ $(\mathrm{t}_0 \le t < t_0 + \tau)$. Возвращаясь от $y(t, t_0, y_0)$ к $x(t, t_0, x_0)$, получим для любых t_0 и x_0

$$\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le c_2\|x_0\| \quad (\mathrm{t}_0 \le t < t_0 + \tau),$$

$$\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le \|x_0\| / 2 \quad (\tau + \mathrm{t}_0 \le t < \infty). \qquad (6)$$

Так как после замены t на $t + kT$ (k – любое целое число) решение включения (4) остается решением, то из (6) следует, что для решения $x(t, t_0, x_0)$ с любым x_0 выполнены соотношения:

$$\rho(x(t, t_0, \mathrm{x}_0), \mathrm{M}) \le 2^{-i}\|x_0\| \quad (\mathrm{t}_\mathrm{i} \le t < \infty), \qquad (7)$$

где $\mathrm{t}_\mathrm{i} = t_0 + i\tau,\ i = 1, 2, \ldots$

Для любого $t \geq t_0$ возьмем такое i, чтобы выполнялись неравенства $t_{i-1} \leq t < t_i$. Тогда $t < t_0 + i\tau$ и $i > (t - t_0)/\tau$. Следовательно, выполнено неравенство $2^{-i} = e^{-i\ln 2} < e^{-\ln 2(t-t_0)/\tau} = e^{t_0 \ln 2/\tau} e^{-t\ln 2/\tau}$. Отсюда и (7) следует оценка (5) с $c_0 = e^{t_0 \ln 2/\tau}$, $c_1 = \ln 2/\tau$. Теорема 2 доказана.

Заключение

Для однородного периодического включения (4) с ограниченным асимптотически устойчивым множеством получена оценка решений (5) экспоненциального вида. Такая оценка была получена разными авторами для автономных [2] и периодических [3] дифференциальных включений с асимптотически устойчивым нулевым решением. Для включений рассмотренного в данной работе вида подобная оценка получена впервые. Дальнейшее исследование рассмотренных выше включений может быть связано с изучением поведения их решений при возмущении многозначной функции $F(t, x)$.

Литература

1. *Морозов М.В.* О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами // Труды ИСА РАН. Т. 67. Вып. 3. 2017. С. 13-19.
2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. *Морозов М. В.* О свойствах периодических дифференциальных включений // Диф. уравн., Т. 36. № 5. 2000. С. 612-617.

Морозов Михаил Владимирович. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 47. Область научных интересов: теория управления, теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости. E-mail: miguel@ipu.ru

Estimate for solutions of time-periodic homogeneous differential inclusion with asymptotically stable set

M.V. Morozov[I]

[I] V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

Abstract. Estimate of exponential type for solutions of time-periodic homogeneous differential inclusion with asymptotically stable set was obtained.

Keywords: *time-periodic homogeneous differential inclusion, asymptotically stable set.*
DOI: 10.14357/20790279180410

References

1. *Morozov M.V.* On properties of the solutions of time-periodic differential inclusions with asymptotically stable sets // Proceedings of Institute of Systems Analysis, 2017, Vol. 67, No. 3, PP. 13-19.
2. *Filippov A.F.* Differential equations with discontinuous right-hand side, Moscow, Nauka, 1985.
3. *Morozov M.V.* Properies of solutions of periodic differential inclusions // Differential equations, Vol. 36, No. 5, 2000, PP. 677-682.

Morozov M.V. PhD, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 65 Profsoyuznaya Street, Moscow 117997, Moscow, Russia, Senior Researcher. Background: Moscow State University by the Name of M. V. Lomonosov, 1982. Publications: 47. Scientific interests: theory of control, theory of differential equations, theory of stability. E-mail: miguel@ipu.ru