Разбиения единицы, инвариантные вдоль гладкого потока

В.И. Рабовер[I]

[I] Федеральное государственное учреждение Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе предпринята попытка модификации классической конструкции разбиения единицы (общий метод склейки глобальных гладких объектов из локальных) на случай объектов (множеств, функций), инвариантных вдоль заданного гладкого потока. Выделен класс потоков, допускающих такую конструкцию. Описана общая схема склейки нелокального первого интеграла потока из заданного набора локальных.

Ключевые слова: *динамические системы, потоки, первые интегралы.*
DOI: 10.14357/20790279180411

Введение

Работа тесно примыкает к статье автора [1], посвященной некоторым общетопологическим свойствам инвариантных подмножеств в гладком потоке. По сути в [1] подготовлен аппарат, необходимый для данного исследования. Для удобства чтения в Разделе 1 дана краткая сводка нужного материала. Именно, здесь напоминаются определения потока, сечения, клетки, трубки и.т.п., а также определяются инвариантные (насыщенные) множества в гладком потоке.

По существу главным свойством пространства, позволяющем построить в нем конструкцию разбиения единицы, является локально конечная измельчаемость открытых покрытий (терминология будет уточнена ниже). Применительно к инвариантным вдоль потока построениям, это свойство изучается в Разделе 2, где и выделяется класс потоков, обладающих нужным качеством.

Раздел 3 посвящен классической конструкции разбиения единицы в обычном евклидовом пространстве. Напоминается терминология и доказывается утверждение, описывающее основные свойства глобального гладкого отображения, склеенного из заданных локальных.

В Разделе 4, для еще несколько более узкого (по сравнению с Разделом 2) класса гладких потоков, реализована конструкция разбиения единицы, инвариантного вдоль потока. По сути речь идет о выпуклых комбинациях локальных первых интегралов потока с коэффициентами также в виде первых интегралов.

Общие сведения о потоках можно найти, например, в [2]. Необходимый материал о разбиениях единицы имеется в [3,4].

Настоящая статья лежит несколько в стороне от магистрального направления современной теории динамических систем, связанной с нерегулярными аттракторами, системами с хаотическим поведением и.т.п. Читателю конечно же известны имена Фейгенбаума, Шарковского, а также российского ученого Н.А. Магницкого. Тем не менее, автор надеется, что и настоящее исследование, основанное на более традиционном материале, найдет своего заинтересованного читателя. Рассматриваемые здесь «положительные» потоки – это сравнительно простой класс потоков, свободный от сингулярностей и хаоса (орбиты положительного потока это всегда вложенные подмногообразия в $\mathbb{R}^3$, диффеоморфные прямой $\mathbb{R}$). Возможно эта простота и позволила хоть немного продвинуться в интересующей автора теме (разбиения единицы вдоль потока).

1. Предварительные сведения

Здесь уточняется терминология, связанная с гладкими потоками в пространстве $\mathbb{R}^3$. (Выбор $\mathbb{R}^3$ - чисто для наглядности; все сохраняет силу в произвольном пространстве $\mathbb{R}^n$.)

Пусть в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^3$ (в частности $V = \mathbb{R}^3$) задано векторное поле $F : V \to \mathbb{R}^3$ класса C^r (r - любое фиксированное целое число ≥ 1). Мы обозначаем через $g^x : J^x \to V$ максимальное (непродолжаемое) решение системы

$\dot{x} = F(x)$ с начальным условием $g^x(0) = x$ (таким образом, $J^x \ni 0$ - интервал жизни этого решения). Совокупность всех решений g^x, $x \in V$, определяет (максимальный) *поток* поля F - отображение

$$g : D \to V, \quad g(t,x) \equiv g_t(x) \equiv g^x(t),$$

определенное в открытом множестве $D \subset \mathbb{R} \times V$, где

$$D = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R} \times V \middle| t \in J^x \right\}.$$

Поток g, таким образом, эквивалентен семейству отображений $g^x : J^x \to V, x \in V$, где открытое множество $J^x \subset \mathbb{R}$ есть срез D по x, и поток g эквивалентен семейству отображений $g_t : D_t \to V$, $t \in \mathbb{R}$, где открытое множество $D_t \subset V$ есть срез D по t.

Все отображения g, g^x, g_t - класса C^r. Кроме того, каждое g_t есть диффеоморфизм («преобразование за время t»)

$$g_t : D_t \to D_{-t}$$

с обратным $g_t^{-1} = g_{-t}$, причем g_0 - тождественное отображение $V \to V$. Наконец, для любых $s, t \in \mathbb{R}$ выполнено группопое свойство

$$g_t \circ g_s = g_{t+s}$$

(в соответствующих областях определения).

Поток g разбивает пространство V на *орбиты* (образы решений, т.е. множества $O_x = g^x(J^x)$, $x \in V$). Орбиты могут быть компактными (и тогда это либо «точки», либо «циклы», диффеоморфные окружности) и некомпактными (и тогда это образы инъективного погружения действительной прямой). Если все орбиты не яволяются точками, то они образуют 1-мерное *слоение* на V.

Далее здесь рассматриваются только *положительные* потоки (поток называется положительным, если 1-я компонента поля F, задающего поток, тождественно равна единице, $F^1 \equiv 1$). Положительный поток однозначно определяется множеством своих орбит (т.е. соответствующим слоением на V). Как правило, далее всегда $V = \mathbb{R}^3$, т.е. речь идет о положительных потоках в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Напомним теперь понятия *сечения* – 2-мерной площадки, трансверсальной потоку, и *клетки* – области, заметаемой такой площадкой за конечное время при движении по потоку.

Рассмотрим положительный поток $g : D \to \mathbb{R}^3$ (где D открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$). *Сечением* в $\mathbb{R}^3$ мы называем множество

$$S = \{s\} \times U,$$

где $s \in \mathbb{R}$ -любое число, а U - любое ограниченное открытое связное множество в $\mathbb{R}^2$. Пусть ограниченный интервал $I \subset \mathbb{R}$ и сечение $S = \{s\} \times U$ таковы, что $\overline{I \times S} \subset D$ (черта обозначает замыкание). *Клеткой* Γ мы называем множество

$$\Gamma = g(I \times S).$$

Клетка Γ стандартным диффеоморфизмом выпрямляется в «брус» $I \times U$. Любую точку $x \in \mathbb{R}^3$ можно погрузить в клетку, лежащую перед заданной окрестности точки x.

Трубкой (с сечением S) мы называем объединение всех орбит потока, проходящих через S. Заданная на сечении S произвольная скалярная функция естественно продолжается (по потоку, вдоль орбит) на всю трубку (с сохранением класса гладкости).

Напомним еще раз, что поток задает разбиение пространства на орбиты. Множества, составленные из целых орбит, называют *насыщенными* (или *инвариантными*). Наименьшее насыщенное множество, содержащее произвольное заданное множество A, называют *насыщением* множества A (обозначение $[A]$); понятно, что $[A]$ есть объединение всех орбит, задевающих A.

Трубка T в $\mathbb{R}^3$ с сечением S есть насыщение множества S, $T = [S]$. (Она же есть насыщение любой клетки Γ с сечением S.) Трубка есть открытое множество. И насыщение любого открытого множества есть открытое множество. Однако насыщение не всякого замкнутого (даже компактного) множества есть замкнутое множество.

Все изложенные в этом разделе факты доказаны в [1].

2. Потоки конечного типа

В этом разделе рассматриваются покрытия пространства $\mathbb{R}^3$ открытыми трубками потока и выделяется класс потоков, обладающих свойством локально конечной измельчаемости таких покрытий.

Напомним известную терминологию, связанную с покрытиями. Покрытие «вписано» в исходное покрытие, если каждый его элемент лежит в каком-то элементе исходного покрытия. Вписанное покрытие называют ттакже «измельчением» исходного. «Локально конечное» покрытие означает, что у каждой точки пространства есть окрестность, которая задевает лишь конечное число элементов покрытия.

Классическое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию пространства (точное определение напоминается в Разделе 3), по существу возможно благодаря следующему свойству пространства: открытые покрытия должны допускать локально конечные измельчения (это свойство называется в топологии «паракомпактностью»). Таким свойством обладают, например, любые открытые области в $\mathbb{R}^n$ (а также другие, гораздо более общие топологические пространства).

В данной работе нас интересуют инвариантные конструкции. Покрытия, которые мы рассматриваем, это покрытия пространства трубками потока. Такого рода покрытия, вообще говоря, могут и не обладать свойством локально конечной измельчаемости. Тем не менее, оказывается возможным выделить некоторый класс потоков, для которых указанное свойство выполняется.

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^3$ положительный поток g. Монотонную последовательность вложенных замкнутых кубов

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots, \quad K_i \subset \mathbb{R}^3,$$

назовем *компактным исчерпанием* пространства $\mathbb{R}^3$, если эти кубы покрывают $\mathbb{R}^3$,

$$K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots = \mathbb{R}^3.$$

(Во избежание недоразумений всегда считаем, что $K_\nu \subset K^\circ_{\nu+1}$, где K° - внутренность K.) Положительный поток g в $\mathbb{R}^3$ мы будем называть *потоком конечного типа*, если для него существует компактное исчерпание $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$, каждый элемент которого K_ν имеет замкнутое насыщение $\left[K_\nu\right]$.

Утверждение 1. *Для потока конечного типа в пространстве $\mathbb{R}^3$ любое покрытие пространства трубками допускает вписанное в него локально конечное покрытие пространства трубками.*

Доказательство. Искомое покрытие строится ниже в виде семейства трубок T_i^m, счетного по m и конечного по i при каждом m. Семейство строится индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. Сначала описываются несколько первых шагов, а потом общий шаг для $m > 0$ (при условии, что для меньших m все построено).

Внутренности кубов $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ обозначаем $K_1^\circ, K_2^\circ, K_3^\circ, \ldots$. Напомним, что в любое открытое покрытие компакта можно вписать конечное подпокрытие (это общая топология). Кроме того, напомним еще раз, что для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$ и любой ее окрестности найдется клетка, содержащая x и лежащая в этой окрестности.

Шаг 1. Компакт $\Delta_1 = K_1$ покрыт конечным числом клеток Γ_1^i, задевающих Δ_1, с условием

$$\Gamma_1^i \subset K_2^\circ.$$

Тем самым Δ_1 покрыт соответствующими трубками $T_1^i = \left[\Gamma_1^i\right]$ с объединением $\Pi_1 = \bigcup\limits_i T_1^i$.

Шаг 2. Компакт $\Delta_2 = K_2 \setminus \Pi_1$ покрыт конечным числом клеток Γ_2^i, задевающих Δ_2, с условием

$$\Gamma_2^i \subset K_3^\circ.$$

Тем самым компакт Δ_2 покрыт соответствующими трубками $T_2^i = \left[\Gamma_2^i\right]$ с объединением $\Pi_2 = \bigcup\limits_i T_2^i$.

Шаг 3. Компакт $\Delta_3 = K_3 \setminus \left(\Pi_1 \cup \Pi_2\right)$ покрыт конечным числом клеток Γ_3^i, задевающих Δ_3, с условием

$$\Gamma_3^i \subset K_4^\circ \setminus \Pi_1$$

(На самом деле клетки Γ_3^i берутся из *открытого* множества $K_4^\circ \setminus \left[K_2\right]$ (открытость – следствие замкнутости насыщения $\left[K_2\right]$ ввиду конечного типа потока). Это открытое множество с одной стороны лежит в $K_4^\circ \setminus \Pi_1$ (ибо $\Pi_1 \subset \left[K_2\right]$), а с другой стороны покрывает компакт Δ_3 (ибо $\Pi_1 \cup \Pi_2 \supset \left[K_2\right]$). Тем самым, компакт Δ_3 покрыт соответствующими трубками $T_3^i = \left[\Gamma_3^i\right]$ с объединением $\Pi_3 = \bigcup\limits_i T_3^i$.

Шаг m . Компакт $\Delta_m = K_m \setminus \left(\Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_{m-1}\right)$ покрыт конечным числом клеток Γ_m^i, задевающих Δ_m, с условием

$$\Gamma_m^i \subset K_{m+1}^\circ \setminus \left(\Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_{m-2}\right).$$

Как и выше, множество справа от $\subset$ содержит открытую окрестность $K_{m+1}^\circ \setminus \left[K_{m-1}\right]$ компакта Δ_m, из которой и выбираются клетки Γ_m^i. Тем самым, компакт Δ_m покрыт соответствующими трубками $T_m^i = \left[\Gamma_m^i\right]$ с объединением $\Pi_m = \bigcup T_m^i$.

В завершение доказательства, заметим, что на каждом шаге клетки Γ_m^i можно выбирать вписанными в исходное покрытие пространства трубками. Тем самым, вписанными будут и трубки T_m^i. Трубки T_m^i образуют покрытие пространства $\mathbb{R}^3$. (В самом деле, если точка $x \in K_\nu$ не лежит в $\Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_{\nu-1}$, то x лежит в Π_ν .) При этом трубка T_m^i может задевать лишь трубки с номерами $m-1$, m, $m+1$ (см. включение $\Gamma_m^i \subset \ldots$ из предыдущего абзаца), откуда вытекает локальная конечность покрытия.

Утверждение доказано.

В связи с доказанным утверждением о свойствах потоков конечного типа опишем здесь общую идею того, как может быть устроен поток, не являющийся потоком конечного типа. Возьмем для простоты пространство $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим расположенный в $\mathbb{R}^2$ график функции $y = \mathrm{tg}^2 x$ - это бесконечная вправо и влево серия «парабол», обозначим их O_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Будем считать, что O_i – орбиты положительного потока в $\mathbb{R}^2$, которые мы дополним остальными орбитами, расположенными выше и ниже орбит O_i. (Вверху все орбиты «короткие», похожие на сами O_i, внизу все орбиты «длинные», с бесконечным интервалом жизни.) Произвольное покрытие пространства $\mathbb{R}^2$ трубками содержит трубки T_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, которые покрывают орбиты O_i. Возьмем любую точку a скажем из орбиты O_0 и шар Ω сколь угодно малого радиуса с центром a. Шар Ω задевает *все* трубки T_i, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т.е. шар Ω задевает *бесконечное число* элементов покрытия. И поскольку покрытие пространства трубками взято *произвольным*, то в силу доказанного Утверждения 1 поток не является конечным.

3. Разбиения единицы (классическая конструкция)

Классическое разбиение единицы есть универсальный способ построения глобальных объектов (например, функций) из локальных в виде локально конечных выпуклых комбинаций. Напомним определение (скажем для пространства $V = \mathbb{R}^n$).

Пусть $(V_e)_{e \in E}$ (где E - множество индексов) есть покрытие пространства $V = \mathbb{R}^n$ его открытыми подмножествами $V_e \subset V$. *Разбиение единицы*, почленно, подчиненное этому покрытию, это семейство $(\alpha_e)_{e \in E}$ гладких (класса C^∞) функций $\alpha_e : V \to [0,1]$ со значениями в отрезке $[0,1] \subset \mathbb{R}$ такое, что семейство носителей $(\operatorname{supp} \alpha_e)_{e \in E}$ этих функций образует локально конечное покрытие пространства V, причем

$$\operatorname{supp} \alpha_e \subset V_e \quad \text{и} \quad \sum_e \alpha_e = 1.$$

(Суммирование в последней сумме возможно ввиду локальной конечности покрытия, образованного носителями. Локальная конечность определена в Разделе 2. Носитель функции это замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю.)

Утверждение о существовании разбиения единицы (для пространства $V = \mathbb{R}^n$, а также для других гораздо более общих топологических пространств) доказано в многочисленных известных курсах анализа и топологии [2–4]. Напомним здесь еще раз, что ключевое качество, которое по существу требуется от пространства, чтобы оно допускало разбиение единицы, это *паракомпактность* (локальная конечная измельчаемость открытых покрытий).

Следующее утверждение пожалуй отражает главное свойство разбиения единицы, которое и позволяет «склеивать» из локальных объектов (функций) глобальные. (Мы говорим, что функции *f, g m*-касаются в данной точке, если в этой точке у них совпадают все частные производные порядка $0, \dots, m$.)

Утверждение 2. *Для любых C^m-функций* $f^e : V_e \to \mathbb{R}$, $e \in E$, функция

$$f = \sum_e \alpha_e f^e : V \to \mathbb{R}$$

принадлежит классу C^m, причем в каждой точке $a \in V$, в которой все определенные в этой точке функции f^e m-касаются, функция f также их m-касается.

Доказательство:

А. *Обозначения.* Для краткости записи частная производная от функции $g : U \to \mathbb{R}$ в открытом $U \subset \mathbb{R}^n$ по переменным с номерами $i_1, \dots, i_m$ обозначается $\partial_{i_1 \cdots i_m} g$ или даже сокращенно $\partial^m g$ (когда список $i_1 \cdots i_m$ ясен из контекста).

Б. *Дифференцирование произведений.* Пусть $g, h : U \to \mathbb{R}$ – C^m-функции в открытом $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда производная от произведения gh равна

$$\partial^m (gh) = g \partial^m h + \cdots,$$

где далее все слагаемые имеют вид $\partial^\alpha g \partial^{m-\alpha} h$, $\alpha \geq 1$. (Это немедленно проверяется индукцией по m.)

В. *Гладкие выпуклые комбинации.* Пусть C^m-функции

$$g, g_1, \dots, g_k : U \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k : U \to \mathbb{R}$$

в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что

$$g = \sum_i \varphi_i g_i, \quad \varphi_i \geq 0, \quad \sum_i \varphi_i = 1.$$

Тогда (в силу **Б**) производная от g равна

$$\partial^m g = \sum_i \varphi_i \partial^m g_i + \cdots,$$

где далее все слагаемые имеют вид:

$$\sum_i \partial^\alpha \varphi_i \partial^{m-\alpha} g_i, \quad \alpha \geq 1.$$

Как следствие, в каждой точке $a \in U$, в которой все функции $g_1, \dots, g_k$ m-касаются, функция g также их m-касается (поскольку $\sum_i \partial^\alpha \varphi_i = 0$ ввиду того, что $\sum_i \varphi_i = 1$).

Г. *Завершение доказательства.* Из локальной конечности семейства $(\operatorname{supp} \alpha_e)_{e \in E}$ понятно, что точку a задевает лишь конечное число носителей, скажем с номерами $e = 1, \dots, k$, причем некоторая окрестность U точки a не задевает никаких других носителей, а уменьшив U, можно также считать, что $U \subset V_1 \cap \cdots \cap V_k$. Но тогда в окрестности U выполнено

$$f = \alpha_1 f^1 + \cdots + \alpha_k f^k,$$

откуда очевидно, что функция f принадлежит классу C^m, а факт касания следует из **В**.

Утверждение доказано.

4. Инвариантные по потоку разбиения единицы

Здесь будет построена конструкция, похожая на классическое разбиение единицы, с той разницей, что составляющие ее функции являются по существу локальными первыми интегралами заданного гладкого потока.

Пусть в пространстве $V=\mathbb{R}^3$ задан положительный поток g и какое-то покрытие $(T_e)_{e\in E}$ пространства V трубками потока. *Инвариантным* (по потоку) *разбиением единицы*, почленно подчиненным этому покрытию, мы называем семейство $(\alpha_e)_{e\in E}$ C^∞-гладких функций $\alpha_e:V\to[0,1]$ со значениями в отрезке $[0,1]\subset\mathbb{R}$, инвариантных по потоку (постоянных на орбитах) и таких, что семейство носителей $(\operatorname{supp}\alpha_e)_{e\in E}$ образует локально конечное покрытие пространства V, причем

$$\operatorname{supp}\alpha_e\subset T_e \quad \text{и} \quad \sum_e \alpha_e=1$$

(суммирование возможно ввиду локальной конечности).

Для формулировки основного утверждения об инвариантных разбиениях нам потребуется еще несколько сузить класс потоков. Положительный поток в $\mathbb{R}^3$ будем называть *неособым*, если насыщение $[A]$ любого компакта A замкнуто.

Неособый поток разумеется является потоком конечного типа (годится любое компактное исчерпание $K_1\subset K_2\subset\cdots$ пространства), но не наоборот. В работе [1] дан пример «особого» потока, для которого есть компакт с незамкнутым насыщением, и в тоже время для этого потока без труда строится компактное исчерпание $K_1\subset K_2\subset\cdots$ с замкнутыми насыщениями $[K_1],[K_2],\ldots$. Наконец, можно привести пример «особого» потока (с незамкнутым насыщением какого-то компакта), который вообще не является потоком конечного типа: это пример из Раздела 2.

В доказательстве Утверждения 1 все вписанные клетки Γ_m^i (и трубки T_m^i) можно считать (выбрать) «стандартными», т.е. порожденными сечением S в виде круга $S=\{s\}\times\Omega$, где Ω - какой-то открытый круг в $\mathbb{R}^2$. Более того, всегда можно сделать так, что вдвое меньшие («половинные») клетки и трубки все еще будут давать нужные покрытия. (Наряду со стандартной трубкой $T=[S]$ с сечением $S=\{s\}\times\Omega$ можно рассматривать «половинную» трубку $T'=[S']$ с сечением $S'=\{s\}\times\Omega'$, где $\Omega'\subset\Omega$ - концентричный открытый круг половинного радиуса. Тоже для клеток.)

Лемма. *Для любой стандартной трубки* $T=[S]\subset\mathbb{R}^3$ *неособого потока найдется гладкая (класса* C^∞ *) функция* $\alpha:\mathbb{R}^3\to[0,1]$ *со значениями в отрезке* $[0,1]\subset\mathbb{R}$*, инвариантная потоку (=постоянная на орбитах) с носителем* $\operatorname{supp}\alpha$ *таким, что*

$$T'\subset\operatorname{supp}\alpha\subset\mathrm{T},$$

где $T'=[S']$ *– половинная трубка.*

Доказательство. Покажем, что замыкание $\overline{T'}$ лежит в T. Имеем $T'=[S']$. Кроме того, обозначим $\widetilde{T'}=\left[\,\overline{S'}\,\right]$ - это замкнутое множество, ибо насыщение компакта $\overline{S'}$ в неособом потоке замкнуто. Имеем $S'\subset\overline{S'}$, поэтому $T'\subset\widetilde{T'}$, и значит $\overline{T'}\subset\overline{\widetilde{T'}}$. Но $\widetilde{T'}$ – замкнуто, поэтому $\overline{T'}\subset\widetilde{T'}$. Остается заметить, что $\overline{S'}\subset S$, поэтому $\widetilde{T'}\subset T$. В итоге $\overline{T'}\subset T$.

Определим функцию α. На сечении S' (а точнее на круге $\Omega'\subset\mathbb{R}^2$) определим гладкую шапку, равную 1 в центре и гладко спадающую до 0 к границе круга («колокол» - любая известная конструкция). На остальной части большого круга Ω полагаем $\alpha=0$. В итоге, на всем сечении S определена гладкая функция, которая продолжается (с той же гладкостью) на всю трубку $T=[S]$. Вне трубки T полагаем $\alpha=0$. Покажем, что так определенная функция $\alpha:\mathbb{R}^3\to[0,1]$ - гладкая в $\mathbb{R}^3$. Из построения ясно, что множество точек, где $\alpha>0$, это в точности трубка $T'=[S']$, причем, как показано выше, $\operatorname{supp}\alpha\equiv\overline{T'}\subset T$.

Остается заметить, что функция α - гладкая на открытом множестве T, и гладкая (равна 0) на открытом множестве $\mathbb{R}^3\setminus\overline{T'}$. Эти 2 множества покрывают $\mathbb{R}^3$. Тем самым гладкость α (и сама лемма) доказана.

Утверждение 3. *Для любого неособого положительного потока* g *в пространстве* $V=\mathbb{R}^3$ *и любого покрытия* $(T_e)_{e\in E}$ *пространства* V *трубками потока существует инвариантное разбиение единицы* $(\alpha_e)_{e\in E}$*, почленно подчиненное покрытию* $(T_e)_{e\in E}$.

Доказательство. Неособый поток является потоком конечного типа, и поэтому, согласно Утверждению 1, в покрытие трубками $(T_e)_{e\in E}$ можно вписать локально конечное покрытие трубками $(\Theta_p)_{p\in P}$ (так что $\Theta_p\subset T_e$ для каждого p и подходящего (одного) e). При этом (согласно замечанию выше) трубки Θ_p можно считать стандартными (с круглым сечением) и даже такими, что половинные трубки Θ'_p (вдвое меньшего диаметра в сечении) также дают покрытие с нужными свойствами. С каждой трубкой Θ_p (и соответствующей половинной трубкой Θ'_p) свяжем C^∞-гладкую функцию $\alpha_p:\mathbb{R}^3\to[0,1]$ из леммы такую, что α_p - инвариантна, $\operatorname{supp}\alpha_p\subset\Theta_p$, и семейство носителей $\operatorname{supp}\alpha_p$ локально конечно (это так, ибо само семейство трубок Θ_p локально конечно).

Локальная конечность позволяет поточечно суммировать функции α_p. Разделив каждое α_p на сумму всех α_p, мы получаем разбиение единицы, почленно подчиненное покрытию $\left(\Theta_p\right)_{p\in P}$. Чтобы получить разбиение единицы $\left(\alpha_e\right)_{e\in E}$, почленно подчиненное покрытию $\left(T_e\right)_{e\in E}$, нужно положить α_e равным сумме тех α_p, носители которых лежат по построению в T_e (если таких нет, то $\alpha_e = 0$).

Утверждение доказано.

Типовой пример применения инвариантного разбиения единицы – это, конечно, «склеивание» из локальных первых интегралов потока глобального первого интеграла. Следующее утверждение является калькой с Утверждения 2 (о свойствах классических разбиений) с той разницей, что все функции инвариантны потоку (являются первыми интегралами).

Следствие. *Пусть в пространстве* $V = \mathbb{R}^3$ *задан положительный неособый поток и инвариантное разбиение единицы* $\left(\alpha_e\right)_{e\in E}$, *почленно подчиненное покрытию* $\left(T_e\right)_{e\in E}$ *пространства трубками потока. Тогда для любых локальных первых интегралов*

$$f^e : T_e \to \mathbb{R}, \quad e \in E,$$

функция

$$f = \sum_e \alpha_e f^e : V \to \mathbb{R}$$

есть глобальный первый интеграл (класса C^m, если f^e – класса C^m), причем в каждой точке $a \in V$, в которой все определенные в этой точке функции f^e m-касаются, функция f также их m-касается.

Доказательство просто повторяет доказательство Утверждения 2.

Литература

1. *Рабовер В.И.* Открытость и замкнутость разбиений на орбиты гладкого потока // Труды ИСА. Т. 64. Вып. 2. 2014. С.19 – 26.
2. *Хирш М.* Дифффеpенциальная топология./ Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. 280 с. (M. Hirsch. Differential topology. Springer – Verlag. 1976.)
3. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1./ Пер. с франц. - М.: Мир, 1972. 824 с. (L. Schwartz. Analyse mathematique. Hermann. 1967.)
4. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли./ Пер. с англ. - М.: Мир, 1987. 302 с. (F. Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer – Verlag. 1983.)

Рабовер Владимир Ильич. Институт системного анализа Федерального государственного учреждения Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия. Научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: более 20 (в т.ч. 1 монография). Область научных интересов: нелинейный анализ и теория управления. E-mail: v.rabover@mail.ru

Partitions of unity which are invariant along a smooth flow

V.I. Rabover[I]

[I] Federal Research Center Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we make an attempt to modify the classic construction of partition of unity (general method of sewing together local smooth objects into a global one) to include the case of objects invariant along a given smooth flow. A class of flows is determined which allow such a construction. A general scheme is presented of obtaining a non-local first integral by sewing together a set of local integrals.
Keywords: *dynamical systems, flows, first integrals.*
DOI: 10.14357/20790279180411

References

1. *Rabover V.I.* Otkrytost' i zamknutost' razbienii na orbity gladkogo potoka [Open and closed partitions into orbits of a smooth flow]. Trudy ISA [Proceedings of ISA]. 2014. 64(2): 19 – 26.
2. *M. Hirsch.* Differential topology. Springer – Verlag. 1976.
3. *L. Schwartz.* Analyse mathematique. Hermann. 1967.
4. *F. Warner.* Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer – Verlag. 1983.

Rabover V.I. Laboratory of system modelling methods (research fellow, Ph.D (math)), Federal Research Center for Informatics and Control, Moscow, Russia. E-mail: v.rabover@mail.ru.