Граничные условия в задаче корреляционной адаптометрии

М.И. Шпитонков[I]

[I] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. В статье на основе методов эволюционной оптимальности обосновываются граничные условия непроницаемости для диффузионной модели корреляционной адаптометрии.

Ключевые слова: *уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка, граничные условия непроницаемости, эволюционная оптимальность, корреляционная адаптометрия.*

DOI: 10.14357/20790279180412

Введение

В конце прошлого века исследователи, работающие в биомедицине, обнаружили эффект изменения уровня корреляций между физиологическими параметрами организмов при возникновении внешнего воздействия на популяцию [1,2].

Подход к оценке этого воздействия был назван методом корреляционной адаптометрии. Попытка обоснования этого метода, базирующаяся на использовании экстремального принципа Холдейна, нашла свое отражение в работах [1-3]. Исследования, связанные с практическими применениями данного метода для оценки эффективности лечения некоторых заболеваний были продолжены рядом авторов [4,5,8–10]. В последнее время методика корреляционной адаптометрии стала использоваться также в экономике и финансах. В этих областях на ее основе, например, предсказывают экономические кризисы [6,7]. В работе [11] на основе методов эволюционной оптимальности была построена и обоснована диффузионная модель корреляционной адаптометрии для n – мерной выпуклой области параметров биологической популяции.

В данной работе на основе методов эволюционной оптимальности обосновываются граничные условия непроницаемости для указанной задачи.

1. Математическая модель

Предполагается, что изменение распределения численности популяции $u(x,t)$ в области Ω имеет характер случайных блужданий, так что для нее будет выполнено уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка:

$$\partial_t u = -(\nabla_x, bu) + \Delta_x(au), \tag{1}$$

где $a > 0$ – коэффициент диффузии, b - вектор направленного сноса, ∇_x – градиент, Δ_x – оператор Лапласа по x. Область Ω, описывающая область гомеостазиса популяции, считается ограниченной и имеющей достаточно гладкую границу.

Рассматривается модель системы, находящейся в эволюционном равновесии, сформировавшемся при отсутствии внешних воздействий. Выход за пределы области гомеостазиса означает гибель организма, что описывается граничными условиями Дирихле:

$$u \mid_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Далее мы покажем, как на основе модели (1)-(2) и принципов эволюционной оптимальности можно построить модель, в которой границы области могут с некоторой точностью рассматриваться как непроницаемые:

$$(bu - a\nabla u, \nu)\mid_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

где ν - вектор внешней нормали к границе.

Идея состоит в том, что в окрестности этой границы предполагаются включенными механизмы отталкивания от нее, которые интерпретируются как механизмы реализации адаптационных свойств организма при приближении его параметров к границе области гомеостазиса.

2. Обоснование граничных условий непроницаемости

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\partial_t u = a\Delta u + eu - (\nabla_x, b(x)u) \tag{4}$$

с краевыми условиями Дирихле (2).

Здесь $b(x) \equiv 0$ при $d(x,\partial\Omega) > \delta > 0$, $b(x) = b\nabla_x d(x,\partial\Omega)$ при $d(x,\partial\Omega) \le \delta$;

$d(x,\partial\Omega)$ – расстояние от точки x области Ω до ее границы, $b = const > 0$, $\delta = const > 0$. При этом δ выбирается из условия $\delta^{-1} \gg \max_{s\in\partial\Omega} |k(s)|$, где $k(s)$ – максимальная кривизна границы в точке s. Член eu задает механизмы воспроизводства, функция $b(x)$ соответствует адаптационным механизмам отталкивания от границы.

Заметим что оператор L_λ, где $\lambda = \{e,b\}$, является самосопряженным относительно скалярного произведения $(u,v) = \int_\Omega \exp(-Q(x))u(x)v(x)dx$, где $Q(x) = \min\{d(x,\partial\Omega),\delta\}(b/a)$, так что его спектр является дискретным (в силу ограниченности области Ω) набором вещественных собственных значений, имеющим единственную точку сгущения в $-\infty$. Пусть $\chi(e,b)$ – максимальное собственное значение оператора L_λ, соответствующее выбранным значениям параметров e и b. Нетрудно показать, что имеется единственная собственная функция $\overline{u}_\lambda$ оператора L_λ, соответствующая этому собственному значению:

$$L_\lambda \overline{u}_\lambda = \chi(\lambda)\overline{u}_\lambda, \qquad (4a)$$

где $\overline{u}_\lambda = \overline{u}_\lambda(x) \ge 0$, $\ne 0$. Величину $\chi(\lambda)$ мы далее будем называть максимальным показателем экспоненциального роста.

Далее рассматривается задача эволюционной оптимальности. Пусть λ характеризует набор параметров эволюционного отбора, так что оптимальному значению $\overline{\lambda}$ соответствует стационарное решение $\overline{u}_{\overline{\lambda}}(x)$ задачи (2)-(3), которое является собственной функцией оператора $L_{\overline{\lambda}}$ правой части (3), отвечающей максимальному собственному значению $\chi(\overline{\lambda}) = 0$. При этом другой набор значений популяционных параметров λ не должен давать большего значение $\chi(\lambda)$, так что

$$\chi(\lambda) \le \chi(\overline{\lambda}) = 0, \ \ \lambda \in \Lambda. \qquad (5)$$

Выбирая в качестве исходного двухпараметрическое семейство Λ параметров $\{e,b\}$ мы сужаем его до однопараметрического семейства, выделяя взаимосвязь типа равенства между e и b на основе принципа “сохранения энергии” для индивидуальной особи популяции:

$$P(e,b) = K_1 e + K_2 b R_\delta(b) = const, \qquad (6)$$

где K_1 – удельные энергозатраты на воспроизводство популяции, K_2 – на восстановление ресурса, затраченного на адаптацию в условиях нахождения в пограничной зоне (т.е. в области $\Omega_\delta = \{x\in\Omega : d(x,\partial\Omega) < \delta\}$), $R_\delta(b) = U_b^\delta / U_b$,

$$U_b^\delta = \int_{\Omega_\delta} \overline{u}_b(x)dx,\ U_b = \int_\Omega \overline{u}_b(x)dx,\ \overline{u}_b(x)$$

положительное стационарное решение линейной задачи (2)-(3), полученное для $e = -\chi(0,b)$.

Возникающая задача поиска оптимального значения параметра b сводится к поиску $\overline{\lambda}$ из (4) при ограничениях (5), что эквивалентно задаче:

$$F(b) = K_1\chi(0,b) - K_2 b R_\delta(b) \to \max_b \qquad (7)$$

с ограничением $L_\lambda \overline{u}_\lambda = \chi(\lambda)\overline{u}_\lambda$ для $\lambda = (0,b)$.

Поскольку изменение параметра e не влияет на ее решение, мы можем выбрать его апостериорно равным $-\chi(0,b)$, сводя тем самым (4a) к стационарному варианту (4) при краевых условиях (2).

Стационарное уравнение (4) с $e = -\chi(0,b)$ имеет вид (далее $\Omega' = \Omega\setminus\Omega_\delta$, $\overline{u}(x) = \overline{u}_b(x)$):

$$a\Delta\overline{u}(x) - b\nabla\overline{u}(x) - \chi(0,b)\overline{u}(x) = 0 \text{ в } \Omega_\delta, \qquad (8)$$
$$a\Delta\overline{u}(x) - \chi(0,b)\overline{u}(x) = 0 \text{ в } \Omega'.$$

Условия склейки на $\partial\Omega'$ определяются непрерывностью функции $u(x)$ и равенства нулю потока через $\partial\Omega'$:

$$b(x)u(x) = a(\nabla u_+(x) - \nabla u_-(x), \nu(x)), \qquad (9)$$

где $\nu(x)$ – единичный вектор внешней (по отношению к Ω') нормали к $\partial\Omega'$ точке $x\in\partial\Omega'$, $\nabla u_\pm(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \nabla u(x \pm \varepsilon\nu)$.

Математическая постановка задачи эволюционной оптимальности сводится, таким образом, к поиску такого значения b, которое максимизирует функционал (7), у которого входящие параметры таковы, что имеет место (8), (9) в $\partial\Omega'$ и (2) на $\partial\Omega$. При этом неизвестными являются также функции $\overline{u}(x)$ и $\chi(0,b)$.

Если $(b, \overline{u}(x) = \overline{u}_b(x), \chi(0,b))$ – решение поставленной задачи, то с учетом линейности из (9) получаем что $\overline{u}(x)$ является также решением второго уравнения (8) при краевых условиях

$$((\nu(x), \nabla u(x) + \alpha_b(x)u(x))|_{x\in\partial\Omega'} = 0 \qquad (10)$$

с некоторой подходящей функцией $\alpha_b(x)$.

Решение поставленной задачи проводится для случая, когда область Ω является n - мерным шаром радиуса R.

Итак, пусть $\Omega = \{x : |x| \le R\}$. Будем рассматривать решения поставленной задачи, зависящие только от $r = |x|$. Тогда вместо первого уравнения (8) в $\Omega_\delta = \{x : R_\delta \le |x| < R, \quad R_\delta = R - \delta\}$ имеем

$$au'' + a(n-1)u'/r - bu' - b(n-1)u/r - \chi(0,b)u = 0 \qquad (11)$$

с краевыми условиями на $\partial\Omega = \{x : |x| = R\}$

$$u(R) = 0 \qquad (12)$$

вместо (2), и в $\Omega' = \{x : |x| \le R_\delta\}$ вместо второго уравнения (8)

$$au'' + a(n-1)u'/r - \chi(0,b)u = 0 \qquad (13)$$

с краевыми условиями на $\partial\Omega' = \{x : \ |x| = R_\delta\}$

$$u'(R_\delta) + \alpha_b u(R_\delta) = 0 \qquad (14)$$

вместо (10). Здесь штрих $(')$ обозначает производную по $r : u' = \partial_r u$, а

$$au'(r) - bu(r)|_{r=R_{\delta+0}} = au'(r)|_{r=R_{\delta-0}}. \qquad (15)$$

Функция $\bar{u}_b(r)$ должна удовлетворять условиям (11) – (13), (15) и быть непрерывной на отрезке $[0, R]$, что, в частности, означает ее ограниченность в нуле. Интегрируя (11) по r от R_δ до R с весом r^{n-1} получим

$$r^{n-1}(au'(r) - bu(r))|_{R_{\delta+0}}^{R} = \chi(0,b)U_{\delta+}(u), \qquad (16)$$

где $U_{\delta+}(u) = \int\limits_{R_\delta}^{R} r^{n-1}u(r)dr$.

Из (13) и (14) получаем

$$a(R^{n-1}u'(R) - R_\delta^{n-1}u'(R_{\delta-0})) = \chi(0,b)U_{\delta+0}(u). \qquad (17)$$

Интегрируя (13) с весом r^{n-1} по отрезку $[0, R_\delta]$, получим

$$aR_\delta^{n-1}u'(R_{\delta-0}) = \chi(0,b)U_{\delta-}(u), \qquad (18)$$

откуда с учетом (17) получаем

Утверждение 1:

$$aR^{n-1}u'(R) = \chi(0,b)U(u), \qquad (19)$$

где $U(u) = U_{\delta-}(u) + U_{\delta+}(u) = \int\limits_0^R r^{n-1}u(r)dr$.

Покажем, что верно

Утверждение 2. $\chi(0,b) < 0$ для любого конечного $b \ge 0$.

Доказательство. Из положительности $u(r)$ и (12) в силу (19) получаем неположительность $\chi(0,b)$ для любых b. Далее, в силу доказанного альтернативой может быть только $\chi(0,b) = 0$ при некотором b, что в силу (19) влечет $u'(R) = 0$, откуда в силу (11) – (13) вытекает $u(r) \equiv 0$, что противоречит предположению о нетривиальном выборе неотрицательного $u(r)$.

Теперь докажем

Утверждение 3:

$$\forall b \ge 0 \quad -\infty < \chi_m \le \chi(0,b) < 0. \qquad (20)$$

$\chi(0,b) < 0$ для любого конечного $b \ge 0$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{\chi}(\alpha_b)$ максимальное собственное значение χ краевой задачи (13), (14) в области Ω'. Из вариационных свойств собственных значений вытекает монотонное убывание функции $\bar{\chi}$, так что $\bar{\chi}(\alpha_b) \ge \bar{\chi}(\infty) = \chi_m > -\infty$, где χ_m – максимальное собственное значение однородной краевой задачи Дирихле для уравнения (13) в области Ω'. Поскольку α_b в (14) выбирается так, чтобы $\bar{\chi}(\alpha_b) = \chi(0,b)$, то приведенное рассуждение и позволяет установить данное утверждение.

Дальнейшие рассмотрения направлены на получение верхних и нижних оценок функции $\chi(0,b)$. Во-первых, заметим, что функция $\chi(0,b)$ является непрерывной по своему аргументу b. Это следует, например, из непрерывности точечного спектра оператора по отношению к подчиненным ему возмущениям [12].

Во-вторых, в силу (20) и указанной непрерывности для любого $B > 0$ найдется $\varepsilon(b) > 0$ такое, что

$$\forall b \in [0, B] \quad \chi(0,b) < -\varepsilon(B) < 0. \qquad (21)$$

Выберем B так, чтобы

$$B(n-1) > -R\chi_m. \qquad (22)$$

Тогда выполнено

$$b(n-1) > -r\chi(0,b) \text{ для } \forall b > B, \quad r \le R. \qquad (23)$$

Фиксируем теперь $v_0 = -au'(R) > 0$ и рассмотрим систему

$$\partial_y w = v/a, \qquad (24)$$

$$\partial_y v = (bq + \chi)w + (q - b/a)v$$

с $w(y) = u(R-y)$, $q = (n-1)/(R-y)$, $\chi = \chi(0,b)$ с начальными условиями:

$$w(0) = 0, \quad v(0) = v_0 \qquad (25)$$

на отрезке $y \in [0, \delta]$. Эта система получена из уравнения (11) заменой переменной $r = R - y$ с учетом (12). В случае выполнения (22), (23) она сохраняет положительный квадрант $\{w \ge 0, v \ge 0\}$ фазовой плоскости, что позволяет находить для ее решений верхние и нижние оценки

$$w_-(y) \le w(y) \le w_+(y), \quad v_-(y) \le v(y) \le v_+(y), \qquad (26)$$

где $(w\pm(y),\ v\pm(y))$ – соответственно верхнее и нижнее решение системы (24), (25), полученные заменой в (24) величин q и χ на соответственно $q\pm$ и $\chi\pm$, где $q_+ = (n-1)/R_\delta$, $q_- = (n-1)/R$, $\chi_+ = 0$ $\chi_- = \chi_m$.

Система (24), (25) имеет с $q = const$ решение вида

$$w(y) = (sb)^{-1}v_0(e^{\lambda_1 y} - e^{\lambda_2 y}), \qquad (27)$$

где $s = ((a^{-1} + q/b)^2 + 4\chi/(ab))^{1/2}$,
$\lambda_{1,2} = (b/a - q \pm bs)/2$.

Решения для $w\pm(y)$ получается из (27) заменой q и χ на $q\pm$ и $\chi\pm$. Нетрудно видеть, что в силу (22), (23) будет $\lambda_1(\pm)\lambda_2(\pm)<0$.

Теперь построим верхнюю и нижнюю оценки $U\pm$ для функции $U(u)$ из (19). Начнем с нижней оценки. В качестве таковой для $U_{\delta+}$ из (16) можно взять $U^-_{\delta+}=0$.

Здесь мы покажем, что справедлива

Лемма 1. Для $U_{\delta-}(u)=\int_0^{R_\delta} r^{n-1}u(r)dr$ справедлива следующая оценка снизу :

$$U_{\delta-}\geq v_0 C\exp((l_- -\varepsilon)b+O(1)\,. \qquad (28)$$

Доказательство. Для оценки снизу $U_{\delta-}$ из (18) заметим, что из принципа максимума для эллиптических уравнений, положительности u и (19) $u(r)\geq u(R_\delta)$ при $r\in[0,R_\delta]$, так что с учетом (26), (27)

$$U_{\delta-}(u)\geq\int_0^{R_\delta} r^{n-1}u(R_\delta)dr\geq w_-(\delta)R_\delta^n/n\geq$$
$$v_0 C_-\exp(\lambda_1^- -\varepsilon b)\,,$$

где $\varepsilon>0$ может быть выбрано произвольно малым, $\lambda_1^-=l_- b+O(1)$ при $b\to\infty$, $l_->0$; $C_->0$ зависит только от выбора ε, B и входных параметров (тоже относятся и ко всем последующим C с другими индексами). Таким образом лемма доказана.

Теперь оценим сверху величину $U_{\delta+}$. Покажем, что для нее справедлива

Лемма 2. Для $U_{\delta+}=\int_{R_\delta}^{R} r^{n-1}u(r)dr$ справедлива оценка сверху:

$$U^+_{\delta+}\leq v_0 C^+_+\exp(\lambda_1^+ +\varepsilon b)\,.$$

Доказательство. Для верхней оценки $U^+_{\delta+}$ имеем в силу (26), (27)

$$U^+_{\delta+}=\int_0^{\delta}(R-y)^{n-1}w(y)dy\leq R^{n-1}\int_0^{\delta}w_+(y)dy\leq$$
$$v_0 C^+_+\exp(\lambda_1^+ +\varepsilon b)\,,$$

где $\varepsilon>0$ произвольное, $\lambda_1^+=l_+b+O(1)$ при $b\to\infty$, $l_+>0$.

Лемма доказана.

Для оценки сверху $U_{\delta-}$ представим $u(r)$ в области $r\in[0,R_\delta]$ в виде $u(r)=u(R_\delta)+z(r)$. Как мы видели, $u(R_\delta)\leq w_+(\delta)$, а $z(R_\delta)=0$, $z(r)\geq 0$, $r\leq R_\delta$, так что $z'(R_\delta)\leq 0$. Кроме того, в силу (17) и (20) для $z'(R_\delta)=u'(R_\delta-0)$ имеем $-z'(R_\delta)\leq v_0(R_\delta/R)^{n-1}/a=C_z v_0$. Более того, функция $z(r)$ выпукла, так как $\Delta z(r)\leq 0$, так что $z(r)\leq C_z v_0(R_\delta-r)$, $r\in[0,R_\delta]$. Интегрирование последнего неравенства с весом r^{n-1} по $[0,R_\delta]$ задает верхнюю оценку части $U_{\delta-}$, соответствующую z, через v_0 и входные данные. Построение верхней оценки для $\int_0^{R_\delta} r^{n-1}u(R_\delta)dr$ принципиально ничем не отличается от построения нижней оценки для $U_\delta(u)$ (см. Лемму 1). Поэтому для $U_{\delta-}(u)$ имеем $U_{\delta-}(u)\leq v_0[C^-_+\exp(\lambda_1^+ +\varepsilon b)+C_z R_\delta^{n+1}/n(n+1)]$, так что из приведенных выше вычислений следует

Лемма 3. Для $U(u)=\int_0^{R} r^{n-1}u(r)dr$ справедлива следующая оценка сверху:

$$U(u)\leq v_0 C_+\exp((l_+ +\varepsilon)b+O(1))\,. \qquad (29)$$

Из Лемм 1 – 3 и Утверждения 1 следует основной результат.

Теорема. Для $b>B$ справедливы неравенства:

$$\exp((-l_+ -\varepsilon)b+O(1))\leq|\chi(0,b)|\leq\exp((-l_- +\varepsilon)b+O(1)) \qquad (30)$$

(Здесь мы уже не пишем константы перед экспонентами, загоняя их в символы $O(1)$).

Из (30) и (21) с учетом (20) следует, что при фиксированном K_2 и неограниченно возрастающем K_1 в (7) значение параметра b, при котором достигается максимум функции $F(b)$, будет неограниченно увеличиваться, а соответствующее ему значение $\chi(0,b)$ стремиться к нулю. Поскольку при этом α_b из (14) экспоненциально убывает (ибо $\alpha_b=-u'(R_\delta)/u(R_\delta)\leq C_z v_0/\exp((l_- -\varepsilon)b+O(1))$, то краевые условия будут все в большей степени приближаться к краевым условиям непроницаемости.

Теорема полностью доказана.

Литература

1. *Горбань А.Н., Манчук В.Е., Петушкова Е.В.* Динамика корреляций между физиологическими параметрами и эколого-эволюционный принцип полифакториальности. // Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем. Л.: Гидрометеоиздат. Т. 10. 1987. С. 187-198.
2. *Светличная Г.Н., Смирнова Е.В., Покидышева Л.И.* Корреляционная адаптометрия как метод оценки кардиоваскулярного и респираторного взаимодействия. // Физиология человека. Т.23, №3. 1997. С. 58-62.
3. *Смирнова Е.В., Чеусова Е.П., Зайцева О.И.* Оценка эффективности проводимой терапии методом корреляционной адаптометрии // Тез.

докл. Второй научно – практической конференции «Проблемы информатизации города», 14-16 марта 1995 г. Красноярск 1995, С. 106-108.
4. *Стрыгина С.О., Дементьев С.Н., Усков В.М., Чернышов Г.И.* Динамика системы корреляционных взаимодействий между физиологическими параметрами больных инфарктом миокарда // Труды конференции "Математика, компьютер, образование (МКО)", 24-29 января 2000 г., г. Дубна, вып. 7, 2000, с. 685-689.
5. *Пругов П.В., Волошенко Е.В., Мансурова Т.П., Нефедов В.П.* Оценка эффективности использования клофелина с помощью метода корреляционной адаптометрии // Материалы VIII Всероссийского съезда анестезиологов-реаниматологов, 11-15 сентября 2002 г., Омск.
6. *Масаев С.Н., Доррер М.Г.* Оценка системы управления компанией на основе метода адаптационной корреляции к внешней среде // Проблемы Управления , №3, 2010, с. 45-50.
7. *Gorban A.N., Smirnova E.V., Tyukina T.A.* Correlations, Risk and Crisis: from Phisiology to Finance, Physica A, Vol.389, Issue 16, 2010, p. 3193-3217.
8. *Васильев А.В., Мальцев Г.Ю., Хрущева Ю.В., Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И.* Применение метода корреляционной адаптометрии для оценки эффективности лечения больных ожирением // Вопросы питания. Том 76, №2, 2007, с.36-38.
9. *Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И., Герасимов А.Н.* Применение метода корреляционной адаптометрии в медико – биологических задачах // Исследование операций (модели, системы, решения). М.: ВЦ РАН, 2002, с.51-55.
10. *Шпитонков М.И.* Корреляционная адаптометрия. Оценка эффективности применения диетотерапии // Труды ИСА РАН, 2014, т.64, вып. 3, с. 60-63.
11. *Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И.* Корреляционная адаптометрия. Модели и приложения к биомедицинским системам. // Математическое моделирование, т. 20, № 8, 2008, с. 13-27.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1973, 740 с.

Шпитонков Михаил Иванович. Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН. Москва. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент. Количество печатных работ: 74. Область научных интересов: математические модели в биологии, медицине, эпидемиологии, физиологии, экологии, экономике. E-mail: mixash@bk.ru

The boundary conditions in the problem of correlation adaptometry

M.I. Shpitonkov[1]
[1]A.A. Dorodnicyn computing center FRC IC of RAS, Moscow, Russia

Abstract. Using the methods of evolutionary optimality settle the boundary conditions of impermeability to the diffusion model of the correlation adaptometry.
Keywords: *equation of Kolmogorov – Fokker – Planck, the boundary conditions of impermeability, evolutionary optimality, correlation adaptometry.*
DOI: 10.14357/20790279180412

References

1. *Gorban' A.N., Manchuk V.E., Petushkova E.V.* Dinamika korrelyatsij mezhdu fiziologicheskimi parametrami i ekologo-evolucionnyi printsip polifaktorial'nosti [Dynamics of correlations between physiological parameters and ecological-evolutionary principle of polyfactorial] // Problemy ekologicheskogo monitoringa I modelirovanie ekosistem [Ecological monitoring problems and ecosystems modeling]. – 1987. – V10. – P.187-198.
2. *Svetlichhaya G.N., Smirnova E.V., Pokidysheva L.I.* Korrelyatsionnaya adaptometriya kak metod otsenki kardio-vaskulyarnogo I respiratornogo vzaimodejstviya [Correlation adaptometry as a method of evaluating cardiovascular and respiratory interaction] // Human physiology. – 1997. – Vol.23, No. 3. – P. 58–62.
3. *Smirnova E.V., Cheusova E.P., Zajtseva O.I.* Otsenka effektivnosti provodimoj terapii metodom korrelyatsionnaoj adaptometrii [Evaluation of the

therapy effectiveness by the correlation adaptometry techknique]. Trudy 2 Nauchno-practicheskoj konferentsii "Problemy informatizatsii goroda" [Proc. 2th scientific – practical conference "Problems of the city informatization "]. – Krasnoyarsk, 1995. – P.106-108.

4. *Strygina S.O., Dement'ev S.N., Uskov V.M., Chernyshov G.I.* Dinamika sistemy korrelyatsionnykh vzaimodejstvij mezhdu fiziologicheskimi parametrami bol'nykh infarktom miokarda [The dynamics of the system correlation in-teractions between physiological parameters of patients with myocardial infarction]. Trudy konferentsii Matematika, komp'yuter, obrazovanie [Proc. conference "Mathematics, computer, education"]. – Dubna, 2000. – issue 7. – P.685-689.
5. *Prugov P.V., Boloshenko E.V., Mansurova T.P., Nefedov V.P.* Otsenka effektivnosti ispol'zovaniya klofelina c pomoshch'yu metoda korrelyatsionnaoj adaptometrii [Evaluation of effectiveness to use of clonidine by the correla-tion adaptometry technique]. Trudy VIII Vserossijskogo s'ezda anesteziologov-reanimatologov [Proc. of the VIII all-Russian Congress of anaesthesiologists]. – Omsk, 2002. – P.43-48.
6. *Masaev S.N., Dorrer M.G.* Otsenka sistemy upravleniya kompaniej na osnove metoda adaptastionnoj korrelyatsii k vneshnej srede [Assessment of the company's management system based on the method of adaptive correlation to the environment]. // Control Problems. – 2010. – No. 5. – P. 45–50.
7. *Gorban A.N., Smirnova E.V., Tyukina T.A.* Correlations, Risk and Crisis: from Phisiology to Finance, Physica A, Vol.389, Issue 16, 2010, p. 3193-3217.
8. *Vasil'ev A.V., Mal'tsev G. Yu., Khrushcheva Yu. V., Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I.* Primenenie metoda korrelyatsionnaoj adaptometrii dlya otsenki effektivnosti lecheniya bol'nykh ozhireniem [Application of correlation adaptometry technique to assess the effectiveness of treatment of patients with obesity] // The nutriation issues. – 2007. – Vol. 76, No. 2. – P. 36–38.
9. *Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I., Gerasimov A.N.* Primenenie metoda korrelyatsionnaoj adaptometrii v medico-biologicheskikh zadachakh [Application of the correlation adaptometry technique to biomedical tasks] // Trudy CCRAS Issledovanie operatsij (modeli, sistemy, resheniya) [Operations research (models, systems, solutions)]. – 2002. – P. 51-55.
10. *Shpitonkov M.I.* Korrelyatsionnaua adaptometriua. Otsenki effektivnosti primeneniya dietoterapii. // Trudy ISA RAS, 2014, v.64, the issue 3, p. 60-63.
11. *Razhevajkin V.N., Shpitonkov M.I.* Korrelyat-sionnaua adaptometriua. Modeli I prilozheniya k biomeditsinskim sis-temam [Correlation adap-tometry. Models and applications to biomedical systems] // Mathematical modeling. – 2008. – Vol. 20, No. 8. – P. 13–27.
12. *Kato T.* Teoriya vozmushchenii linejnykh oper-atorov. [Perturbation theory of linear operators.]. Moscow: The world, 1973, 740 p.

Shpitonkov Mikhail Ivanovitch. Senior researcher. A.A. Dorodnicyn computing center FRC IC of RAS . Moscow, Vavilova st., 40. Ph.D, associate professor. Graduated from Moscow State University in 1982. Number of publications: 74. Research interests: mathematical models in biology, medicine, epidemiology, physiology, ecology, and economy.