

# Динамические системы

## Бегущие волны и пространственно-временной хаос в обобщенном уравнении Курамото-Сивашинского\*

Н.А. Магницкий<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе проведен аналитический и численный анализ перехода к пространственно-временному хаосу в обобщенном уравнении Курамото-Сивашинского через каскады бифуркаций бегущих волн в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. Доказано, что бифуркационным параметром является величина скорости распространения бегущих волн вдоль пространственной оси, явно не входящая в исходное уравнение.

**Ключевые слова:** обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского, ФШМ-каскад бифуркаций, бегущие волны, сингулярные аттракторы.

**DOI:** 10.14357/20790279180409

### Введение

В работе [1] автором проведен аналитический и численный анализ одномерного уравнения Курамото-Сивашинского

$$u_t + u_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} + u_{zzz} = 0 \quad (1)$$

с положительными параметрами  $\alpha, \beta$ . Уравнение (1) широко используется при описании волновых процессов в активных и диссипативных средах, при моделировании простейших процессов турбулентности, при изучении волн на границе двух вязких жидкостей, при описании волновых явлений в плазме в тороидальных установках, при изучении поведения фронта пламени и других. В [2] предложено также рассмотреть более сложное обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского, имеющее вид:

$$u_t + u^n u_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} + u_{zzz} = 0. \quad (2)$$

В настоящей работе проведен аналитический и численный анализ перехода к пространственно-временному хаосу в уравнении

(2). Доказано, что при определенных значениях параметров уравнение (2) как и уравнение (1) имеет в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого бесконечное число различных устойчивых волновых решений, бегущих вдоль пространственной оси с произвольными скоростями. А также бесконечное число различных режимов пространственно-временного хаоса, причем бифуркационным параметром является величина скорости распространения бегущих волн вдоль пространственной оси, явно не входящая в исходное уравнение.

### 1. Сведение к системе ОДУ с помощью автомодельной замены переменных

Рассмотрим задачу (2) на всей числовой оси:  $u(x, t) : R \times R \rightarrow R$ . Анализ регулярных решений уравнения (2) проведем с помощью автомодельной замены независимых переменных  $\xi = x - ct$ , сведя тем самым исходное уравнение (2) к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению:

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 17-07-00116а и № 18-29-10008мк.

$$-c u' + (u^{n+1})' / (n+1) + \alpha u'' + \beta u''' + u''' = 0, \quad (3)$$

где производная берется по  $\xi$ . Интегрируя уравнение (3), получим уравнение:

$$u''' + \beta u'' + \alpha u' - c u + u^{n+1} / (n+1) + \delta = 0, \quad (4)$$

где  $\delta$  - произвольная постоянная. Уравнение (4) сведем к нелинейной системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u' = v,$$

$$v' = -\alpha v - w,$$

$$w' = (-c - \alpha\beta)u + u^{n+1} / (n+1) - \beta w + \delta. \quad (5)$$

Если  $(u(\xi), v(\xi), w(\xi))$  - решение системы ОДУ (5), то  $u(x, t) = u(x - ct)$  будет являться решением системы в частных производных (2). При этом бегущие волны в уравнении (2) описываются предельными циклами системы (5), бегущие импульсы - петлями сепаратрис седло-фокусов системы (5), а пространственно-временной хаос - сингулярными аттракторами системы (5) в смысле универсальной бифуркационной теории Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого [3-7].

## 2. Область диссипативности и особые точки системы ОДУ

Исследуем область диссипативности системы (5):

$$\text{div } F(u, v, w) = \partial F_1 / \partial u + \partial F_2 / \partial v + \partial F_3 / \partial w = -\beta.$$

Следовательно, система уравнений (5) всюду диссипативна при  $\beta > 0$ . Найдем особые точки  $O = (u_*, v_*, w_*)$  системы (5), приравняв к нулю правые части ее уравнений:

$$v = 0,$$

$$w = -\alpha u,$$

$$(-c - \alpha\beta)u + u^{n+1} / (n+1) - \beta w + \delta = 0.$$

Получим, что  $v_* = 0$ ,  $w_* = -\alpha u_*$ , а  $u_*$  является решением уравнения:

$$u^{n+1} / (n+1) - cu + \delta = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим только такую особую точку  $O$  системы (5), для которой  $u_*^n = c(n+1)$  при  $\delta = 0$ .

Ясно, что при  $\delta > 0$  значение  $u_*$  уменьшается и при  $\delta_0 = c^{(n+1)/n} n / (n+1)$  значение  $u_*^n = c$ .

## 3. Исследование устойчивости и типа особой точки

Исследуем устойчивость и тип особой точки  $O$  системы (5). Матрица линеаризации правой части системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & , & 1, & 0 \\ -\alpha & , & 0, & -1 \\ -c - \alpha\beta + u_*^n & , & 0, & -\beta \end{pmatrix},$$

а ее характеристическим уравнением является уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \alpha \lambda - c + u_*^n) = 0, \quad (7)$$

которое при  $\delta = 0$  принимает вид

$$\lambda^3 + \beta \lambda^2 + \alpha \lambda + cn = 0.$$

**Теорема 1.** При малых  $\delta_0(c)$  и  $0 \leq \delta < \delta_0$  особая точка  $O$  системы (5) является устойчивым узлом (устойчивым фокусом) при  $\beta^2 / 4 > \alpha$  ( $\beta^2 / 4 < \alpha$ ).

*Доказательство.* При  $\delta = \delta_0(c)$  характеристическое уравнение (7) принимает вид:

$$\lambda(\lambda^2 + \beta \lambda + \alpha) = 0$$

и имеет корни:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = -\beta / 2 \pm \sqrt{\beta^2 / 4 - \alpha}$ . Последние два корня являются либо вещественными отрицательными при  $\beta^2 / 4 > \alpha$ , либо комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью при  $\beta^2 / 4 < \alpha$ , причём

$$\lambda_2 \lambda_3 = (-\beta / 2 - \sqrt{\beta^2 / 4 - \alpha})(-\beta / 2 + \sqrt{\beta^2 / 4 - \alpha}) = \alpha > 0.$$

А так как в уравнении (7) произведение корней характеристического уравнения равно  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -(u_*^n - c)$  и при малых  $\delta_0(\tilde{n})$  произведение корней отрицательно при всех  $0 \leq \delta < \delta_0$ , то корень  $\lambda_1$  является также вещественным отрицательным числом и, следовательно, точка  $O$  является устойчивым узлом или устойчивым фокусом в зависимости от того, будет ли  $\beta^2 / 4 > \alpha$  или  $\beta^2 / 4 < \alpha$ . Теорема доказана.

Из Теоремы 1 следует, что наибольший интерес представляет изучение возможных каскадов бифуркаций устойчивой особой точки  $O$  в случае, когда она является устойчивым фокусом и ее первой бифуркацией является бифуркация Андронова-Хопфа рождения устойчивого предельного цикла. Именно в этом случае в системе (5) возможно существование всех трех каскадов бифуркаций устойчивых предельных циклов и бесконечного числа хаотических сингулярных аттракторов в соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, а обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского (2) может иметь бесконечное семейство наиболее сложных периодических и непериодических (хаотических) бегущих волн вплоть до бегущих импульсов.

**Теорема 2.** При фиксированном значении  $\delta \geq 0$  и фиксированных положительных значениях параметров  $\alpha, \beta$  таких, что  $\beta^2 / 4 < \alpha$ , рождение устойчивого предельного цикла из устойчивого фокуса  $O$  в результате бифуркации Андронова-Хопфа происходит при  $c = c_*$ , где  $u_*^n(c_*, \delta) - c_* = \alpha\beta$ .

**Доказательство.** Достаточным условием рождения устойчивого предельного цикла из устойчивой особой точки  $O$  типа устойчивый фокус в результате бифуркации Андронова-Хопфа является условие перехода двух комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (7) в особой точке  $O$  слева направо через мнимую ось плоскости комплексного переменного. В точке перехода (точке бифуркации) вещественные части двух комплексно сопряженных корней характеристического уравнения равны нулю, а третий корень остается вещественным и отрицательным. Следовательно, в точке бифуркации  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = i\omega, \lambda_3 = -i\omega$ . Тогда по теореме Виета

$$\begin{aligned} \lambda_1(i\omega)(-i\omega) &= -(u_*^n - c), \\ \lambda_1(i\omega) + \lambda_1(-i\omega) + \omega^2 &= \alpha, \\ \lambda_1 + i\omega + (-i\omega) &= -\beta. \end{aligned}$$

Решая последнюю систему уравнений относительно переменных  $\lambda_1, \omega, c$ , найдем, что  $\lambda_1 = -\beta, \omega = \sqrt{\alpha}, u_*^n(c_*, \delta) - c_* = \alpha\beta$ . Теорема доказана.

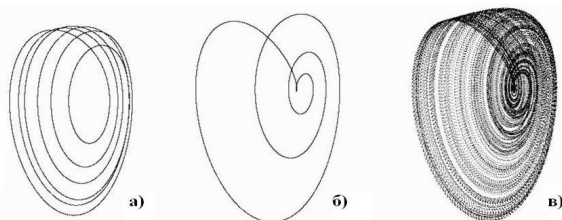
Из Теоремы 2 следует, что бифуркационным параметром в системе уравнений (5) является параметр  $c$ , характеризующий величину скорости распространения возмущений вдоль оси  $x$  в обобщенном уравнении Курамото-Сивашинского, который не входит явно в исходное уравнение (2). Исследование следующих бифуркаций при увеличении значений параметра  $c$  аналитическими методами, начиная с бифуркации удвоения периода родившегося предельного цикла, является чрезвычайно сложной задачей. Для этого необходимо найти аналитически мультипликаторы цикла, что возможно в весьма редких случаях, и определить такое значение параметра  $c$ , при котором все три мультипликатора являются вещественными числами, причем один из них равен +1, второй -1, а третий лежит в интервале (-1,0). Поэтому, дальнейшее исследование усложнения динамики решений системы (5) и уравнения (2) проведем численными методами.

#### 4. Сценарий перехода к пространственно-временному хаосу

Рассмотрим случай  $n = 3$ . Как и в работе [1], проведем численное исследование си-

стемы (5) при фиксированных значениях параметров  $\alpha = 1.6, \beta = 0.57, \delta = 0$  и росте значений бифуркационного параметра  $c > 0$ . При  $c \in (0, c_* = \alpha\beta/n = 0.304)$  особая точка  $O$  системы (5) является устойчивым фокусом, при  $c = 0.304$  из нее рождается устойчивый (асимптотически орбитально устойчивый) предельный цикл в результате бифуркации Андронова-Хопфа, который существует до значения  $c \approx 0.585$ , при котором из него рождается устойчивый предельный цикл удвоенного периода. При дальнейшем увеличении значений параметра  $c$  в системе (5) наблюдается каскад Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода циклов. Цикл периода 4 рождается при  $c \approx 0.6442$ , цикл периода 8 рождается при  $c \approx 0.6572$ , цикл периода 16 рождается при  $c \approx 0.66$  т.д. При  $c \approx 0.662$  в системе (5) существует первый самый простой сингулярный (хаотический) аттрактор – аттрактор Фейгенбаума – непериодическая траектория, являющаяся пределом циклов из каскада Фейгенбаума.

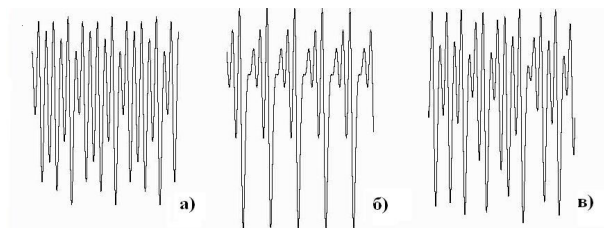
При дальнейшем увеличении значений параметра  $c$  обнаруживается последовательность устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского и затем в соответствии с гомоклиническим порядком. Так, например, цикл периода 6 субгармонического каскада обнаруживается при  $c \approx 0.6685$  (рис.1,а), цикл периода 5 – при  $c \approx 0.683$ . Устойчивый цикл  $C_4$  гомоклинического каскада, совершающий 4 условных оборота вокруг седло-фокуса, обнаруживается при  $c \approx 0.714$  (рис.1,б).



**Рис. 1.** Цикл периода 6 субгармонического каскада бифуркаций: а – цикл  $C_4$  гомоклинического каскада бифуркаций и один из сингулярных аттракторов (б) в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса (в) системы ОДУ (5)

Как известно [4], последовательность циклов полного гомоклинического каскада должна сходиться к петле сепаратрисы седло-фокуса, однако, при данном наборе значений параметров системы, петля сепаратрисы, по-видимому, не существует. Ее обнаружение в пространстве четырех параметров системы  $(\alpha, \beta, \delta, c)$  является сложной задачей, так как многообразие, на котором существует

петля, имеет коразмерность два или даже три. На рис. 1 изображены: цикл периода 6 субгармонического каскада бифуркаций, цикл  $S_4$  гомоклинического каскада бифуркаций и порожденный им сложный сингулярный аттрактор системы ОДУ (5), лежащий в окрестности петли сепаратрисы и найденный при  $c \approx 0.716$ . Таким образом численно установлено, что в системе (5) при изменении параметра  $c$  реализуется каскад Фейгенбаума удвоения периода устойчивых предельных циклов, полный субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского и неполный гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого. Найденным циклам системы (5) соответствуют бегущие волны обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского (2). На рис. 2 представлены такие волны, соответствующие циклам и сингулярному аттрактору, изображенным на рис. 1.



**Рис. 2.** Бегущие периодические и хаотические волны обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского (2), соответствующие циклам и аттрактору системы ОДУ (5), изображенным на рис. 1

### Заключение

В работе проведен аналитический и численный анализ обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского. Найденны условия рождения и получены решения уравнения в виде периодических и

хаотических бегущих волн. Показано, что переход к пространственно-временному хаосу в обобщенном уравнении Курамото-Сивашинского осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого через субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций устойчивых предельных циклов системы уравнений ОДУ, полученной из исходного уравнения автомодельной заменой переменных.

### Литература

1. *Магницкий Н.А.* Бегущие волны и пространственно-временной хаос в уравнении Курамото-Сивашинского // Дифференциальные уравнения. 2018. Т.54, №9, с. 1292–1296.
2. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. М.: МИФИ, 2008. 352 с.
3. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics. Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
4. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд, 2011. 320 с.
5. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. INTECH, 2012. P. 133-174.
6. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in Turbulence. INTECH, 2017. P.29-59.
7. *Magnitskii N.A.* Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. INTECH, 2018, P. 197-215.

**Магницкий Николай Александрович.** Институт системного анализа Федерального Исследовательского Центра «Информатика и управление» Российской академии наук. Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник. Количество печатных работ: более 250. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети. E-mail: nikhmag@gmail.com; nmag@isa.ru

## Running waves and spatio-temporal chaos in the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation

N.A. Magnitskii<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Federal Research Center Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Abstract.** The analytical and numerical analysis of the transition to spatio-temporal chaos in the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation through cascades of traveling wave bifurcations is performed in accordance with the universal Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii bifurcation scenario. It is proved that the bifurcation parameter is the magnitude of the propagation velocity of traveling waves along the spatial axis, which is clearly not included in the initial equation.

**Keywords:** *generalized Kuramoto-Sivashinsky equation, FSM-cascade of bifurcations, traveling waves, singular attractors.*

**DOI:** 10.14357/20790279180409

### References

1. *Magnitskii N.A.* Begushchiye volny i prostranstvenno-vremennoy khaos v uravnenii Kuramoto-Sivashinskogo [Running waves and spatio-temporal chaos in the Kuramoto-Sivashinsky equation] // *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential Equations]. 2018. v.54, No.9, p.1292–1296
2. *Kudryashov N.A.* Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of nonlinear mathematical physics]. M.: MIFI, 2008. 352 s.
3. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics (monograph). Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
4. *Magnitskii N.A.* Teoriya dinamicheskogo khaosa [Theory of dynamical chaos]. M.: Lenand, 2011. 320s.
5. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in *Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications*. INTECH, 2012. P.133-174.
6. *Evstigneev N.M., Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in *Turbulence*. INTECH, 2017. P.29-59.
7. *Magnitskii N.A.* Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in *Chaos Theory*. INTECH, 2018, P. 197-215.

**Magnitskii N.A.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Institute for Systems Analysis Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks. E-mail: nkmagn@gmail.com; nmag@isa.ru