

Моделирование экономического роста с учетом миграционных потоков*

М.Г. ДМИТРИЕВ^I, А.П. ПЕТРОВ^{II}, О.Г. ПРОНЧЕВА^{III}

^I Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия

^{II} Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

^{III} Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена построению и исследованию модели экономического роста, учитывающей миграционные потоки в составе трудового ресурса экономики. В основе модели лежит производственная функция Кобба-Дугласа, одним из факторов которой является совокупный труд. В свою очередь, совокупный труд представляет собой агрегат, учитывающий различие между квалифицированным и неквалифицированным трудом, которые вносят различный вклад в выпуск, а также трудом коренных жителей и мигрантов, имеющих различную динамику. Миграционный поток в каждом квалификационном классе полагается пропорциональным разности между средним уровнем потребления в данной категории и экзогенно заданной функцией, имеющей смысл уровня потребления в странах-донорах миграции. Исследование модели нацелено на анализ влияния миграционных потоков на экономический рост.

Ключевые слова: математическое моделирование, миграция, экономический рост, численный эксперимент, квалифицированный и неквалифицированный труд.

DOI: 10.14357/20790279190202

Введение

Классические модели экономического роста не рассматривали миграцию, что вполне соответствовало социальным реалиям того времени и запросам, которые эти реалии предъявляли к теоретическим исследованиям. Однако последние десятилетия ознаменовались значительным усилением миграции, с увеличением как вклада мигрантов в экономику, так и создаваемой ими нагрузки на социум. Например, в статье [1] исследуется влияние культурного многообразия, создаваемого под влиянием миграционных процессов, на экономический рост в целом. В работе [2] построена модель, позволяющая оценить влияние таких факторов, как общий язык, расстояние, диаспоральные связи, колониальные отношения и т.д. на потоки миграции в целом. В работах [3,4] была исследована связь миграции и таких факторов, как пол, наличие детей и др. Миграция в математических моделях роста и различные постановки задач управляемой миграции, в т.ч. международной, рассматривались в работах [5-8].

Разделы 1, 2 посвящены, соответственно, построению модели и формулировке ее упрощенного варианта, Раздел 3 – анализу стационарного режима при отсутствии миграции. Оценки параметров для вычислительных экспериментов с моделью проведены в Разделе 4, а сами вычислительные эксперименты – в Разделе 5. В Заключение подводятся основные итоги работы.

1. Построение модели

Определим выпуск $Y(t)$ трехфакторной производственной функцией [9], основанной на функции Кобба-Дугласа, в которой на месте труда стоит CES-агрегат из квалифицированного (S , skilled) и неквалифицированного (U , unskilled) труда:

$$Y(t) = AK^\alpha(t) \left(\gamma S^\psi(t) + (1-\gamma)U^\psi(t) \right)^{(1-\alpha)/\psi}, \quad (1)$$

где t – время, $K(t)$ – капитал, параметры производственной функции удовлетворяют неравенствам, α – эластичность выпуска по капиталу; параметр γ описывает вклад каждого из видов труда

* Работа поддержана грантами РФФИ 18-01-00551а, 16-29-12878 офи_м

в выпуск, а параметр ψ – замещение между ними. Перечисленные параметры удовлетворяют неравенствам $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma < 1$, $\psi < 1$; каждый из них обсуждается более подробно в Разделе 4 (см. также [10, 11]).

В каждом из двух указанных квалификационных классов имеется как коренное (соответственно, $S_b(t), U_b(t)$), так и мигрантское ($S_m(t), U_m(t)$) население (в которое мы включаем как самих мигрантов, так и их потомков):

$$S(t) = S_b(t) + S_m(t), U(t) = U_b(t) + U_m(t). \quad (2)$$

Предполагается, что на протяжении изучаемого процесса коренные и некоренные жители не перемешиваются и, вообще говоря, в различной степени репрезентированы в квалифицированном и неквалифицированном труде. Также предполагается, что коренные жители данной страны не мигрируют за рубеж.

Динамика труда коренных жителей в каждом классе предполагает, вообще говоря, не только вступление молодежи в трудовые классы и выбытие из них пожилых людей, но и возможность социальной мобильности (переход индивидов из неквалифицированного класса в квалифицированные и наоборот):

$$\begin{aligned} S_b(t+1) &= S_b(t) + \beta_{11}S_b(t) + \beta_{12}U_b(t), \\ U_b(t+1) &= U_b(t) + \beta_{21}S(t) + \beta_{22}U_b(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты $\beta_{ij} (i, j = 1; 2)$ полагаются постоянными; это означает, в частности, что мы не рассматриваем такие структуры, как демографические волны, приводящие к неравномерности динамики количества работников.

Некоренное население может испытывать приток (и отток), в зависимости от среднего уровня потребления данного трудового класса. Именно, если среднее потребление квалифицированного рабочего C_s / S превышает величину $c_{s0}(t)$, то приток квалифицированного труда положителен. Здесь C_s – общее потребление квалифицированных работников, $c_{s0}(t)$ – уровень потребления квалифицированного труда в странах-донорах миграции (которые рассматриваются как единое целое, без выделения отдельных стран), постоянная r_0 характеризует рост уровня жизни в этих странах. Конкретный вид функции $c_{s0}(t)$ обсуждается в Разделе 5 (посвященном квантификации модели). Общая численность квалифицированных мигрантов (потенциальных и уже находящихся в принимающей стране) имеет вид: $S_{m0}(1+r_s)^t$, где

r_s – коэффициент прироста, S_{m0} – их начальная численность в начальный год. Эту величину можно понимать, как численность представителей данного класса в странах-донорах миграции, готовых мигрировать, либо уже мигрировавших в поисках занятости в рассматриваемую принимающую страну.

Таким образом, численность потенциальных (т.е. находящихся в родной стране) квалифицированных мигрантов равна $S_{m0}(1+r_s)^t - S_m(t)$, а разность удельных потреблений в принимающей стране и стране-доноре равна $C_s / S - c_{s0}(t)$. Примем, что если указанная разность отрицательна, то миграционный приток $S_{inflow}(t)$ близок к нулю, а если она положительна, то поток приблизительно пропорционален произведению этой разности удельных потреблений на количество потенциальных квалифицированных мигрантов (коэффициент пропорциональности обозначим через k_s), т.е.

$$\text{если } C_s / S < c_{s0}(t), \text{ то } S_{inflow}(t) \approx 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{если } C_s / S \geq c_{s0}(t), \\ \text{то } S_{inflow}(t) \approx k_s \left(S_{m0}(1+r_s)^t - S_m(t) \right) \left(\frac{C_s(t)}{S(t)} - c_{s0}(t) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве гладкой функции, обладающей указанным свойством, примем

$$S_{inflow}(t) = k_s \ln \left[1 + \exp \left(\left(S_{m0}(1+r_s)^t - S_m(t) \right) \left(\frac{C_s(t)}{S(t)} - c_{s0}(t) \right) \right) \right] \quad (6)$$

Здесь мы используем то, что функция $y(x) = \ln(1 + \exp(kx))$ близка к нулю при отрицательных значениях переменной x , и приближается к асимптоте $y_{as} = kx$ при положительных значениях переменной, а в окрестности начала координат имеет гладкий, выпуклый в его сторону, переходный слой (Рис. 1).

Аналогичным образом описывается отток $S_{outflow}(t)$ квалифицированных мигрантов, т.е. их

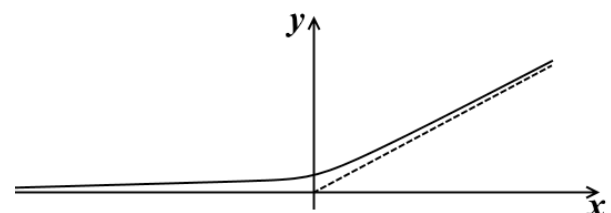


Рис. 1. Абсцисса x имеет смысл аргумента экспоненты в (6), а ордината y равна величине $S_{outflow}$. Угловым наклоном пунктирной прямой равен k_s

возвращение в родную страну. Отличие состоит в том, что (i) потенциальные возвращающиеся – это мигранты, находящиеся в принимающей стране, т.е. их численность равна S_{m0} , (ii) отток близок к нулю при положительной разности $C_s / S - c_{s0}(t)$ и возрастает с ее модулем при отрицательной разности (другими словами, мигранты активно покидают принимающую страну, если удельное потребление в ней становится меньше, чем у них на родине). Таким образом,

если $\frac{C_s(t)}{S(t)} < \tilde{n}_{s0}(t)$,

$$\text{то } S_{outflow}(t) \approx k_s S_m(t) \left| \frac{C_s(t)}{S(t)} - c_{s0}(t) \right|$$

если $\frac{C_s(t)}{S(t)} \geq \tilde{n}_{s0}(t)$, то $S_{outflow}(t) \approx 0$

В качестве гладкой функции, обладающей указанным свойством, примем

$$S_{outflow}(t) = k_s \ln \left[1 + \exp \left(-S_m(t) \left(\frac{C_s(t)}{S(t)} - c_{s0}(1+r_0)^t \right) \right) \right] \quad (7)$$

(здесь мы принимаем, что функция $y = \ln(1 + \exp(-kx))$ близка к нулю при положительных значениях переменной x , см. Рис. 2).

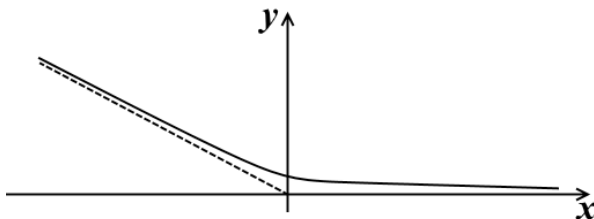


Рис. 2. Абсцисса x имеет смысл аргумента экспоненты в (7), а ордината y имеет смысл величины $S_{outflow}$. Угловым наклоном пунктирной прямой равен k_s .

Кроме того, для мигрантского населения в принимающей стране имеют место процессы вступления молодежи в квалификационные трудовые классы, выбытие пожилых людей из этих классов и возможность социальной мобильности (перемещение между классами). С учетом всех перечисленных процессов, уравнение динамики численности квалифицированных мигрантов имеет вид:

$$S_m(t+1) = \max \{0; (1+\mu_{11})S_m(t) + \mu_{12}U_m(t) + S_{inflow}(t) - S_{outflow}(t)\} \quad (8)$$

Здесь коэффициенты μ_{11}, μ_{12} аналогичны коэффициентам β_{11}, β_{12} из уравнения (3).

В уравнении (8), операция выбора максимального из двух значений, т. е. $\max \{0; \dots\}$ не несет

экономического либо социологического содержания; она необходима лишь ввиду того, что данные уравнения описывают динамику в дискретном времени. Одно из различий между дифференциальными уравнениями и уравнением в дискретном времени состоит в том, что последние могут иметь колебательные решения в окрестности нуля там, где «аналогичное» (в некотором смысле) дифференциальное уравнение имеет монотонно убывающее решение. (Простейший пример дается сопоставлением уравнений $dy/dt = -2y$ и $y(t+1) - y(t) = -2y(t)$; при положительном начальном значении $y(0)$, первое из них имеет монотонно убывающее положительное решение, второе уравнение имеет знакопеременное, колеблющееся вокруг нуля решение). Поэтому для того, чтобы обеспечить неотрицательность переменной $S_m(t)$ в уравнение (8) добавлена операция $\max \{0; \dots\}$.

Аналогично, для неквалифицированного труда мигрантов имеем

$$U_m(t+1) = \max \{0; (1+\mu_{22})U_m(t) + \mu_{21}S_m(t) + U_{inflow}(t) - U_{outflow}(t)\} \quad (9)$$

где

$$U_{inflow}(t) = k_u \ln \left[1 + \exp \left(U_{m0}(1+r_u)^t - U_m(t) \right) \left(\frac{C_u(t)}{U(t)} - c_{u0}(t) \right) \right] \quad (10)$$

$$U_{outflow}(t) = k_u \ln \left[1 + \exp \left(-U_m(t) \left(\frac{C_u(t)}{U(t)} - c_{u0}(t) \right) \right) \right] \quad (11)$$

Перейдем к уравнению динамики капитала $K(t)$. Оно имеет стандартный вид:

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + \rho(1-a)Y(t), \quad K(0) = K^0, \quad (12)$$

где δ – коэффициент выбытия капитала, a – коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в выпуске), ρ – норма накопления.

Перейдем теперь к описанию потребления. Так как модель содержит различие между квалифицированным и неквалифицированным трудом, то возникает вопрос о том, как распределяется потребление между этими квалификационными классами. Положим, что в рассматриваемом обществе доля потребления, равная q ($0 \leq q \leq 1$), распределяется эгалитарно (например, через налоги и государственную систему перераспределения), другая – в соответствии со вкладом каждого квалификационного класса в выпуск. Формализуем это положение. Общее потребление $C(t) = (1-\rho)(1-a)Y(t)$ делится на две части. Доля q этого потребления распределяется поровну

между всеми индивидами, таким образом от этой части потребления квалифицированному труду до-
стается величина

$$C_{s1}(t) = \frac{S(t)}{S(t)+U(t)} q(1-\rho)(1-a)Y(t),$$

а неквалифицированному труду:

$$C_{u1}(t) = \frac{U(t)}{S(t)+U(t)} q(1-\rho)(1-a)Y(t).$$

Оставшаяся доля $1-q$ этого потребления рас-
пределяется в соответствии со вкладами в выпуск:

$$C_{s2}(t) = \gamma(1-q)(1-\rho)(1-a)Y(t),$$

$$C_{u2}(t) = (1-\gamma)(1-q)(1-\rho)(1-a)Y(t).$$

Таким образом, потребление квалифициро-
ванных работников составляет $C_s = C_{s1} + C_{s2}$, т.е.

$$C_s(t) = \frac{S(t)}{S(t)+U(t)} q(1-\rho)(1-a)Y(t) + \gamma(1-q)(1-\rho)(1-a)Y(t) \quad (13)$$

Аналогично, потребление неквалифициро-
ванных составляет $C_u = C_{u1} + C_{u2}$, т.е.

$$C_u(t) = \frac{U(t)}{S(t)+U(t)} q(1-\rho)(1-a)Y(t) + (1-\gamma)(1-q)(1-\rho)(1-a)Y(t) \quad (14)$$

Примем также, что в пределах каждого из
квалификационных классов, коренные жители и
мигранты не различаются по потреблению.

Система (1)-(3), (6)-(14) представляет собой
динамическую модель, описывающую влияние
миграционных потоков на экономический рост.
При этом, модель содержит в себе экзогенно зада-
ваемую динамику уровня жизни в стране-доноре.
Описанию этой динамики посвящен следующий
раздел.

2. Упрощающее предположение: модель без учета перемещений между классами

Примем для простоты, что как среди трудя-
щихся коренных жителей, так и среди мигрантов,
не происходит перемещения индивидов между ква-
лификационными классами. Заметим, что данная
динамика может иметь место не только в случае
социальной ригидности, при которой дети наслед-
дуют классовую принадлежность своих родителей
(либо, например, отца), но и при более сложных
процессах. Например, может иметь место ситуа-
ция, когда рождаемость в неквалифицированном
классе выше, но дети неквалифицированных рабо-
чих получают высшее образование и принадлежат
к квалифицированному классу; в результате квали-
фицированный класс растет быстрее неквалифи-
цированного. Другими словами, появление нового,
молодого работника в квалифицированном классе

вовсе не обязательно предполагает, что этот моло-
дой человек родился в семье квалифицированных
родителей. В нашей модели не делается предполо-
жений о связи между квалификационными клас-
сами родителей и их детей. Упрощающее предпо-
ложение данного раздела относится лишь к тому,
что при вступлении молодого человека в трудовой
возраст, он попадает в один из классов и остается в
нем до конца трудовой деятельности.

Кроме того, примем, что численность трудя-
щихся коренных жителей возрастает (либо убыва-
ет) в геометрической прогрессии, при этом, вооб-
ще говоря, скорости роста могут быть различными
в разных классах.

Тогда вместо уравнений (3) имеем для труда
коренного населения уравнения:

$$S_b(t+1) = (1+\beta_S)S_b(t),$$

$$U_b(t+1) = (1+\beta_U)U_b(t). \quad (15)$$

а вместо уравнений (8),(9) для труда мигрантов
имеем соответственно:

$$S_m(t+1) = \max\{0; (1+\mu_S)S_m(t) + S_{inflow}(t) - S_{outflow}(t)\} \quad (16)$$

$$U_m(t+1) = \max\{0; (1+\mu_U)U_m(t) + U_{inflow}(t) - U_{outflow}(t)\} \quad (17)$$

Таким образом, модель, не учитывающая пе-
ремещения между классами, имеет вид системы
уравнений (1), (2), (6), (7), (10)-(17). Численные
эксперименты (см. Раздел 6) проводились именно
для нее.

3. Стационарный режим при отсутствии миграции

Анализ стационарного режима при отсут-
ствии миграции имеет целью не только изучение
общих свойств построенной модели, но и опре-
деленную подготовку к оценке реалистичных
значений параметров модели. Эта подготовка не-
обходима постольку, поскольку не для всех пара-
метров доступны прямые статистические данные.
Анализ стационарного режима позволяет выра-
зить коэффициент Джини (доступный в данных
международной статистики) через параметры
модели, что позволит получить дополнительное
соотношение для параметров, которое будет ис-
пользовано при их оценке.

Положив в основной модели, что миграцион-
ные потоки (а также мигранты в данной стране в
начальный момент времени) отсутствуют, и скоро-
сти роста квалифицированного и неквалифициро-
ванного классов равны: $\beta_S = \beta_U = \beta$, получим из
(1), (2), (6), (7), (10)-(17) систему уравнений:

$$Y(t) = AK^\alpha(t) \left(\gamma S^\psi(t) + (1-\gamma)U^\psi(t) \right)^{(1-\alpha)/\psi} \quad (18)$$

$$K(t+1) = (1-\delta)K(t) + \rho(1-a)Y(t) \quad (19)$$

$$S(t) = (1+\beta)^t S(0), \quad U(t+1) = (1+\beta)^t U(0) \quad (20)$$

Будем искать решение, компоненты которого растут пропорционально с постоянной скоростью: $Y(t+1) = \lambda Y(t)$, $K(t+1) = \lambda K(t)$. Подставив эти выражения в (18),(19), получим после простых преобразований:

$$K(t) = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\rho(1-a)}{\beta+\delta} \right)^{1/(1-\alpha)} \left(\gamma S^\psi(0) + (1-\gamma)U^\psi(0) \right)^{1/\psi} (1+\beta)^t \quad (21)$$

$$Y(t) = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\rho(1-a)}{\beta+\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \left(\gamma S^\psi(0) + (1-\gamma)U^\psi(0) \right)^{\alpha/\psi} (1+\beta)^t \quad (22)$$

Выражения (21),(22) и представляют собой искомый стационарный режим.

Найдем коэффициент Джини в стационарном режиме. Потребление квалифицированных и неквалифицированных кадров составляет, соответственно:

$$C_s(t) = \left[\frac{S(0)}{S(0)+U(0)} q + \gamma(1-q) \right] (1-\rho)(1-a)Y(t) \quad (23)$$

$$C_u(t) = \left[\frac{U(0)}{S(0)+U(0)} q + (1-\gamma)(1-q) \right] (1-\rho)(1-a)Y(t) \quad (24)$$

Отсюда получаем, что доля квалифицированных в потреблении равна:

$$\frac{C_s(t)}{C_s(t) + C_u(t)} = \frac{S(0)}{S(0)+U(0)} q + \gamma(1-q) \quad (25)$$

Пусть изначально квалифицированные индивиды составляли долю ε в общем труде, т.е. $S(0)/(S(0)+U(0)) = \varepsilon$. Тогда на их долю приходится доля потребления, равная $\varepsilon q + \gamma(1-q)$. Коэффициент Джини равен модулю разности этих величин, т. е. $Gini = |\varepsilon q + \gamma(1-q) - \varepsilon|$. Отсюда имеем:

$$Gini = |(\gamma - \varepsilon)(1-q)|. \quad (26)$$

4. О параметрах модели

Настоящий раздел посвящен калибровке модели, т.е. определению значений параметров, которые могут в определенной степени репрезентировать реальность.

1. Эмпирическим аналогом нормы накопления ρ является доля инвестиций в ВВП. Некоторые значения для стран, принимающих трудовую миграцию в существенном объеме, имеют следующий вид [12]: Германия 19%, Франция 23%, Италия 17%, Россия 23%, Китай 44%, Британия 17%,

США 20%. Примем в качестве типичного значения: $\rho = 0,2$.

2. Вопрос об оценке нормы выбытия капитала δ рассматривался в работе [13] отдельно для публичного капитала (в который входят, например, дороги и мосты) и частного капитала (например, станки и прочее оборудование). Эти величины существенно изменяются как от страны к стране (в развитых странах время жизни физического капитала ниже), так и с течением времени: время жизни новых поколений физического капитала, в целом, ниже, чем в предыдущие десятилетия. В качестве типичных значений δ для публичного капитала в указанной работе предлагаются значения от 0,025 для развивающихся стран, до 0,04 для наиболее развитых; для частного капитала: от 0,0425 (развивающиеся) до 0,085 (наиболее развитые). Имея в виду, что в нашей модели рассматривается совокупный капитал, а также подразумевая, что миграция происходит в развитую страну, примем в качестве типичного значения $\delta = 0,06$.

3. Коэффициент прямых затрат a описывает долю общего выпуска (gross output), не формирующую ВВП. Согласно [14], Бюро экономического анализа (Bureau of Economic Analysis) оценило общий выпуск США в \$32,1 трл., а ВВП – в \$18,6 трл. Отсюда имеем оценку для коэффициента прямых затрат: $(32,1-18,6)/32,1 = 0,42$. Поэтому в качестве типичного значения примем $a = 0,42$.

4. В качестве ориентира для оценки темпа роста коренного трудоспособного населения укажем значения годового прироста всего населения для некоторых стран в 2017 году: Германия 0,41%, Франция 0,39%, Италия 0,13%; США 0,71%, Британия 0,65%, страны с высоким доходом в целом 0,56, Россия 0,11% [15]. Данные для естественного прироста коренного населения, очевидно, несколько ниже приведенных цифр, а данные по трудоспособному населению могут отличаться как в большую, так и в меньшую сторону (особенно в странах с демографическими волнами). Тем не менее, указанные цифры дают определенное представление о темпах роста коренного трудоспособного населения.

С учетом того, что в большей фазе демографической волны естественный прирост в России отрицателен, мы будем рассматривать два типичных значения: положительное $\beta = 0,005$ (имея в виду, например, такие страны, как Британия и Германия) и отрицательное $\beta = -0,001$ (Россия, Италия). В обоих случаях скорость роста в квалификационных классах принимается равной ($\beta = \beta_S = \beta_U$).

5. Поскольку $\beta = \beta_S = \beta_U$, то соотношение между численностями коренного населения в ква-

лификационных классах является постоянным: $S_b(t)/U_b(t) = const$. Оно задается начальными условиями $S_b(0), U_b(0)$. В качестве эмпирического аналога для разделения на квалифицированную и неквалифицированную рабочую силу примем разделение населения трудоспособного возраста (25-64 лет) на имеющих и не имеющих законченное высшее образование (tertiary education). Доля граждан, имеющих высшее образование, варьируется в широких пределах: в нижней части базы данных ОЭСР [16] находятся такие страны, как Индонезия и Китай – по 10%, в верхней части – Канада и Россия – по 56%. Для стран – активных акцепторов миграции имеем: Италия – 18%, Германия – 28%, Франция – 35%, Британия и США – по 46%. Примем в качестве «типичного» соотношения, что численность неквалифицированной рабочей силы в полтора раза больше. Приняв также общую численность коренной рабочей силы в начальный момент времени за единицу, получим $S_b(0) = 0,4$, $U_b(0) = 0,6$.

6. Для эластичности по капиталу в производственной функции примем $\alpha = 0,6$, а для показателя ψ положим $\psi = 0,01$, что означает, что CES-функция, составляющая агрегированный труд из двух квалификационных классов, близка к функции Кобба-Дугласа (которая получается при предельном переходе $\psi \rightarrow 0$).

7. Эмпирические параметры, которые могли бы служить в качестве непосредственных ориентиров для параметров γ, q , нам неизвестны. Поэтому воспользуемся приведенным выше соотношением (26), связывающее эти параметры с коэффициентом Джини. Учтем, что доля квалифицированных индивидов в общем труде составляет $\varepsilon = 0,4$. Тогда (26) принимает вид:

$$Gini = |(\gamma - 0,4)(1 - q)|. \quad (27)$$

В соответствии с CIA Factbook [17], имеют место следующие значения коэффициента Джини (по текущему доходу): США – 0,45, РФ – 0,41, Британия – 0,32, Франция – 0,29, Германия – 0,27, Италия – 0,32.

Примем в качестве типичного значения $Gini = 0,32$. В соответствии с (27), ему соответствует, например, пара значений $\gamma = 0,8$; $q = 0,2$, или $\gamma = 0,76$; $q = 0,1$, или $\gamma = 0,86$; $q = 0,3$. Примем, для определенности, что $\gamma = 0,8$ (т.е., вклад квалифицированного работника в выпуск в 4 раза выше, чем неквалифицированного); $q = 0,2$ (т.е. 20% потребления распределяются между классами пропорционально их численности, и оставшиеся 80% распределяются между классами пропорционально вкладу в выпуск).

8. Совокупную факторную производительность примем равной единице: в начальный момент и возрастающей с темпом 0,5% в год: $A = \exp[0,005t]$.

9. Начальное значение капитала примем как соответствующее стационарному режиму в отсутствие миграции. Другими словами, подставив оговоренные в данном разделе значения параметров в формулу (21), получим $K(0) = 1,18$.

Перейдем к описанию параметров, описывающих страну-донора миграции. Необходимо отметить, что, как правило, каждая страна-акцептор принимает существенное количество мигрантов из нескольких стран-доноров. В некоторых случаях, эти страны-доноры могут значительно отличаться друг от друга как по социально-экономическим показателям, так и по их влиянию на миграционный поток. Поэтому предлагаемые ниже значения параметров следует рассматривать как некие «обобщенные» значения, предназначенные для описания ситуации в целом.

10. Начальные численности квалификационных классов страны-донора (с учетом тех, кто уже находится за рубежом) примем равными $S_{m0}(0) = 0,1$, $U_{m0}(0) = 0,9$, т.е. страна-донор имеет ту же общую численность населения, что и принимающая страна, но в ней лишь 10% трудящихся относятся к квалифицированному классу. Примем также, что в начальный момент все потенциальные мигранты находятся в родной стране: $S_m(0) = 0$, $U_m(0) = 0$.

11. Относительно роста населения приведем некоторые данные из базы Всемирного Банка [15]: Узбекистан – 1,7% (в год), Таджикистан – 2,1%, Арабский мир – 2,0%. Ориентируясь на эти значения, примем, что начальный рост населения страны-донора в обоих классах равен 2%: $r_s(0) = r_u(0) = 0,02$. Те же значения примем для мигрантов в стране-акцепторе, при этом будем считать, что они не переходят из одного класса в другой: $\mu_{11}(0) = \mu_{22}(0) = 0,02$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$. Ввиду общемировой тенденции снижения рождаемости, рассматривались сценарии, при которых темпы роста мигрантского населения (находящегося как в родной стране, так и за рубежом) постепенно убывают, начиная с указанного выше значения 2% и асимптотически приближаясь к соответствующему значению для коренного населения страны-акцептора:

$$\mu_{11}(t) = \mu_{22}(t) = r_s(t) = r_u(t) = 0,005 + 0,015 \exp[-0,05t] \quad (28)$$

12. Для получения ориентира относительно начального значения удельного потребления в стране-доноре рассмотрим соотношение между удель-

ными ВВП (ППС) в стране-доноре и стране-акцепторе. В соответствии с базой данных Всемирного Банка [18], имеем следующие данные (2017 г.): Таджикистан – 3180 долларов США (current international \$), Узбекистан – 6865, Россия – 25533. Для сравнения стран Европы и соответствующих доноров воспользуемся данными 2009 года (последний год перед Арабской весной): Европейский Союз – 32162, Германия – 37053, Алжир – 12242, Индия – 3920, Марокко – 6086, Пакистан – 4167. При довольно широкой вариации, в качестве приближения примем, что в начальный момент времени в каждом квалификационном классе потребление в стране-доноре в 5 раз ниже, чем в стране-акцепторе. Таким образом, $c_{s0}(0) = 0,2C_s(0)/S(0)$, $c_{u0}(0) = 0,2C_u(0)/U(0)$. Воспользовавшись формулами (23), (24) и подставив оговоренные выше значения параметров, получим $C_s(0) = 0,239$, $C_u(0) = 0,093$. Таким образом, $c_{s0}(0) = 0,12$, $c_{u0}(0) = 0,03$.

13. Для получения ориентира относительно темпов роста удельного потребления в странах-донорах рассмотрим средние темпы роста удельного ВВП (по базе данных Всемирного банка [19]) за 5 лет – 2012-2016 гг. Процедура усреднения необходима ввиду сильной волатильности данного показателя. Имеем: Узбекистан – 6,2%, Таджикистан – 4,5%, Алжир – 1,4%, Индия – 5,6%, Марокко – 1,7%, Пакистан – 2,4%. В соответствии с этим, примем, что в каждом классе в начальный момент времени рост удельного потребления в стране-доноре составляет 2% в год, и с течением времени постепенно убывает так, что удельное потребление в этой стране не превосходит удельное потребление в стране-акцепторе. Именно, положим:

$$c_{s0}(t+1) = \min\{1,02c_{s0}(t); 0,5[C_s(t)/S(t) + c_{s0}(t)]\} \quad (29)$$

$$c_{u0}(t+1) = \min\{1,02c_{u0}(t); 0,5[U_s(t)/U(t) + c_{u0}(t)]\} \quad (30)$$

14. Параметры k_s, k_u (см. формулы (6), (7), (10), (11)), описывающие масштаб миграционных потоков, подбирались так, чтобы обеспечить реалистичные значения при описанных выше значениях других параметров. Приняты значения $k_s = 0,05$, $k_u = 0,4$, при которых в экспериментах получено, что годовое сальдо миграции квалифицированных индивидов $S_{inflow}(t) - S_{outflow}(t)$ составляет примерно 0,005 от численности коренных индивидов в этом классе $S_b(t)$. Аналогичное соотношение для неквалифицированного класса имеет вид: $[U_{inflow}(t) - U_{outflow}(t)]/U_b(t) = 0,037$ (эти соотношения несколько варьируются с течением времени).

5. Численные эксперименты

Цель построения изложенной выше модели заключается в изучении влияния параметров миграции на социально-экономические показатели в стране-акцепторе. Далее, в пункте 1 мы приводим результаты численного эксперимента с параметрами, введенными в Разделе 4. Пункт 2 акцентирован на вопросе о том, что миграционный поток может сместить сложившийся в коренном населении баланс между квалифицированным и неквалифицированным трудом. Это ведет как к изменению показателей социального неравенства, так и динамике выпуска. Соответственно, в сериях экспериментов варьируется соотношение между квалифицированными и неквалифицированными мигрантами (при сохранении их общей численности), и изучаются результирующие изменения коэффициента Джини (табл. 2) и выпуска Y (табл. 3)

1. Приведем некоторые результаты численного эксперимента с указанными в п.5 значениями параметров. Расчет проводился для интервала в несколько десятков лет; в табл. 1 показаны рассчитанные значения переменных лишь для годов (т. е., значений t), кратных 10. Они показывают, что при введенных значениях параметров модель дает реалистичные темпы роста выпуска: 2,1-2,3% в год. Этот рост происходит за счет роста совокупной факторной производительности $A(t)$ (на 0,5%), роста коренного трудящегося населения (на 0,5%), естественного прироста мигрантского населения (убывающего от 2% до примерно 0,6%), квалифицированной миграции (примерно 0,5% от коренных трудящихся в этом классе) и неквалифицированной миграции (примерно 3,7% от коренных трудящихся в этом классе).

2. Оставим все параметры модели такими же, как в Разделе 4, за исключением численностей классов в стране-доноре миграции. Суммарную численность этих классов также оставим прежней (равной единице), но будем варьировать соотношение между ними. Например, запись «0,1+0,99» в табл. 2, 3 означает, что $S_{m0}(0)=0,1$; $U_{m0}(0)=0,99$. В табл. 2 представлены значения коэффициента Джини, вычисленного по формуле (26), в табл. 3 – значения выпуска Y . Результаты показывают, что сильное преобладание неквалифицированных работников в миграционном потоке приводит как к снижению темпов роста выпуска, так и к увеличению экономического неравенства.

Заключение

В настоящей работе построена математическая модель экономического роста, учитывающая

Табл. 1

Результаты расчета модели с параметрами, указанными в Разделе 5

t	S_b	U_b	S_m	U_m	$Gini$	K	Y	рост $Y, \%$
0	0,400	0,600	0	0	0,320	1,180	0,791	2,18
10	0,420	0,631	0,016	0,255	0,376	1,425	0,987	2,22
20	0,442	0,663	0,035	0,505	0,408	1,756	1,239	2,26
30	0,465	0,697	0,060	0,760	0,428	2,188	1,558	2,28
40	0,488	0,732	0,090	1,023	0,442	2,743	1,965	2,295
50	0,513	0,770	0,125	1,295	0,451	3,45	2,478	2,30

Табл. 2

Значения коэффициента Джини в стране-акцепторе при различном соотношении численностей квалификационных классов в стране-доноре миграции

t	$S_{m0}(0) + U_{m0}(0)$			
	0,1+0,99	0,5+0,95	0,10+0,90	0,20+0,80
0	0,320	0,320	0,320	0,320
10	0,386	0,382	0,376	0,365
20	0,424	0,417	0,408	0,390
30	0,449	0,439	0,428	0,406
40	0,466	0,455	0,442	0,416
50	0,479	0,466	0,451	0,423

Табл. 3

Значения выпуска $Y(t)$ в стране-акцепторе при различном соотношении численностей квалификационных классов в стране-доноре миграции

t	$S_m(0)(\%) + U_m(0)(\%)$			
	1+99	5+95	10+90	20+80
0	0,791	0,791	0,791	0,791
10	0,978	0,982	0,987	0,998
20	1,206	1,221	1,239	1,272
30	1,486	1,519	1,558	1,631
40	1,825	1,890	1,965	2,098
50	2,238	2,350	2,478	2,704

вклад миграционного потока в рабочую силу и отдельно учитывающая квалифицированный и неквалифицированный труд. Проведена квантификация модели на основе данных международной экономической статистики. Проведены серии вычислительных экспериментов с моделью. Показано, что модель дает реалистичные темпы роста выпуска, что свидетельствует об ее валидности.

Остановимся подробнее на вопросе о том, как соотношение между квалифицированным и неквалифицированным классам в миграционном потоке влияет на показатели в принимающей стране. Возьмем сравнительно отдаленную перспективу в 50 лет и сравним крайние случаи из представленных

в табл. 1, 2. Именно, сравним поток, на 1% состоящий из квалифицированных мигрантов и на 99% – из неквалифицированных, с потоком, состоящим на 20% из квалифицированных и 80% – из неквалифицированных. Значения коэффициента Джини для этих случаев равны, соответственно, 0,479 и 0,423 (см. табл. 1). Таким образом, сильное преобладание неквалифицированных работников в миграционном потоке приводит к увеличению экономического неравенства. Насколько значительной является эта разница? При ранжировке стран в порядке убывания индекса Джини по базе данных CIA Factbook [15], значение 0,479 соответствует 24-25-му месту, а значение 0,423 соответствует

51-му месту (из 157). Для базы Всемирного банка [20] имеем, соответственно, 17-ое и 43-44 места (из 152). Таким образом, различие является довольно существенным.

Аналогичным образом рассмотрим вопрос о влиянии соотношения между квалифицированным и неквалифицированным классам в миграционном потоке на темп роста. В соответствии с табл. 2, если 1% потока составляют квалифицированные мигранты, а 99% – неквалифицированные, то за 50 лет (с года $t=0$ по год $t=50$) выпуск $Y(t)$ вырастает в 2,829 ($=2,238/0,791$) раза, т. е. в среднем на 2,1% в год. Аналогичные цифры для случая 20% квалифицированных и 80% неквалифицированных мигрантов составляют рост в 3,418 ($=2,704/0,791$) раз за 50 лет, т.е. в среднем 2,49% в год. Сравнивая полученные значения среднегодового роста со среднегодовыми показателями стран и территорий мира из базы Всемирного банка за период 2003-2017 гг., получим, что 2,49% в год соответствует 136-137 месту, а 2,10% в год – 146-147 месту из 194 (при усреднении роста за период 2003-2017 годы мы исключили из рассмотрения все страны и территории, имевшие хотя бы по одному пропуску данных в базе Всемирного банка [21]).

Таким образом, согласно разработанной модели, сильное преобладание неквалифицированных работников в миграционном потоке приводит (в долгосрочной перспективе) к умеренному снижению темпов роста выпуска и к существенному увеличению экономического неравенства.

В качестве перспективы применения данной модели можно указать исследование миграционных кризисов (резкое увеличение миграционного потока), учет неполной занятости прибывших мигрантов, исследование политики уменьшения экономического неравенства, возникающего в связи с миграционными процессами.

Литература

1. *Vincenzo Bove and Leandro Elia*. 2017. Migration, Diversity, and Economic Growth. *World Development*. 89: 227–239.
2. *Artuc E., F. Docquier, C. Ozden and C. Parsons*. 2014. A global assessment of human capital mobility: The role of non-OECD destinations. *World Development* 65: 6–26.
3. *Cortes, Patricia*. 2015. The Feminization of International Migration and its Effects on the Children Left Behind: Evidence from the Philippines. *World Development*, Elsevier. 65(C): 62-78.
4. *Beine M., F. Docquier and M. Schiff*. 2013. International migration, transfer of norms and home country fertility. *Canadian Journal of Economics*. 46(4): 1406–1430.
5. *Лукина А.А.* 2015. Об управлении трудовой миграцией в Российскую Федерацию // *Финансы и бизнес*. 2.: 41–56.
6. *Голубков В.В., Дубовский С.В., Яковец Т.Ю.* 2017. Российская демографическая проблема: состояние, моделирование, внешние воздействия. // *Труды ИСА РАН*. Т. 67(2). С. 28-51.
7. *Lukina A. and A.A. Prasolov*. 2015. Mathematical Model of Economic Growth Connecting Demographic Setting with Controlled Migration. *AIP Conference Proceedings* 1648(450007): 1–3.
8. *Дмитриев М.Г., Юдина Т.Н.* 2017. Миграционные процессы: модели анализа и прогнозирования (обзор). *Труды ИСА РАН*. Т. 67(2). С. 3–14.
9. *Mello M.* 2008. Skilled Labor, Unskilled Labor, and Economic Growth. *Economics Letters* 100(3): 428-431.
10. *Klump R., P. McAdam and A. Willman*. 2012. The normalized CES production function: theory and empirics. *Journal of Economic Surveys*, 26(5), pp.769-799.
11. <https://economics.stackexchange.com/questions/13661/what-is-the-meaning-of-the-weights-in-a-ces-production-function> (accessed February, 14, 2019).
12. *United Nations Statistics Division*. Available at: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/selcountry.asp> (accessed September, 12, 2018).
13. *Arslanalp, S., F. Bornhorst, S. Gupta, and E. Sze*. 2010. Public Capital and Growth. *IMF Working Paper* WP/10/175.
14. https://en.wikipedia.org/wiki/Gross_output
15. <https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.GROW> (дата обращения 10 ноября 2018)
16. <https://stats.oecd.org/>, “*OECD.Stat Education and Training > Education at a Glance > Educational attainment and outcomes > Educational attainment and labor-force status > Educational attainment of 25-64 year-olds*”. (дата обращения 06 сентября 2018)
17. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2172rank.html>
18. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.CD> (дата обращения 12 ноября 2018).
19. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.KD.ZG> (дата обращения 12 ноября 2018).
20. <https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI/> (дата обращения 13 февраля 2019).

21. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTR.KD.ZG> (дата обращения 14 февраля 2019).

Дмитриев Михаил Геннадьевич. Институт системного анализа Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук». Главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, профессор. Количество печатных работ: 270. Область научных интересов: асимптотические методы, оптимальное управление, математическое моделирование, системный анализ. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Петров Александр Пхоун Чжо. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук». Ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук. Количество печатных работ: 157. Область научных интересов: математическое моделирование социальных процессов, пропаганда и информационные войны. E-mail: petrov.alexander.p@yandex.ru

Прончева Ольга Геннадьевна. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)». Ассистент. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 39. Область научных интересов: математическое моделирование, информационное противоборство. E-mail: olga.proncheva@gmail.com

Modeling economic growth with migration flows

M.G. Dmitriev^I, A.P. Petrov^{II}, O.G. Proncheva^{III}

^I Federal State Institution “Federal Research Center” Informatics and Management “of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia

^{II} Federal State Institution “Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia

^{III} Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

Abstract. This paper deals with the construction and study of the model of economic growth that takes into account migration flows as a part of the labor resource of the economy. The model is based on the Cobb-Douglas production function, one of the factors of which is total labor. In turn, total labor is an aggregate that takes into account the distinction between skilled and unskilled labor, which make different contributions to output, as well as the work of indigenous people and migrants who have different dynamics. The migration flow in each qualification class is assumed to be proportional to the difference between the average level of consumption in this category and an exogenously given function which has a meaning of the level of consumption in the countries-donors of migration. The study of the model is aimed at analyzing the impact of migration flows on economic growth.

Keywords: *mathematical modeling, migration, economic growth, numerical experiment, skilled and unskilled labor.*

DOI: 10.14357/20790279190202

References

1. *Vincenzo Bove and Leandro Elia.* 2017. Migration, Diversity, and Economic Growth. *World Development*. 89: 227–239.
2. *Artuc E., F. Docquier, C. Ozden and C. Parsons.* 2014. A global assessment of human capital mobility: The role of non-OECD destinations. *World Development* 65: 6–26.
3. *Cortes, Patricia.* 2015. The Feminization of International Migration and its Effects on the Children Left Behind: Evidence from the Philippines. *World Development*, Elsevier. 65(C): 62-78.
4. *Beine M., F. Docquier and M. Schiff.* 2013. International migration, transfer of norms and home country fertility. *Canadian Journal of Economics*. 46(4): 1406–1430.

5. *Lukina A.A.* 2015. Ob upravlenii trudovoj migratsiej v Rossijskuyu Federatsiyu [On the management of labor migration in the Russian Federation]. *Finansy i biznes* [Finance and business]. 2: 41–56.
6. *Golubkov V.V., S.V. Dubovskii, T.Yu. Yakovets.* 2017. Rossijskaya demograficheskaya problema: sostoyanie, modelirovanie, vneshnie vozdeystviya [Russian demographical problem: state of the art, modelling, external affects]. *Trudy instituta sistemnogo analiza RAN* [Proceedings of Institute of System Analysis RAS]. 67(2):28-51.
7. *Lukina A. and A.A. Prasolov.* 2015. Mathematical Model of Economic Growth Connecting Demographic Setting with Controlled Migration. *AIP Conference Proceedings* 1648(450007): 1–3. DOI: 10.1063/1.4912666.
8. *Dmitriev M.G. and T.N. Yudina.* 2017. Migratsionnye protsessy: modeli analiza i prognozirovania (obzor) [Migration processes: models of analysis and forecasting]. *Trudy instituta sistemnogo analiza RAN* [Proceedings of Institute of System Analysis RAS]. 67(2):3–14.
9. *Mello M.* 2008. Skilled Labor, Unskilled Labor, and Economic Growth. *Economics Letters* 100(3): 428-431.
10. *Klump R., McAdam P. and Willman A.* 2012. The normalized CES production function: theory and empirics. *Journal of Economic Surveys*, 26(5), pp.769-799.
11. <https://economics.stackexchange.com/questions/13661/what-is-the-meaning-of-the-weights-in-a-ces-production-function> (accessed February, 14, 2019).
12. United Nations Statistics Division. Available at: <http://unstats.un.org/unsd/snaama/selcountry.asp> (accessed September, 12, 2018).
13. *Arslanalp, S., F. Bornhorst, S. Gupta, and E. Sze.* 2010. Public Capital and Growth. IMF Working Paper WP/10/175.
14. https://en.wikipedia.org/wiki/Gross_output
15. <https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.GROW> (accessed November, 11, 2018).
16. <https://stats.oecd.org/>, “OECD.Stat Education and Training > Education at a Glance > Educational attainment and outcomes > Educational attainment and labor-force status > Educational attainment of 25-64 year-olds”. (accessed September, 6, 2018)
17. <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2172rank.html> (accessed February, 14, 2019)
18. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.PP.CD> (accessed November, 12, 2018)
19. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.KD.ZG> (accessed November, 12, 2018)
20. <https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI/> (accessed February, 13, 2019).
21. <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.KD.ZG> (accessed February, 14, 2019).

Dmitriev M.G. PhD. Institute for Systems Analysis Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia. E-mail: mdmitriev@mail.ru

Petrov A.P. PhD. Keldysh Institute of applied mathematics of Russian Academy of sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia. E-mail petrov.alexander.p@yandex.ru.

Proncheva O.G. PhD. Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation. E-mail: olga.proncheva@gmail.com.