

# Инструментарий параметрического программирования в модели финансовой Коалиции

И.И. ГАСАНОВ<sup>1</sup>, Ф. И. ЕРЕШКО<sup>1</sup>, А. Н. СЫТОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Целью настоящей работы является дальнейшее развитие системных подходов и разработка вычислительного инструментария для поддержки принятия решений участниками процесса жилищного кредитования в динамике и оценки синергетического эффекта, который возникает при объединении ресурсов участников. В качестве основного инструментария принято параметрическое линейное программирование. Серия проведенных вычислительных экспериментов демонстрирует возможности углубленного анализа социально-экономических процессов ипотечного кредитования и создания серии финансовых инструментов в данном секторе инвестиционной активности.

**Ключевые слова:** системный анализ, финансовая инженерия, исследование операций, инвестиции, ипотечное кредитование, ставки кредитов и депозитов, модели.

**DOI:** 10.14357/20790279190203

## Введение

Настоящая работа была проведена в рамках исследований по финансовой инженерии, следуя теоретическим подходам системного анализа, теории игр и исследования операций [1–3]. Исходной посылкой явился интерес авторов к обобщению формальных описаний финансовых операций на случай динамических процессов, и ипотечное кредитование предоставило обширное поле для этих работ. Содержательные аспекты исследуемых проблем изложены в источниках [3–5], где описывается опыт США, стран Европы и России.

Во всем мире технология инвестирования в жилищную сферу строится на трех основных принципах: контрактные сбережения, ипотечное кредитование, государственная поддержка. Конкретные механизмы реализации этих принципов могут весьма отличаться.

Рассмотрим ситуацию, когда группа участников или внешняя инвестиционная структура (Банк) организывает проект по инвестированию в жилищное строительство.

При этом формируются условия приема вкладов, выдачи кредитов, правил залога и т.д. Входящие в этот проект активные агенты, принимая условия организаторов, фактически образуют Коалицию.

Мы будем рассматривать такую коалицию с позиции Исследователя операции, принимая во внимание цели экономических агентов, которые стремятся оптимизировать свои затраты на приобретение жилья, менеджера Коалиции и Банка.

В этой ситуации рычаги управления финансами Коалиции – это внутренние ставки на внутренние депозиты участников, внутренние ставки на кредиты участникам, управление потоком новых участников, а также, политика использования внешних, рыночных кредитов и депозитов.

Неопределенными факторами являются динамика рыночных ставок и цен на актив, а также спрос на услуги Коалиции.

В настоящей работе основной интерес проявлен к системному сценарному моделированию и вычислительному обеспечению процедур принятия решений участниками процесса жилищного кредитования в динамике.

Цель настоящей работы состоит в привлечении аппарата и инструментария линейного и параметрического программирования для системной регуляризации вычислительных технологий в ипотечном кредитовании.

Совокупность действий исследователя на этом этапе разработки модели составляет акт имитации, в них находят отражение мысленные пред-

ставления автора о возможном сочетании управляемых и неопределенных факторов.

Рассматриваются две схемы: перманентная схема в виде очереди и схема взаимного кредитования, когда участники стартуют вместе. В обоих случаях в течение периода накопления каждый участник регулярно делает в кассу Коалиции равные денежные взносы; затем ему предоставляется ссуда на оставшуюся до стоимости жилья сумму, которую он затем погашает равными платежами.

В работах [6-14] для данной схемы на общих основаниях системного подхода и теории принятия решений разработана общая финансовая модель ипотечного кредитования Коалиции участников и проведены разнообразные вычислительные эксперименты.

В данной работе для решения задачи поиска процентных ставок по депозитам и кредитам участников при условии сбалансированного функционирования Коалиции разработана процедура, основанная на моделях и методах линейного программирования.

### 1. Операции участника Коалиции

В моменты времени  $t_k^0, \dots, t_k^1$  участник совершает накопительные платежи в размере  $U_{k,t}$ . Эти средства размещаются на его счете в Коалиции. Состояние депозитного счета участника характеризуется переменной  $G_{k,t}^D$ . Следующие соотношения описывают ее динамику:

$$\begin{aligned} G_{k,t}^D &= 0, \quad t = 0, \dots, t_k^0 - 1, \\ G_{k,t+1}^D &= G_{k,t}^D + g_{k,t+1}^D + U_{k,t+1}, \quad t = t_k^0, \dots, t_k^1 - 2, \\ G_{k,t_k^0}^D &= U_{k,t_k^0}, \\ G_{k,t}^D &= 0, \quad t = t_k^1, t_k^1 + 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $g_{k,t}^D$  – начисленные в момент времени  $t$  проценты на депозит участника  $k$ .

Ставку, по которой эти проценты начисляются на депозит участника, обозначим через  $u_k$  и будем записывать:

$$\begin{aligned} g_{k,t}^D &= 0, \quad t = 0, \dots, t_k^0, \quad g_{k,t}^D = u_k \cdot G_{k,t-1}^D, \\ t &= t_k^0 + 1, \dots, t_k^1, \quad g_{k,t}^D = 0, \quad t = t_k^1 + 1, t_k^1 + 2, \dots \end{aligned}$$

В момент времени  $t_k^1$  накопленные средства возвращаются участнику в размере

$$Y_k^D = (1 + u_k) \cdot G_{k,t_k^1-1}^D + U_{k,t_k^1},$$

и депозитный счет закрывается.

В этот же момент времени участник получает от коалиции кредит в размере  $Y_k^C$  на срок до момента времени  $t_k^1$  и приобретает актив по цене  $C_{t_k^1}$ . В моменты времени  $t_k^1 + 1, \dots, t_k^2$  участник погашает задолженность кредитными выплатами  $V_{k,t}$ , размер которых определяется схемой погашения задолженности и зависит от размера кредита, срока  $s_k$  и ставки кредитования  $v_k$ . Задолженность участника в момент времени  $t$  обозначается как  $G_{k,t}^C$ . Соотношения, которые описывают получение и погашение участником кредита имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{k,t}^C &= 0, \quad t = 0, \dots, t_k^1 - 1, \\ G_{k,t+1}^C &= G_{k,t}^C + g_{k,t+1}^C - V_{k,t+1}, \quad t = t_k^1, \dots, t_k^2 - 1, \\ G_{k,t_k^1}^C &= Y_k^C, \quad Y_k^C = C_{t_k^1} - Y_k^D \\ G_{k,t}^C &= 0, \quad t = t_k^2, t_k^2 + 1, \dots \end{aligned}$$

Проценты:

$$\begin{aligned} g_{k,t}^C &= 0, \quad t = 0, \dots, t_k^2, \quad g_{k,t}^C = v_k \cdot G_{k,t-1}^C, \\ t &= t_k^1 + 1, \dots, t_k^2, \quad g_{k,t}^C = 0, \quad t = t_k^2 + 1, t_k^2 + 2, \dots \end{aligned}$$

Равенство  $G_{k,t_k^2}^C = 0$  означает условия полного погашения кредита в момент времени  $t_k^2$ .

### 2. Некоторые частные соотношения для участника Коалиции

В работе при проведении вычислительных экспериментов с моделью Коалиции заемщиков, организованной по принципу «очереди», для более детального описания участника используются следующие соотношения.

Считается, что накопительные платежи участника равны между собой и равны  $U_k$ , а участник получит кредит как только накопит на своем счете долю  $d$  от текущей стоимости актива и сделает это, совершив не более  $l$  платежей.

Пусть теперь  $G_{k,t}^D$  обозначает накопления участника  $k$  на депозите в момент времени  $t$ .

Справедлива следующая рекуррентная формула:

$$G_{k,t+1}^D = (1 + u) \cdot G_{k,t}^D + U_k, \quad t = t_k^0, t_k^0 + 1, \dots,$$

где  $G_{k,t_k^0}^D = U_k$ . В замкнутой форме:

$$G_{k,t}^D = U_k \cdot \frac{(1 + u)^{t - t_k^0 + 1} - 1}{u}, \quad t = t_k^0, t_k^0 + 1, \dots \quad U_k$$

рассчитывается из предположения, что за  $l$  платежей накопится доля  $d$  от прогнозной цены актива

$$\tilde{C}_k \text{ в момент } t_k^0 + l - 1: U_k = \frac{u \cdot d \cdot \tilde{C}_k}{(1 + u)^l - 1}.$$

Прогнозная цена актива задается как  $\tilde{C}_k = C_{k,t_k^1} \cdot (1 + \tilde{\omega})^{t-1}$ , где  $\tilde{\omega}$  – прогнозный темп роста цены.

Момент времени, когда участник получит кредит:  $t_k^1 = \min(t_k^0 + l - 1, \min(t : G_{k,t}^D \geq d \cdot C_t))$ .

Число накопительных платежей участника:  $r_k = t_k^1 - t_k^0 + 1$ . Накопления на депозите, возвращаемые участнику в момент времени  $t_k^1$  и размер выданного кредита:

$$Y_k^D = G_{k,t_k^1}^D = U_k \cdot \frac{(1+u)^{r_k} - 1}{u}, \quad Y_k^C = C_{k,t_k^1} - Y_k^D.$$

Считается, что кредитные платежи участника равны между собой:  $V_{k,t} = V_k, t = t_k^1 + 1, \dots, t_k^2$ .

$$\text{Тогда } G_{k,t}^C = Y_k^C \cdot (1+v)^{t-t_k^1} - V_k \frac{(1+v)^{t-t_k^1} - 1}{v}.$$

Их размер задается таким образом, что кредит полностью погасится за число платежей  $s$ .

Из условия  $G_{k,t_k^2}^C = 0$ , где  $t_k^2 = t_k^1 + s$  следует,

$$\text{что } V_k = \frac{v \cdot (1+v)^s}{(1+v)^s - 1} \cdot Y_k^C.$$

Отметим, что  $V_k > v \cdot Y_k^C$ , поэтому задолженность участника монотонно убывает с увеличением  $t, t = t_k^1, \dots, t_k^2$ , принимает положительные значения, начиная с  $Y_k^C$  и в точности равна нулю при  $t_k^2$ .

В отличие от предыдущего способа описания участника Коалиции, в данном случае накопительные платежи  $U_k$  и выплаты по кредиту  $V_k$  (за исключением последней выплаты, которая рассчитывается и условия полного погашения кредита) считаются заданными.

Пусть участник шаг за шагом совершает выплаты по кредиту в размере  $V_k$ , причем  $V_k > v \cdot Y_k^C$ , тогда его задолженность

$$G_{k,t}^C = Y_k^C \cdot (1+v)^{t-t_k^1} - V_k \frac{(1+v)^{t-t_k^1} - 1}{v}, \quad t = t_k^1, t_k^1 + 1, \dots$$

монотонно убывает с увеличением  $t$ , начиная со значения  $Y_k^C$ , вплоть до первого момента пока она не станет меньше либо равной нулю. Формальное определение этого момента времени есть  $t_k^2 = \min(t : t = t_k^1 + 1, t_k^1 + 2, \dots, G_{k,t}^C \leq 0)$ . Несложно показать, что:

$$t_k^2 = t_k^1 + s_k, \quad s_k = \lceil \tilde{s}_k \rceil, \quad \tilde{s}_k = \log_{1+v} \left( \frac{V_k}{V_k - v \cdot Y_k^C} \right).$$

Здесь функция “потолок”  $\lceil \bullet \rceil : x \rightarrow \lceil x \rceil$  определяется как наименьшее целое, большее или равное  $x : \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$ .

Размер последней кредитной выплаты  $\bar{V}_k$  участника  $k$  определяется из условия полного

погашения им кредита в момент времени  $t = t_k^2$ :  $(1+v) \cdot G_{k,t_k^2-1}^C - \bar{V}_k = 0$ .

Отсюда следует:

$$\bar{V}_k = V_k + \left( Y_k^C - \frac{V_k}{v} \right) \cdot (1+v)^{s_k} + \frac{V_k}{v}.$$

Заметим, что  $0 < \bar{V}_k \leq V_k$ .

Приведенное формальное описание используется при проведении вычислительных экспериментов с моделью Коалиции заемщиков, организованной по принципу «общий старт».

### 3. Потоки денежных средств от операций участников Коалиции

Приходный поток денежных средств по депозитным операциям участника  $k$  в момент времени  $t$  состоит из накопительных платежей участника:

$$P_{k,t}^D = 0, \quad t = 0, \dots, t_k^0 - 1, \quad P_{k,t}^D = U_k, \quad t = t_k^0, \dots, t_k^1,$$

$$P_{k,t}^D = 0, \quad t = t_k^1 + 1, t_k^1 + 2, \dots$$

Расходный поток по депозитным операциям состоит из изъятий участником накопленных денежных средств:  $R_{k,t}^D = 0, t = 0, \dots, t_k^1 - 1, R_{k,t}^D = Y_k^D, t = t_k^1, R_{k,t}^D = 0, t = t_k^1 + 1, t_k^1 + 2, \dots$ .

Приходный поток по кредитным операциям участника состоит из платежей участника по погашению кредита:  $P_{k,t}^C = 0, t = 0, \dots, t_k^1, P_{k,t}^C = V_k, t = t_k^1 + 1, \dots, t_k^2, P_{k,t}^C = 0, t = t_k^2 + 1, t_k^2 + 2, \dots$ .

Расходный поток по кредитным операциям участника состоит их выданных участнику кредитов:

$$R_{k,t}^C = 0, \quad t = 0, \dots, t_k^1 - 1, \quad R_{k,t}^C = Y_k^C, \quad t = t_k^1, \quad R_{k,t}^C = 0,$$

$$t = t_k^1 + 1, t_k^1 + 2, \dots$$

Суммарные потоки денежных средств по соответствующим операциям участников Коалиции будем записывать как  $P_t^D = \sum_k P_{k,t}^D, P_t^C = \sum_k P_{k,t}^C,$

$$R_t^D = \sum_k R_{k,t}^D, \quad R_t^C = \sum_k R_{k,t}^C.$$

Приток и отток денежных средств по операциям Коалиции с участниками в момент времени  $t : P_t = P_t^D + P_t^C, R_t = R_t^D + R_t^C$ .

Суммарный поток денежных средств  $Q_t$  по операциям Коалиции с участниками в момент времени  $t$  определяется как соответствующие притоки минус оттоки:  $Q_t = P_t - R_t$ .

Введем переменные, которые также будут характеризовать Коалицию заемщиков.

Сумма денежных средств на депозитных счетах участников Коалиции  $G_t^D = \sum_k G_{k,t}^D$ .

Суммарная задолженность всех участников Коалиции  $G_t^C = \sum G_{k,t}^C$ .

Аналогично\* запишем суммарные начисленные проценты:

$$g_t^D = \sum_k g_{k,t}^D, g_t^C = \sum_k g_{k,t}^C$$

**Утверждение.** Для всех  $t=0, \dots, T-1$  справедливы следующие соотношения:

$$G_{t+1}^D = G_t^D + g_{t+1}^D + P_{t+1}^D - R_{t+1}^D, G_0^D = P_0^D - R_0^D,$$

$$G_{t+1}^C = G_t^C + g_{t+1}^C + R_{t+1}^C - P_{t+1}^C, G_0^C = R_0^C.$$

#### 4. Внешние депозиты и кредиты

Считается, что в каждый момент времени Коалиция может делать вклады во внешний рынок и получать внешние кредиты. Пусть  $H_{a,\tau}^D$  – объем денежных средств, размещенных Коалицией в момент времени  $\tau$  на внешнем депозите вида  $a$  из некоторой набора  $A$ . Данное вложение осуществляется на срок  $n_a^D$  по ставке  $\zeta_{a,\tau}$ . Процентная ставка фиксируется на весь срок вложений. В моменты времени  $t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D$  Коалиция возвращаются денежные средства в размере  $h_{a,\tau,t}^D \cdot H_{a,\tau}^D$ . Внешние вложения в момент времени  $\tau$  на депозит вида  $a$  вместе с начисленными на эти средства процентами к произвольному моменту времени  $t$  обозначаются через  $W_{a,\tau,t}^D$ .

Динамика этой переменной характеризуется следующими соотношениями:

$$W_{a,\tau,t}^D = 0, t = 0, \dots, \tau - 1, \tau \neq 1,$$

$$W_{a,\tau,t+1}^D = W_{a,\tau,t}^D + w_{a,\tau,t+1}^D - S_{a,\tau,t+1}^D,$$

$$t = \tau, \dots, \tau + n_a^D - 1, W_{a,\tau,\tau}^D = H_{a,\tau}^D,$$

$$W_{a,\tau,t}^D = 0, t = \tau + n_a^D, \tau + n_a^D + 1, \dots,$$

Начисленные проценты по внешним вложениям вида  $a$  в момент времени  $t$ :

$$w_{a,\tau,t}^D = 0, t = 0, \dots, \tau, w_{a,\tau,t}^D = \zeta_{a,\tau} \cdot W_{a,\tau,t-1}^D,$$

$$t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D, w_{a,\tau,t}^D = 0,$$

$$t = \tau + n_a^D + 1, \tau + n_a^D + 2, \dots$$

Поступления с внешнего депозита  $\tau$  в момент времени  $t$ :  $S_{a,\tau,t}^D = 0, t = 0, \dots, \tau$ .  $S_{a,\tau,t}^D = h_{a,\tau,t}^D \cdot H_{a,\tau}^D, t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D, S_{a,\tau,t}^D = 0, t = \tau + n_a^D + 1, \tau + n_a^D + 2, \dots$

Описание внешних кредитов аналогично описанию внешних депозитов.  $H_{b,\tau}^C$  – размер заимствований Коалиции в момент времени  $\tau$  по внешнему кредиту  $b$ ;  $n_b^C$  – период времени, на который берется внешний кредит вида  $b$ ;  $\gamma_{b,\tau}$  – ставка внешних заимствований в момент времени  $\tau$  (фиксируется на весь срок заимствований).

В моменты времени  $\tau + 1, \dots, \tau + n_b^C$  Коалиция осуществляет возвраты денежных средств в размере  $h_{b,\tau,t}^C \cdot H_{b,\tau}^C$ . Остаток основной суммы внешнего кредита в момент времени  $t$  обозначается как  $W_{b,\tau,t}^C$ . Динамика этой переменной:

$$W_{b,\tau,t}^C = 0, t = 0, \dots, \tau - 1, \tau \neq 1,$$

$$W_{b,\tau,t+1}^C = W_{b,\tau,t}^C + w_{b,\tau,t+1}^C - S_{b,\tau,t+1}^C,$$

$$t = \tau, \dots, \tau + n_b^C - 1, W_{b,\tau,\tau}^C = H_{b,\tau}^C, W_{b,\tau,t}^C = 0,$$

$$t = \tau + n_b^C, \tau + n_b^C + 1, \dots$$

Здесь  $w_{\tau,b,t}^C$  – начисленные проценты по внешним заимствованиям. Будем записывать:

$$w_{b,\tau,t}^C = 0, t = 0, \dots, \tau, w_{b,\tau,t}^C = \gamma_{b,\tau} \cdot W_{b,\tau,t-1}^C,$$

$$t = \tau + 1, \dots, \tau + n_b^C, w_{b,\tau,t}^C = 0,$$

$$t = \tau + n_b^C + 1, \tau + n_b^C + 2, \dots$$

Платеж Коалиции в момент времени  $t$  по внешнему кредиту  $\tau$  обозначим через  $S_{\tau,b,t}^C$ . Определим:

$$S_{b,\tau,t}^C = 0, t = 0, \dots, \tau, S_{b,\tau,t}^C = h_{b,\tau,t}^C \cdot H_{b,\tau}^C,$$

$$t = \tau + 1, \dots, \tau + n_b^C, S_{b,\tau,t}^C = 0,$$

$$t = \tau + n_b^C + 1, \tau + n_b^C + 2, \dots$$

#### 5. Агрегирование внешних счетов Коалиции

Обозначим через  $H_t^D$  и  $H_t^C$  – суммарные внешние вложения и заимствования, соответственно, Коалиции в момент времени  $t$ :

$$H_t^D = \sum_a H_{a,t}^D, H_t^C = \sum_b H_{b,t}^C$$

Определим также суммарные поступления Коалиции в момент времени  $t$  с ранее открытых внешних депозитов и суммарные расходы Коалиции, направленные на погашение взятых ранее внешних кредитов. Для этих переменных будем использовать обозначения, соответственно,  $S_t^D$  и  $S_t^C$ :

$$S_t^D = \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_a S_{a,\tau,t}^D, S_t^C = \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_b S_{b,\tau,t}^C.$$

Аналогично вводятся переменные для суммарных внешних процентов и счетов Коалиции.

Суммарные начисленные проценты по внешним депозитам и кредитам Коалиции:

$$w_t^D = \sum_{\tau=0}^t \sum_a w_{a,\tau,t}^D, w_t^C = \sum_{\tau=0}^t \sum_b w_{b,\tau,t}^C$$

Суммы счетов внешних депозитов и кредитов, соответственно, открытых к моменту времени  $t$  включительно:

$$W_t^D = \sum_{\tau=0}^t \sum_a W_{a,\tau,t}^D, \quad W_t^C = \sum_{\tau=0}^t \sum_b W_{b,\tau,t}^C.$$

Введем в рассмотрение рекуррентное соотношение для агрегированных внешних счетов Коалиции.

**Утверждение.** Для всех  $t=0, \dots, T-1$  справедливы следующие соотношения:

$$W_{t+1}^D = W_t^D + w_{t+1}^D + H_{t+1}^D - S_{t+1}^D, \quad W_0^D = H_0^D,$$

$$W_{t+1}^C = W_t^C + w_{t+1}^C + H_{t+1}^C - S_{t+1}^C, \quad W_0^C = H_0^C.$$

### 6. Касса, активы, обязательства и собственный капитал Коалиции

Касса Коалиции в момент времени  $t$  определяется переменной  $M_t$ . Обозначим через  $T^f$  – момент времени, когда последний участник Коалиции полностью погашает кредит, а через  $T$  – момент окончания функционирования Коалиции. Будем записывать:

$$T^f = \max_k t_k^2, \quad T = T^f + \max(\bar{n}^D, \bar{n}^C),$$

где  $\bar{n}^D = \max_a n_a^D$ ,  $\bar{n}^C = \max_a n_a^C$ .

Динамику кассы будем описывать следующим конечно-разностным соотношением:

$$M_0 = -H_0^D + H_0^C + Q_0,$$

$$M_{t+1} = M_t - H_{t+1}^D + S_{t+1}^D + H_{t+1}^C - S_{t+1}^C + Q_{t+1},$$

$$t = 0, \dots, T^f - 1,$$

$$M_{t+1} = M_t + S_{t+1}^D - S_{t+1}^C + Q_{t+1}, \quad t = T^f, \dots, T - 1$$

Активы Коалиции в момент времени  $t$  обозначаются через  $A_t$ . Динамика этой переменной описывается соотношениями:

$$A_0 = M_0 + H_0^D + R_0^C,$$

$$A_{t+1} = A_t + M_{t+1} - M_t + H_{t+1}^D - S_{t+1}^D + w_{t+1}^D + R_{t+1}^C - P_{t+1}^C + g_{t+1}^C,$$

$$t = 0, \dots, T^f - 1,$$

$$A_{t+1} = A_t + M_{t+1} - M_t - S_{t+1}^D + w_{t+1}^D,$$

$$t = T^f, \dots, T - 1$$

Обязательства Коалиции в момент времени  $t$  обозначаются через  $L_t$ . Динамика этой переменной:

$$L_0 = H_0^C + P_0^D - R_0^D,$$

$$L_{t+1} = L_t + H_{t+1}^C - S_{t+1}^C + w_{t+1}^C + P_{t+1}^C - R_{t+1}^D + g_{t+1}^D,$$

$$t = 0, \dots, T^f - 1,$$

$$L_{t+1} = L_t - S_{t+1}^C + w_{t+1}^C, \quad t = T^f, \dots, T - 1,$$

Собственный капитал Коалиции в конце операционного периода  $t$  обозначается через  $E_t$ . Динамика собственного капитала:

$$E_0 = 0, \quad E_{t+1} = E_t + w_{t+1}^D + g_{t+1}^C - g_{t+1}^D - w_{t+1}^C,$$

$$t = 0, \dots, T^f - 1, \quad E_{t+1} = E_t + w_{t+1}^D - w_{t+1}^C,$$

$$t = T^f, \dots, T - 1,$$

Можно доказать справедливость следующих соотношений:

$$E_t = A_t - L_t, \quad t = 0, \dots, T, \quad A_t = M_t + W_t^D + G_t^C,$$

$$t = 0, \dots, T, \quad L_t = W_t^C + G_t^D, \quad t = 0, \dots, T, \quad E_T = M_T$$

### 7. Постановка оптимизационной задачи

Будем говорить о самофинансировании Коалиции заемщиков как о задаче нахождения минимальной ставки  $v^*$  внутренних кредитов, обеспечивающей решение следующей оптимизационной задачи:

$$M_T \rightarrow \max, \quad H_{a,t}^D \geq 0, \quad a \in A; \quad H_{b,t}^C \geq 0, \quad b \in B,$$

$$t = 0, \dots, T^f; \quad M_t \geq 0, \quad t = 0, \dots, T$$

Внешние переменные модели – это цены на жилье  $C_p$ , процентные ставки по внешним вложениям  $\zeta_{t,a}$ ,  $a \in A$ , процентные ставки по внешним заимствованиям  $\gamma_{t,a}$ ,  $b \in B$ , а также параметры, которые характеризуют участников Коалиции, считаются заданными.

В такой постановке приведенная проблема представляет собой задачу параметрического линейного программирования. Ее решение будем искать в два этапа. На первом этапе при различных значениях  $v$  находится решение линейной программы:

$$M_T \rightarrow \max, \quad H_{a,t}^D \geq 0, \quad a \in A; \quad H_{b,t}^C \geq 0, \quad b \in B;$$

$$M_t \geq 0, t = 0, \dots, T^f.$$

Используя найденное на первом этапе оптимальное решение  $\widehat{M}_t, \widehat{H}_{a,t}^D, a \in A; \widehat{H}_{b,t}^c, b \in B, t = 0, \dots, T^f$ , на втором этапе определяется такое минимальное значение  $v^*$ , при котором  $\widehat{M}_t \geq 0, t = T^f + 1, \dots, T$ . При конкретной реализации рассматривался представительный дискретный набор возможных значений  $v$ .

Вычислительные эксперименты проводились на основе системы Wolfram Mathematica.

### 8. Вычислительные эксперименты

Считается, что цена на жилье не изменяется со временем, т.е.  $C_t = 1$ .

Считается, что в каждый момент времени набор доступных для коалиции внешних вложений состоит из депозитов с тремя различными видами функции возврата денежных средств  $h_{a,\tau,t}^D$ , удовлетворяющих равенству:  $\sum_{t'=\tau+1}^{\tau+n_a^D} (1 + \zeta_{a,\tau})^{\tau-t'} \cdot h_{a,\tau,t}^D = 1$ ,

которое следует из введенных ранее формальных соотношений.

1. Денежные средства, накопленные на внешнем депозите  $a$ , возвращаются одним платежом в конце:  $h_{a,\tau,t}^D = 0, t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D - 1$ :

$$h_{a,\tau,t}^D = (1 + \zeta_{a,\tau})^{n_a^D}, t = \tau + n_a^D,$$

2. Вложенные денежные средства возвращаются на последнем шаге, а проценты – равными платежами в моменты времени  $t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D$ :

$$h_{a,\tau,t}^D = \zeta_{a,\tau}, t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D. h_{a,\tau,t}^D = 1 + \zeta_{a,\tau}, t = \tau + n_a^D,$$

3. Вложенные средства вместе с процентами возвращаются равными платежами

(аннуитетные платежи)  $h_{a,\tau,t}^D = \frac{\zeta_{a,\tau} \cdot (1 + \zeta_{a,\tau})^{n_a^D}}{(1 + \zeta_{a,\tau})^{n_a^D} - 1}, t = \tau + 1, \dots, \tau + n_a^D.$

Считается, что ставки по внешним вложениям не изменяются во времени и равны  $\zeta_a, a \in A$ .

Вначале задаются процентные ставки внешних вложений с функцией возврата первого вида (одним платежом в конце) для 12 различных сроков от 1 до 12 месяцев: 5., 5.1, 5.2, 5.3, 5.35, 5.4, 5.45, 5.5, 5.52, 5.53, 5.54, 5.55.

Временные сроки, на которые осуществляются внешние вложения, задаются равными от 1 до 6 месяцев, т.е. всего на каждом шаге рассматривается набор  $A$  из 18 возможных внешних вложений.

Ставки внешних вложений с функциями возврата двух других видов и различных сроков определяются как решение  $\zeta_a$  уравнений вида:

$$\sum_{t'=\tau+1}^{\tau+n_a^D} (1 + \zeta(1, t' - \tau))^{\tau-t'} \cdot h_{a,\tau,t}^D(\zeta_a) = 1,$$

где  $\zeta(1, n), n = 1, \dots, 6$  – заданные ранее ставки внешних вложений с функцией возврата первого вида и сроком  $n$  месяцев.

Для наглядности приведем рассчитанные значения:  $\zeta(2, 6) = 5.299\%, \tilde{\zeta}(2, 6) = 5.292\%$ .

Считается, что набор внешних заимствований  $B$  состоит из 21 различных инструментов – кредитов с тремя различными функциями погашения задолженности (аналогичных внешним вложениям) на сроки от 6 до 12 месяцев. Соответствующие кредитные ставки задаются аналогичным образом, как описано выше.

Считается, что процентные ставки внешних заимствований с функцией погашения одним платежом в конце для сроков от 1 до 12 месяцев равны соответственно 12., 12.1, 12.2, 12.3, 12.35, 12.4, 12.45, 12.5, 12.52, 12.53, 12.54, 12.55.

Рассчитаем, например,  $\tilde{\gamma}(2, 12) = 12,544\%, \tilde{\gamma}(3, 12) = 12,456\%$ .

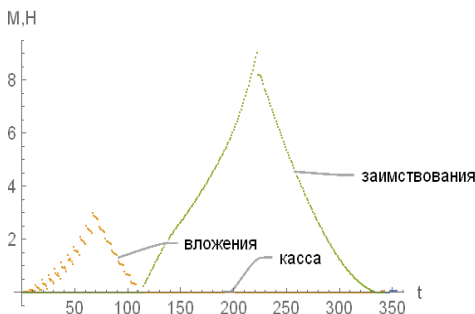


Рис. 1. Графики зависимостей  $\widehat{M}_t, \widehat{H}_t^D$  и  $\widehat{H}_t^N$  от времени  $t$

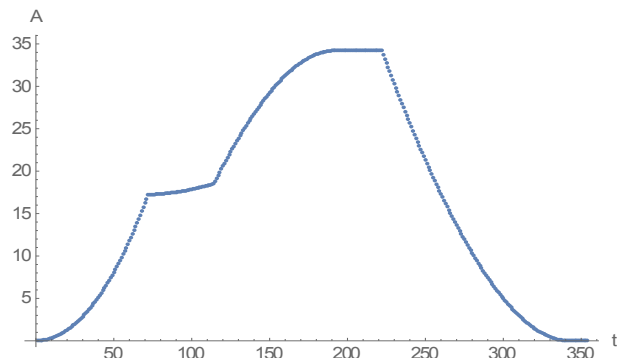


Рис. 2. График зависимости  $\widehat{A}_t$  от времени  $t$

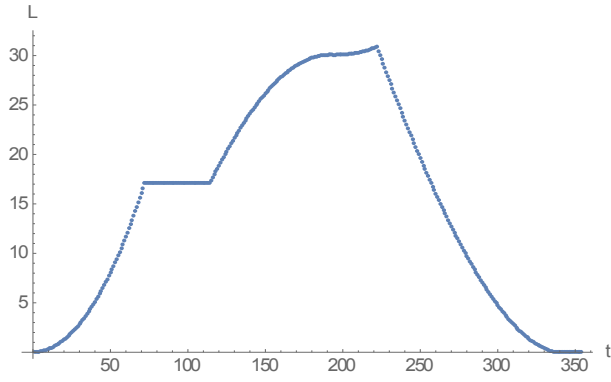


Рис. 3. График зависимости  $\hat{L}_t$  от времени  $t$

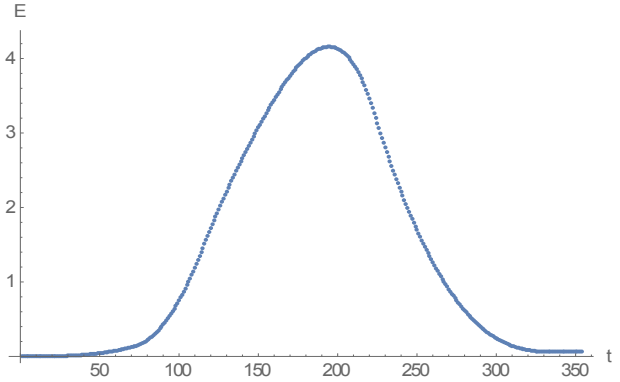


Рис. 4. График зависимости  $\hat{E}_t$  от времени  $t$

**8.1. Коалиция по принципу очереди**

$t_k^0 = k - 1$ . Вариант  $N = 150$ .

Зададим:  $l = 73$ ,  $u = 5\%$ ,  $d = 0.5$ ,  $\tilde{\omega} = 0\%$ ,  $s = 120$ .

Рассчитаем  $v^*$  для трех различных значений числа участников Коалиции:

$$v^*(50) = 10.342\%, \quad v^*(100) = 9.089\%, \\ v^*(150) = 8.383\%.$$

Приведем графики зависимостей основных переменных от времени в оптимальном решении (рис. 1–4).

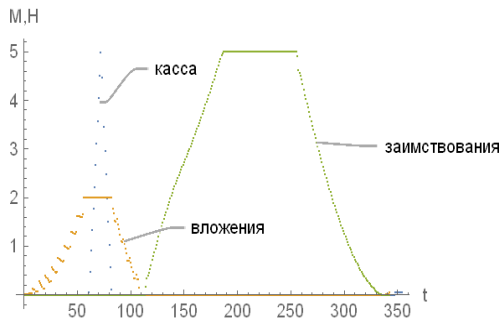


Рис. 5. Графики зависимостей  $\hat{M}_t$ ,  $\hat{H}_t^D$  и  $\hat{H}_t^N$  от времени  $t$

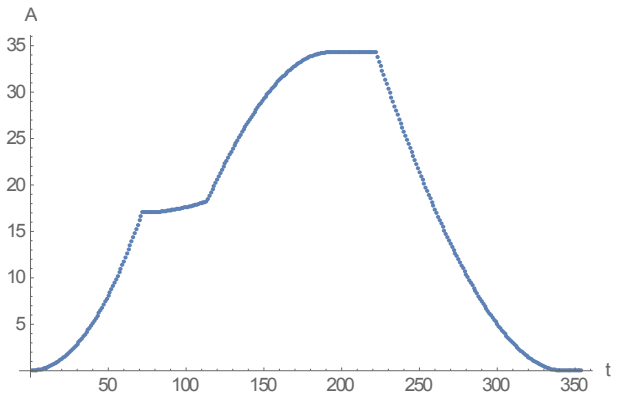


Рис. 6. График зависимости  $\hat{A}_t$  от времени  $t$

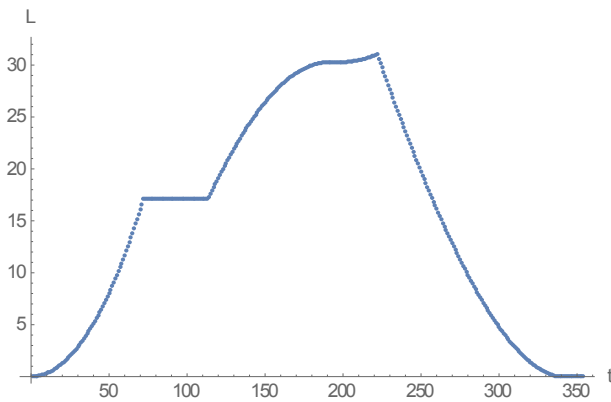


Рис. 7. График зависимости  $\hat{L}_t$  от времени  $t$

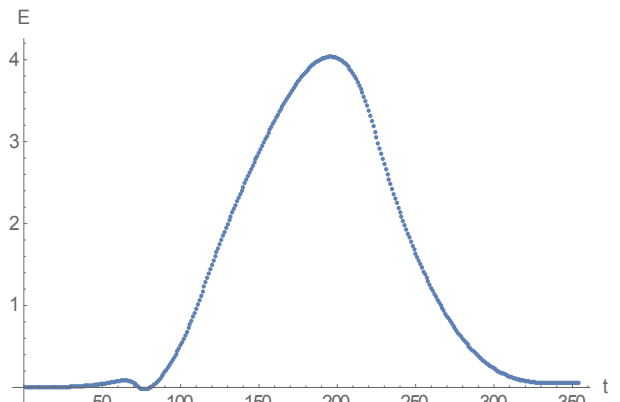


Рис. 8. График зависимости  $\hat{E}_t$  от времени  $t$

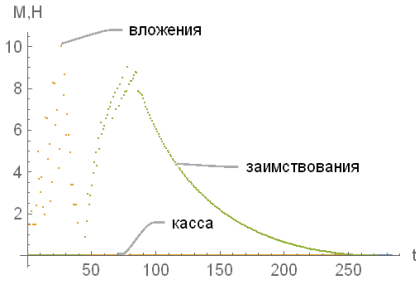


Рис. 9. Графики зависимостей  $\widehat{M}_t$ ,  $\widehat{H}_t^D$  и  $\widehat{H}_t^N$  от времени  $t$

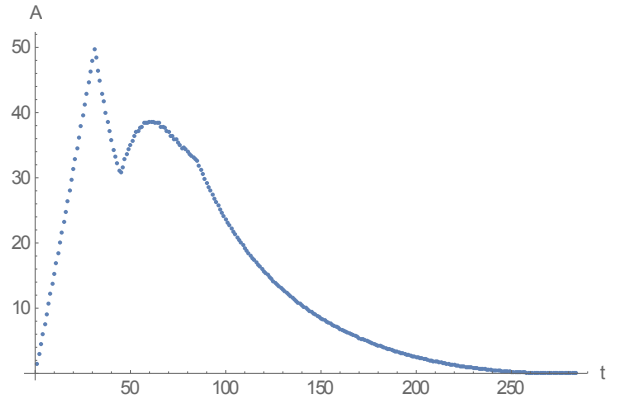


Рис. 10. График зависимости  $\widehat{A}_t$  от времени  $t$

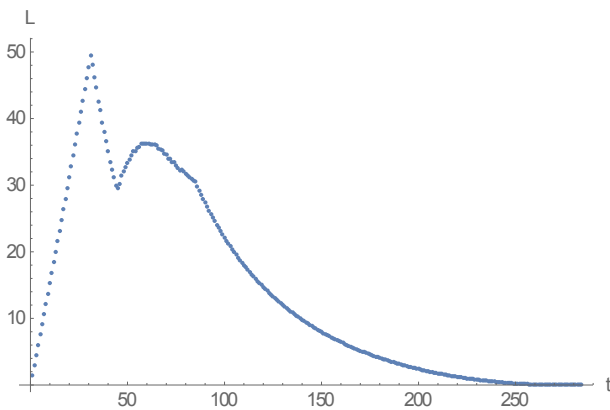


Рис. 11. График зависимости  $\widehat{L}_t$  от времени  $t$

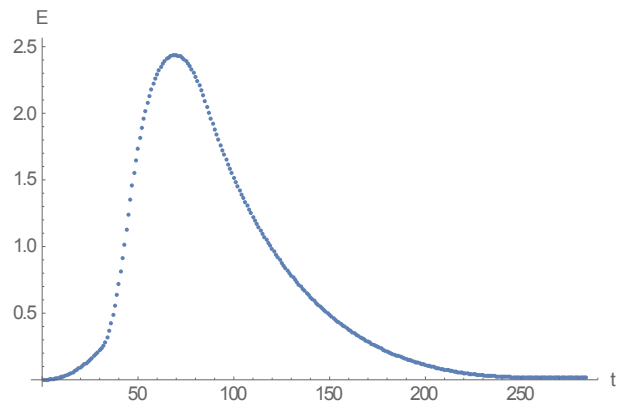


Рис. 12. График зависимости  $\widehat{E}_t$  от времени  $t$

**8.2. Коалиция из 150 участников при априорно заданных внешних операциях.**

Будем считать, что все остальные параметры заданы как и ранее. Но теперь предполагается, что Коалиция может осуществлять внешние вложения и заимствования в размере не более чем наперед заданные величины, т.е. справедливы следующие ограничения:

$$H_{a,t}^D \geq 0, a \in A; H_{b,t}^C \geq 0, b \in B;$$

$$H_t^D = \sum_a H_{a,t}^D \leq 2, H_t^C = \sum_b H_{b,t}^C \leq 5.$$

Рассчитаем ставку самофинансирования после дополнительных ограничений:

$$v^*(150) = 8.531\%.$$

Приведем графики зависимостей основных переменных от времени в оптимальном решении для случая с ограничениями на внешние вложения и заимствования (рис. 5–8).

**8.3. Коалиция по принципу «общий старт»**  
 $t_k^0 = 0, k = 1, \dots, N.$

Зададим основные параметры, характеризующие заемщиков Коалиции. Накопительные платежи:

$$U_k = (0.005 \cdot N - 0.015 + 0.01 \cdot k) \frac{C_0}{N-1},$$

$$k = 1, \dots, N;$$

выплаты по кредиту:

$$V_k = (0.005 \cdot N - 0.015 + 0.01 \cdot k) \frac{C_{t_k^1}}{N-1},$$

$$k = 1, \dots, N;$$

ставка депозита участников:  $u = 5\%$ ;

порог накопления:  $d = 0.5$ .

Рассчитаем  $v^*$  для трех различных значений числа участников коалиции:

$$v^*(50) = 9.661\%, v^*(100) = 9.683\%,$$

$$v^*(150) = 9.674\%.$$



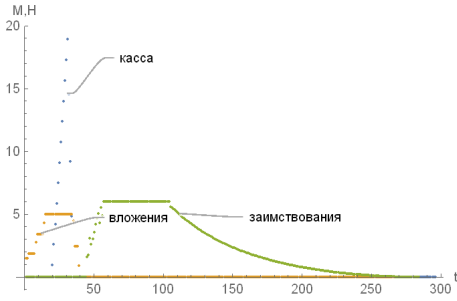


Рис. 13. Графики зависимостей  $\widehat{M}_t$ ,  $\widehat{H}_t^D$  и  $\widehat{H}_t^N$  от времени  $t$

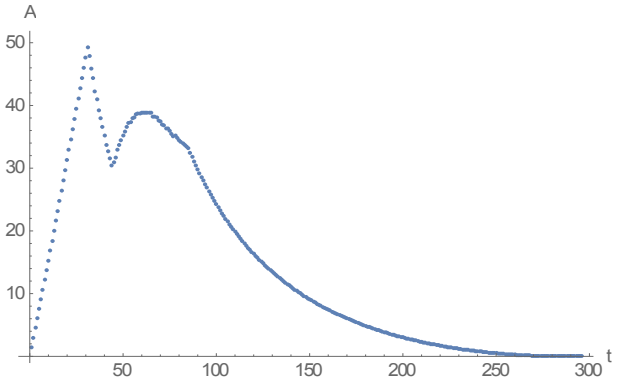


Рис. 14. График зависимости  $\widehat{A}_t$  от времени  $t$

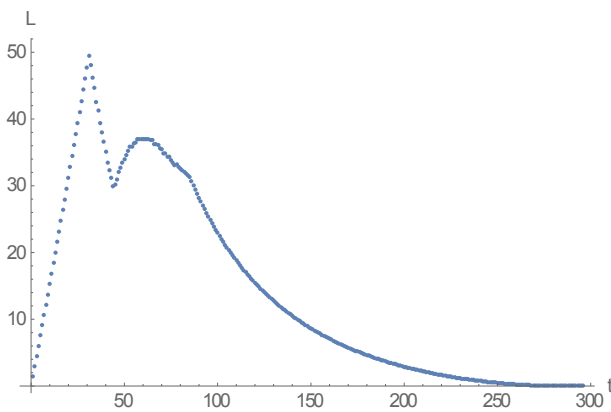


Рис. 15. График зависимости  $\widehat{L}_t$  от времени  $t$

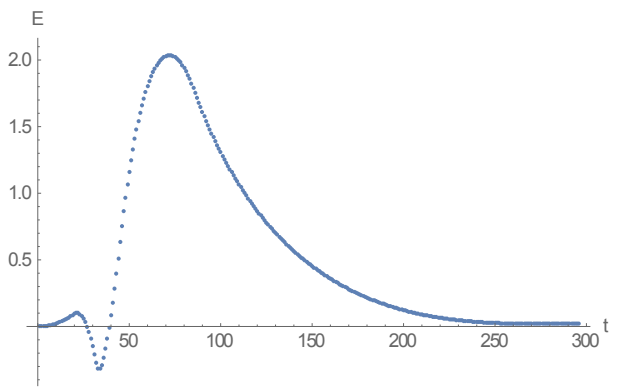


Рис. 16. График зависимости  $\widehat{E}_t$  от времени  $t$

Приведем графики зависимостей основных переменных от времени в оптимальном решении для варианта с  $N = 150$  (рис. 9-12).

**8.4. Коалиция «общий старт», 150 участников, при ограничениях на внешние операции**

Будем считать, что все остальные параметры заданы как и ранее. Пусть внешние вложения и заимствования удовлетворяют следующим ограничениям:

$$H_{a,t}^D \geq 0, a \in A; H_{b,t}^C \geq 0, b \in B;$$

$$H_t^D = \sum_a H_{a,t}^D \leq 5, H_t^C = \sum_b H_{b,t}^C \leq 6.$$

Рассчитаем ставку самофинансирования:  $v^*(150) = 10.162\%$ .

Приведем графики зависимостей основных переменных от времени в оптимальном решении для случая с ограничениями на внешние вложения и заимствования (рис. 13–16).

**Заключение**

В работе описана модель ипотечного кредитования и представлены результаты вычислительных экспериментов с моделью при разных содержательных предположениях относительно свободных параметров. Полученные результаты, кроме факта наличия, требуют также более глубокой содержательной интерпретации, что возможно при соответствующей прикладной заинтересованности.

Одно из направлений использования предложенного модельного описания и вычислительных возможностей лежит в области разработки более сложных финансовых инструментов.

**Литература**

1. Мусеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.
3. Маршалл Дж., Бансал В. Финансовая инженерия. М.: Инфра-М, 1998. 784 с.

4. *Аверченко В., Весели Р., Наумов Г., Файкс Э., Эртл И.* Принципы жилищного кредитования. / В. Аверченко, Р. Весели, Г. Наумов, Э. Файкс, И. Эртл. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 261 с.
5. *Полтерович В.М., Старков О.Ю.* Формирование ипотеки в догоняющих экономиках: проблема трансплантации институтов. / В.М. Полтерович, О.Ю. Старков. М.: Наука, 2007. 196 с.
6. *Гасанов И.И.* Организация ссудно-сберегательной кассы по принципу очереди. М.: ВЦ РАН, 2006. 45с.
7. *Гасанов И.И., Ерешко Ф.И.* Моделирование ипотечных механизмов с самофинансированием. М.: ВЦ РАН, 2007, 62 с.
8. *Сытов А.Н.* Имитационные эксперименты с общей финансовой моделью жилищной коалиции. Вторая международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем». MLSD'2008. Доклады. ИПУ РАН, 1-3 октября 2008, Т. 2, стр. 136-138.
9. *Ерешко Ф.И.* Финансовые модели и вычислительный инструментарий в задачах анализа инвестиций. С. 410-446 в книге Управление развитием крупномасштабных систем (Современные проблемы. Выпуск 2)/Под редакцией А.Д. Цвиркуна. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2015. – 473 с.
10. *Ерешко Ф.И., Сытов А.Н.* Многокритериальная задача выбора кредитной политики банка. // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2012): Труды Шестой международной конференции (ежегодный сборник) (1-3 октября 2012 г., Москва, Россия). Том I. М.: ИПУ РАН, 2012. С. 141-151.
11. *Ерешко Ф.И.* О проблеме генерации сценариев при выборе стратегий в задаче организации коалиции заемщиков // Материалы Третьей международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем». М.: ИПУ РАН, 2009.
12. *Ерешко Ф.И., Кочетков А.В., Сытов А.Н.* Механизмы реализации программы ипотечного кредитования. Четвертая международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем». Доклады. ИПУ РАН, 2-4 октября 2010г. т.1
13. *Ерешко Ф.И., Сытов А.Н.* Сравнительный анализ банковских технологий в проектах ипотеки. // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2011): Программа и пленарные доклады Пятой международной конференции (3-5 октября 2011 г., Москва, Россия). М.: ИПУ РАН, 2011. С. 162-171.
14. *Ерешко Ф.И.* Модель финансовой Коалиции в динамике // Автоматика и Телемеханика, № 10, 2018. С.76-94.
15. [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)

**Гасанов Игорь Искендерович.** Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: более 50. Область научных интересов: моделирование социально-экономических систем, принятие решений, теория игр, исследование операций. E-mail: [gasanov48@bmail.ru](mailto:gasanov48@bmail.ru)

**Ерешко Феликс Иванович.** Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» г. Москва, Россия. Заведующий отделом, доктор технических наук, профессор. Количество печатных работ: более 100.. Область научных интересов: моделирование социально-экономических систем, принятие решений, теория игр, исследование операций, синтез систем управления. E-mail: [fereshko@yandex.ru](mailto:fereshko@yandex.ru)

**Сытов Анатолий Николаевич.** Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» г. Москва, Россия. Научный сотрудник,. Количество печатных работ: более 20.. Область научных интересов: моделирование социально-экономических систем, исследование операций, вычислительная математика. E-mail: [an-sytov@yandex.ru](mailto:an-sytov@yandex.ru)

## Tools of parametrical programming in model of the financial Coalition

I.I. Gasanov<sup>1</sup>, F.I. Ereshko<sup>1</sup>, A.N. Sytov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences (CC FRC IC RAS), Moscow, Russia

**Abstract:** The purpose of the work is further development of system approaches and development of computing tools for support of decision-making by participants of process of housing crediting in dynamics and estimates of synergetic effect which arises at association of resources of participants. As the basic an instrument parametrical linear programming is accepted. A series of the made computing experiments shows possibilities of the profound analysis social экономических processes of a mortgage credit and creation of a series of financial instruments in this investment activity sector .

**Keywords:** *system analysis, financial engineering, operations research, investments, economic organization, mortgage, credit, mathematical modeling, coalition of borrowers*

**DOI:** 10.14357/20790279190203

### References

1. *Moiseev N.N.* Matematicheskie zadachi sistemnogo analiza. M.: Nauka, 1981. 488 s
2. *Germejer YU.B.* Vvedenie v teoriyu issledovaniya operacij. M.: Nauka, 1971. 383 s.
3. *Marshall Dzh., Bansal V.* Finansovaya inzheneriya. M. Infra-M, 1998. 784 s.
4. *Averchenko V., Veseli R., Naumov G., Fajks E., Ertl I.* Principy zhilishchnogo kreditovaniya./ V. Averchenko, R. Veseli, G. Naumov, E. Fajks, I. Ertl. M.: Al'pina Biznes Buks, 2006. 261 s.
5. *Polterovich V.M., Starkov O.YU.* Formirovanie ipoteki v dogonyayushchih ekonomikah: problema transplantacii institutov. / V.M. Polterovich, O.YU. Starkov. M.: Nauka, 2007. 196 s.
6. *Gasanov I.I.* Organizaciya ssudno-sberegatel'noj kassy po principu ocheredi. M.: VC RAN, 2006. 45s.
7. *Gasanov I.I., Ereshko F.I.* Modelirovanie ipotechnyh mekhanizmov s samofinansirovaniem. M.: VC RAN, 2007 g., 62 s.
8. *Sytov A.N.* Imitacionnye eksperimenty s obshchej finansovoj model'yu zhilishchnoj koalicii. Vtoraya mezhdunarodnaya konferenciya "Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem". MLSD'2008. Doklady. IPU RAN, 1-3 oktyabrya 2008g. t.2, str.136-138.
9. *Ereshko F.I.* Finansovye modeli i vychislitel'nyj instrumentarij v zadachah analiza investicij. S. 410-446 v knige Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem (Sovremennye problemy. Vypusk 2)/Pod redakciej A.D. Cvirkuna. –M.: Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 2015. – 473s. – ISBN 978-5-94052-239-3.
10. *Ereshko F.I., Sytov A.N.* Mnogokriterial'naya zadacha vybora kreditnoj politiki banka. // Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem (MLSD'2012): Trudy SHestoj mezhdunarodnoj konferencii (ezhegodnyj sbornik) (1-3 oktyabrya 2012 g., Moskva, Rossiya). Tom I. M.: Uchrezhdenie Rossijskoj akademii nauk Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN, 2012. S. 141-151.
11. *Ereshko F.I.* O probleme generacii scenarijev pri vybore strategij v zadache organizacii koalicii zaemshchikov // Materialy Tret'ej mezhdunarodnoj konferencii "Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem". M.: IPU RAN, 2009.
12. *Ereshko F.I., Kochetkov A.V., Sytov A.N.* Mekhanizmy realizacii programmy ipotechnogo kreditovaniya. CHetvyortaya mezhdunarodnaya konferenciya "Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem". Doklady. IPU RAN, 2-4 oktyabrya 2010g. t.1
13. *Ereshko F.I., Sytov A.N.* Sravnitel'nyj analiz bankovskih tekhnologij v proektah ipoteki. // Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem (MLSD'2011): Programma i plenarnye doklady Pyatoj mezhdunarodnoj konferencii (3-5 oktyabrya 2011 g., Moskva, Rossiya). M.: Uchrezhdenie Rossijskoj akademii nauk Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN, 2011. S. 162-171.
14. *Ereshko F.I.* Model' finansovoj Koalicii v dinamike. Avtomatika i Telemekhanika, № 10, 2018. S.76-94.
15. www.wolfram.com

**Gasanov Igor Iskenderovich.** Dorodnizyn Computer center of Federal Research Center Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences Moscow, Russia. Senior research associate. Number of printing works: more than 50. Area of scientific interests: modeling of social and economic systems, research of operations, computing mathematic. E-mail: gasanov48@bmail.ru

**Ereshko Felix Ivanovich.** Dorodnizyn Computer center of Federal Research Center Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences Moscow, Russia. Head of department, Doctor of Engineering, professor. Number of printing works: more than 100. Area of scientific interests: modeling of social and economic systems, decision-making, game theory, research of operations, synthesis of control systems. E-mail: fereshko@yandex.ru

**Sytov Anatoly Nikolaevich.** Dorodnizyn Computer center of Federal Research Center Informatics and Management of the Russian Academy of Sciences Moscow, Russia. Research associate. Number of printing works: more than 20. Area of scientific interests: modeling of social and economic systems, research of operations, computing mathematic. E-mail: an-sytov@yandex.ru