

Оценка эффективности производственных и инфраструктурных подсистем

Прогнозирование динамики показателей рынков высокотехнологичной продукции с использованием операционного исчисления

Л.Е. ВАРШАВСКИЙ^{1,2}

¹ Институт системного анализа Федерального исследовательского центра
«Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия

² Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к моделированию и прогнозированию динамики экономических показателей олигополистических рынков высокотехнологичной продукции. В связи с тем, что динамика показателей рынков тесно связана со стратегиями участников рынка, используется игровая модель. Рассмотрены два подхода к определению оптимальных игровых стратегий, основанные на использовании обобщенных матричных уравнений Риккати и на использовании операционного исчисления. Рассматриваются примеры использования комбинации этих подходов при построении сценариев среднесрочного прогнозирования динамики ключевых показателей рынков микропроцессоров архитектуры x86 и ARM, мобильной беспроводной связи, форвардного рынка электроэнергии.

Ключевые слова: олигополистические рынки, операционное исчисление, микропроцессоры, форвардный рынок.

DOI: 10.14357/20790279190201

Введение

Значительная часть рынков высокотехнологичной продукции функционирует в условиях *олигополии*. Так, олигополистическими рынками являются, например, рынки авиационной техники, аппаратных средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ, включая микроэлектронную продукцию), продукции энергетического машиностроения и др.

В связи с тем, что динамика показателей рынков тесно связана со стратегиями участников рын-

ка, представляет актуальность анализ и прогноз рыночных стратегий высокотехнологичных фирм. При разработке стратегий поведения крупных фирм (как олигополистов, так и частичных монополистов) обычно используются гипотезы о рациональном поведении олигополистов в соответствии с различного рода критериями эффективности (например, чистой текущей стоимости, прибыли и др.) или о приоритетности для фирм других целей (например, достижения желаемой доли на рынке,

внедрения новых продуктов, что характерно для рынков новой наукоемкой продукции).

В зависимости от конкретных рыночных условий задача формирования стратегий крупных фирм может состоять в определении равновесия динамической игры по Нэшу- Курно, по Бертрану (в случае олигополий, см. [1]), по Штакельбергу или по Форхаймеру (в случае частичных олигополий или монополий, см. [2]). Наиболее распространенный подход к моделированию поведения участников реальных олигополистических рынков связан с использованием линейных динамических игр с квадратичными критериями (см., например, [3–7]).

В настоящей статье рассматриваются практические аспекты моделирования динамики показателей реальных высокотехнологичных рынков на основе методов теории управления и динамических игр для целей анализа и прогнозирования.

1. Рассматриваемая модель

Проводимый в настоящей статье анализ основан на использовании агрегированной динамической модели рационального поведения участников олигополии в виде линейной динамической игры по Нэшу-Курно с квадратичным критерием, в которой участвуют N фирм-олигополистов [6–10].

Центральным блоком модели является следующая зависимость, связывающая объемы производства Q_{it} со входной переменной u_{it} (в зависимости от решаемой задачи инвестициями в основной капитал или вводом мощностей), i – индекс фирмы, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$Q_{it} = W_i(z) u_{it} = \frac{B_i(z)}{A_i(z)} u_{it} + Q_{0it}, \quad (1)$$

где $W_i(z) = B_i(z)/A_i(z)$ – передаточная функция, причем $A_i(z), B_i(z)$ – полиномы относительно переменной z , представляющей собой оператор сдвига: $zx_t = x_{t+1}$;

$$A_i(z) = \sum_{k=0}^n a_{ik} z^k, \quad B_i(z) = \sum_{j=0}^m b_{ij} z^j, \quad m \leq n, \quad (2)$$

где Q_{0it} – слагаемое, характеризующее начальные условия. Другой блок модели – обратная функция (оператор) спроса. В модели предполагается баланс суммарного спроса D_t и предложения Q_t , т.е.

$$D_t = Q_t = \sum_{i=1}^N Q_{it} \text{ и линейная зависимость цены на}$$

рынке p_t от объема спроса:

$$p_t = a - bD_t + d\xi_t = a - bQ_t + d\xi_t, \quad (3)$$

где ξ_t – экзогенная переменная (например, темп прироста ВВП), Q_{Fi} , a , b , d – параметры.

Предполагается, что олигополисты используют скользящее планирование и в каждый момент времени τ максимизируют чистую текущую стоимость (NPV):

$$J_{\tau i} = \sum_{t=\tau}^{\tau+Tp} \beta^t [(p_t - c_i) Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2} \rho_i u_{it}^2] \rightarrow \max_{u_{it}} \quad (4)$$

где $\beta = 1/(1+r)$ – дисконтирующий множитель, соответствующий ставке дисконтирования r ; p_t – цена продукции; c_i – средние производственные издержки (без амортизации); q_i – стоимость единицы мощностей; $\frac{1}{2} \rho_i u_{it}^2$ – затраты

регулирования (adjustment costs, см., например, [8, 11]), причем ρ_i – коэффициент, характеризующий инвестиционные возможности олигополистов, $i = 1, 2, \dots, N$; T_p – период скользящего планирования (для упрощения записи формул ставки налогов приняты равными нулю). Управляющими переменными в модели являются инвестиции в основной капитал или вводы мощностей u_{it} , $i = 1, 2, \dots, N$.

2. Проблемы, связанные с расчетом оптимальных стратегий участников олигополистических рынков

2.1. Использование обобщенных матричных уравнений Риккати

Для проведения прогнозных расчетов на основе модели (1)-(4) могут быть использованы два подхода: 1). основанный на представлении модели в пространстве состояний и использовании обобщенных (generalized, в англоязычной литературе используются также термин coupled) матричных уравнений Риккати (см., например, [3–5]; 2). основанный на использовании операционного исчисления [6, 7]. Эти подходы взаимно дополняют друг друга.

При использовании первого подхода для расчета как разомкнутых (open-loop), так и замкнутых (closed-loop, feedback или Markov perfect), оптимальных по Нэшу-Курно стратегий, следует предварительно представить модель (1)-(4) в эквивалентной форме в пространстве состояний:

$$X_t = AX_{t-1} + \sum_{i=1}^N B_i u_{it} + D\xi_t, \quad (5)$$

$$J_{\tau i} = \sum_{t=\tau}^{\tau+Tp} \beta^t \left(\frac{1}{2} X_t' H_i X_t - C_{0i}' X_t - q_{it}' u_{it} - \frac{1}{2} \rho_i u_{it}^2 \right) \rightarrow \max_{u_{it}} \quad (6)$$

где $A, B_i, D, H_i, C_{0i}, q_{it}, X_t, \xi_t$, $i = 1, 2, \dots, N$ – матрицы и векторы

заны с параметрами и переменными исходной модели. Получаемые оптимальные стратегии участников олигополии u_{it} (как разомкнутые OL, так и замкнутые CL) линейно связаны с вектором состояния системы (5) соотношением:

$$u_{it}^{OL} = K_{it}^{OL} X_{t-1} + \eta_{it}^{OL}; \quad u_{it}^{CL} = K_{it}^{CL} X_{t-1} + \eta_{it}^{CL}, \quad (7)$$

в котором K_{it}^v и η_{it}^v , $v = OL, CL$ – векторы, зависящие от решений обобщенных уравнений Риккати [3,5].

Опыт моделирования динамики показателей реальных олигополистических рынков свидетельствует о том, что методы расчета оптимальных стратегий участников рынков, основанные на решении обобщенных матричных уравнений Риккати, могут приводить к вполне удовлетворительным результатам. Однако следует отметить, что получаемые при этом решения не обладают достаточной наглядностью, требуемой при анализе влияния тех или иных параметров и показателей моделей на исследуемые экономические переменные.

Более того, при некоторых значениях параметров моделей решения уравнений Риккати, имеющие экономический смысл, вообще могут отсутствовать, в то время, как оптимальные игровые стратегии существуют [5]. Так, при реализации скользящего планирования с использованием итерационного алгоритма решения обобщенных уравнений Риккати, применяется процедура обращения матриц, которые нередко оказываются плохо-обусловленными. Из-за этого может не обеспечиваться устойчивость систем (5) со стратегиями (7), что во многих случаях делает невозможным применение игровой модели скользящего планирования с конечным горизонтом планирования (5)-(6). Как показывает опыт проведения вычислений, это явление характерно для случая зависимости цены от совокупного объема производства в (3) с некоторым лагом, например, когда $p_t = a - bQ_{t-1} + d\xi_t$ или $p_t = ap_{t-1} - bQ_{t-1} + d\xi_t$.

В связи с отсутствием продвинутой теории для линейных динамических игр с квадратичным критерием и со скользящим горизонтом планирования (в отличие от линейных систем управления см., например, [12]), исследование устойчивости олигополии приходится проводить с использованием компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты показали, что, например, для модели (5)-(6) с передаточной функцией $W_i(z) = \alpha * z^2 / (z - \lambda)^2$, $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1$, а также при высоких инвестиционных возможностях участников рынка, устойчивость олигополии, как динамической системы, зависит от того, в какой области локализован параметр λ , от числа участников оли-

гополии, а также от величины периода скользящего планирования T_p [6].

2.2. Использование операционного исчисления для определения оптимальных по Нэшу разомкнутых стратегий олигополистов (факторизация полиномов)

В статьях [6,7] предложен второй, более наглядный и удобный для экономического анализа подход к определению оптимальных разомкнутых игровых стратегий олигополистов при достаточно большом периоде скользящего планирования $T_p \rightarrow \infty$ ¹. Этот подход основан на использовании операционного исчисления (а также широко распространенного при исследовании дискретных систем управления и в теории связи Z-преобразования, см., например, [13,14]) и нахождении экстремума функционалов в гильбертовом пространстве (см. [15]). При его использовании, из необходимого условия экстремума функционала (6) можно получить формулы для расчета оптимального управления u_{it} (производственных инвестиций, вводов мощностей и др.) и объемов производства Q_{it} i -го олигополиста, максимизирующего критерий NPV с учетом затрат регулирования [6,7].

Так, *при равновесии по Нэшу-Курно* справедливы следующие соотношения (для упрощения формул, далее принято, что $\xi_i \equiv 0$, $Q_{0it} \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, N$):

$$Q_{it} = W_i(z)u_{it} = \frac{\Gamma_i(z, (\beta z)^{-1})}{b} (p_t - PL_i), \quad (8)$$

где: $PL_i = c_i + q_i / W(1 + r)$ – приведенные затраты i -ой фирмы;

$$\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}] = \frac{bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

$$p_t = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}]} \{a + \sum_{i=1}^N \Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}] PL_i\}. \quad (10)$$

При равновесии по Штакельбергу в дуополии формула для расчета объема производства фирмы-лидера Q_{Lt} (игрок 2) имеет следующий вид:

$$Q_{Lt} = \frac{W_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{\rho_2 + \frac{bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}} (p_t - PL_2) = \frac{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})] \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})}{b} (p_t - PL_2), \quad (11)$$

¹ Следует отметить, что целесообразность использования предлагаемого подхода для расчета оптимальных по Нэшу-Курно разомкнутых стратегий обусловлена тем, что во многих случаях значения расчетных показателей при бесконечном ($T_p \rightarrow \infty$) и при конечном периоде скользящего планирования ($T_p \approx 10 \div 15$) близки.

где

$$p_i = \frac{1}{1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})} \left\{ \frac{(a - PL_i)}{1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})} + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1}) PL_i + PL_i \right\} \quad (12)$$

$$\Gamma_L(z, (\beta z)^{-1}) = \frac{\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})}{\left[1 + \frac{\rho_2 \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}{\rho_2 + b W_2(z) W_2((\beta z)^{-1})} \right]} \quad (13)$$

Для получения выражений, характеризующих динамику рассматриваемых показателей во временной области, необходимо провести факторизацию правых частей выражений (9)-(13). Факторизация многочленов может быть проведена, например, в среде MATLAB с использованием процедур поиска корней полиномов, а также процедур формирования соединений систем, реализованных в Control Systems Toolbox (таких, в частности, как series(), parallel(), feedback() и др.). При невысоком порядке передаточной функции $W_i(z)$ такие расчеты могут быть также проведены с использованием нашедших широкое распространение электронных таблиц [16].

Предложенный метод обеспечивает, в отличие от обобщенных уравнений Риккати, экономически приемлемые решения для широкого диапазона изменения параметров модели (1)-(4).

При использовании данного подхода для определения оптимальных стратегий олигополистов становится понятной целесообразность введения таких индикаторов, как предельно допустимые затраты для участников рынка (т.н. «приведенные» затраты) $PL_i = c_i + q_i / W(1 + r_i)$, а также индикатор рыночных (инвестиционных) возможностей $\Gamma_i[1, (1 + r)]$ (см. (9), можно показать, что, чем выше $\Gamma_i[1, (1 + r)]$, тем большая рыночная доля может быть достигнута i -ой компанией при прочих равных условиях).

Метод удобен, в частности, при оценке перспектив утверждения на олигополистическом рынке передовой компании, использующей продукты и технологии, которые могут быть отнесены к «прорывным». Так, если на олигополистическом рынке присутствуют две группы олигополистов: N1 олигополистов с одинаковыми предельно допустимыми затратами PL_1 и N2 «передовых» олигополистов с одинаковыми предельно допустимыми затратами $PL_2 < PL_1$, то установившийся уровень рыночной доли второй группы составит:

$$MS_2(\infty) = \frac{N_2 \Gamma_2[1, (1 + r)] \{a - PL_2 + N_1 \Gamma_1[1, (1 + r)] (PL_1 - PL_2)\}}{N_1 \Gamma_1[1, (1 + r)] (a - PL_1) + N_2 \Gamma_2[1, (1 + r)] (a - PL_2)} \quad (14)$$

Очевидно при $N_j \rightarrow \infty$:

$$MS_2(\infty) = \frac{N_2 \Gamma_2[1, (1 + r)] (PL_1 - PL_2)}{(a - PL_1)} \quad (14a)$$

Полученные формулы позволяют проанализировать влияние основных параметров динамической модели (1)-(4) на продвижение на рынке группы передовых компаний. Они представляют собой обобщение формул полученных для статической модели [17] (Vives, 1999), на случай динамических олигополий [6].

Кроме того, используя свойства Z-преобразования, можно при постоянных PL_i , основываясь на (8), оценить установившиеся уровни производства участников рынка $Q_{i\infty}$ [18]:

$$Q_{i\infty} = \frac{\Gamma_i(1, (1 + r))}{b} (p_\infty - PL_i), \quad (8a)$$

цены $p_\infty = a - b \sum_{i=1}^N Q_{i\infty}$, рыночных долей фирм

$MS_i(\infty)$, а также других показателей. Из (8), (8a) следует, что объемы производства и рыночная доля фирм тем выше, чем меньше их лимитирующие затраты PL_i и коэффициенты ρ_i , характеризующие их инвестиционные возможности (их значение влияет на величину $\Gamma_i(1, 1+r)$). Последнее соотношение может быть использовано при оценке значений коэффициентов ρ_i , при которых достигаются желаемые (целевые) установившиеся уровни производства участников рынка $Q_{i\infty}$, согласованные с критерием оптимизации NPV(). Так, очевидно:

$$\rho_i = \left[\frac{(p_\infty - PL_i)}{b Q_{i\infty}} - 1 \right] b W_i(1) W_i(1 + r) = (\delta_i - 1) b W_i(1) W_i(1 + r), \quad (15)$$

где $\delta_i = \frac{(p_\infty - PL_i)}{b Q_{i\infty}}$ – характеристика инвестиционных ограничений i -й фирмы (в статической модели Курно, в которой отсутствуют такие ограничения, $\delta_i = 1$) $i = 1, 2, \dots, N$.

Использование операционного исчисления также упрощает получение аналитических зависимостей и проведение доказательств утверждений и фактов, имеющих важное прикладное значение.

В связи с тем, что можно провести факторизацию операторов $\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}]$ и $\Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})$, определяемых соотношениями (9) и (13), т.е. представить их в виде:

$$\Gamma_i[z, (\beta z)^{-1}] = S_i(z) \cdot S_i((\beta z)^{-1}), \quad (16)$$

$i = 1, 2, \dots, N, L$, где корни многочлена $S(z)$ локализованы внутри круга с радиусом $\beta^{-1/2}$ на комплексной плоскости, а корни многочлена $S((\beta z)^{-1})$ – вне этого круга [7], то для любой функции x_i справедливо

$$\begin{aligned} & \langle x_t, \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] x_t \rangle = \\ & = \langle x_t, S_i(z) \cdot S_i((\beta z)^{-1}) x_t \rangle = \\ & = \langle S_i(z) x_t, S_i(z) x_t \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая (13), (17) можно также показать, что:

$$\langle x_t, \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] x_t \rangle \leq \langle x_t, x_t \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_t^2. \quad (18)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & 0 \leq \langle x_t, \Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}] x_t \rangle = \\ & = \langle x_t, (1 - \frac{\rho_i}{\rho_i + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}) x_t \rangle \leq 1, \end{aligned}$$

в силу того, что $\langle x_t, \frac{\rho_i}{\rho_i + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})} x_t \rangle \geq 0$.

Таким образом, можно считать, что $0 \leq \|\Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]\|_{\infty} \leq 1$ (в дальнейшем последнее неравенство будет записываться, как $0 \leq \Gamma_i(\cdot) \leq 1$). Это позволяет обращаться с операторами типа

$\Gamma_i [z, (\beta z)^{-1}]$, почти как с положительными числами, меньшими по величине 1, что существенно упрощает получение многих результатов. В частности, упрощается проведение сравнительного анализа оптимальных стратегий участников рынков различных типов, например, стратегий, оптимальных по Штакельбергу и Нэшу-Курно. Так, на основе операционного исчисления достаточно просто может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение. В дуополии чистая текущая стоимость NPV (без затрат регулирования) фирмы-лидера (игрока с номером 2), следующего стратегии Штакельберга, выше, чем при использовании им оптимальной стратегии по Нэшу-Курно, т.е. $NPV^{2Stack} \geq NPV^{2Nash}$.

Доказательство. NPV (без затрат регулирования) фирмы-лидера, придерживающейся соответственно стратегий Штакельберга NPV^{2Stack} и Нэша-Курно NPV^{2Nash} , с учетом (8)-(13) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} NPV^{2Stack} &= \left\langle (p_t^{Stack} - PL_2), \frac{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})] \Gamma_L [z, (\beta z)^{-1}]}{b} (p_t^{Stack} - PL_2) \right\rangle = \\ &= \left\| a - PL_2 + \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] * (PL_1 - PL_2) \right\|_{FS}^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$FS = \frac{\Gamma_L [z, (\beta z)^{-1}] / b}{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})]^2}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} NPV^{2Nash} &= \left\langle (p_t^{Nash} - PL_2), \frac{\Gamma_2 [z, (\beta z)^{-1}] (p_t^{Nash} - PL_2)}{b} \right\rangle = \\ &= \left\| a - PL_2 + \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] * (PL_1 - PL_2) \right\|_{FN}^2 \end{aligned}, \quad (21)$$

где

$$FN = \frac{[\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1}) / b]}{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2} \quad (22)$$

(под $\|x_t\|_A^2$ понимается $\|x_t\|_A^2 = \langle x_t, Ax_t \rangle = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t x_t Ax_t$, A – оператор).

Таким образом:

$$NPV^{2Stack} - NPV^{2Nash} = \left\| a - PL_2 + \Gamma_1 [z, (\beta z)^{-1}] * (PL_1 - PL_2) \right\|_{\Lambda}^2, \quad (23)$$

где

$$\Lambda = FS - FN = \frac{\Gamma_L[z, (\beta z)^{-1}]/b}{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})]^2} - \frac{[\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})/b]}{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2} =$$

$$= \frac{\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})/b}{[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2} \left[\frac{\Gamma_L[z, (\beta z)^{-1}][1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2}{\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})]^2} - 1 \right]. \quad (24)$$

С учетом (9) и (13) первое слагаемое в скобках (24) принимает следующий вид:

$$\frac{[\Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2}{[\Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_L(z, (\beta z)^{-1})]^2} =$$

$$= \frac{[\rho_2 + bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][\rho_2 + \frac{bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}][1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2}{\{\rho_2[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})] + 2bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})\}^2} =$$

$$= \frac{[\rho_2 + bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][\rho_2 + \frac{bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}][1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]^2}{\{\rho_2[1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})] + [bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]\}^2} =$$

$$= \frac{\rho_2^2 + b\rho_2W_2(z)W_2((\beta z)^{-1})\frac{2 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})} + \frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]^2}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}}{\rho_2^2 + 2\rho_2\frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})} + \left\{ \frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})} \right\}^2} \geq 1 \quad (25)$$

Последнее неравенство следует из того, что для положительного оператора $|W_i|_\beta^2 = W_i(z)W_i((\beta z)^{-1})$, а также при $0 \leq \Gamma_i(\cdot, \cdot) \leq 1, i=1,2$ справедливо:

$$\rho_2^2 + b\rho_2W_2(z)W_2((\beta z)^{-1})\frac{2 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})} + \frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]^2}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1})} \geq$$

$$\geq \rho_2^2 + 2\rho_2\frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})} + \left\{ \frac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})][1 + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})]}{1 + \Gamma_1(z, (\beta z)^{-1}) + \Gamma_2(z, (\beta z)^{-1})} \right\}^2 \quad (26)$$

Таким образом, в (23), (24) оператор $\Lambda \geq 0$ и, следовательно $NPV^{2Stack} \geq NPV^{2Nash}$. Утверждение доказано.

2.3. Модель последовательного обновления выпускаемой продукции (типа vintage)

В ряде высокотехнологичных отраслей компании регулярно обновляют продукцию, вводя новые производственные линии. При этом продолжается выпуск продукции на старых мощностях. Наглядным примером является компания Intel, которая с конца 1990 гт. реализовала двухгодичный цикл перехода производства микросхем на новый технологический процесс (в первый год на производство схем с уменьшенным топологическим размером, а во второй год — на производство микропроцессоров с новой или усовершенствованной архитекту-

рой ²). При моделировании динамики экономических показателей подобных процессов и оценке их эффективности также могут быть полезны методы операционного исчисления.

Для иллюстрации рассматриваемого подхода ниже рассматривается один из простых вариантов модели типа vintage применительно к монополющему производителю [19].

Пусть в каждый год t компанией-монополистом вводится производственная линия мощностью u_t . Пусть объем производства новой продукции в году t $Q_{t,\tau}$ на производственной линии, введенной в году τ , составляет $Q_{t,\tau} = K_{t-\tau}u_\tau$, где $K_{t-\tau}$ — переходная функция, характеризующая использование мощности. Пусть обратная функция спроса на продукцию представляет собой линейную функцию выпуска

² В этом заключалась стратегия “tick-tock”.

продукции с этих мощностей:

$$p_{t,\tau} = a_\tau - b_\tau Q_{t,\tau} = a_\tau - b_\tau K_{t-\tau} u_\tau, \quad (27)$$

где $p_{t,\tau}$ – цена продукции в году t с производственной линии, введенной в году τ ; a_τ , b_τ – параметры.

Необходимо определить оптимальные объемы ввода мощностей, максимизирующие чистую текущую стоимость NPV:

$$NPV_{[0,\infty)} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau \sum_{t=\tau}^{\infty} [(a_\tau - c_\tau - b_\tau K_{t-\tau} u_\tau) K_{t-\tau} u_\tau] - \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau \rho_\tau u_\tau^2, \quad (28)$$

где $\rho_\tau u_\tau^2$ – затраты регулирования, c_τ – лимитирующие затраты, β – как и ранее, коэффициент дисконтирования.

Приравнявая нулю производную (28) по u_τ , можно получить следующие выражения для определения оптимальных объемов ввода мощностей и производства со всех производственных линий:

$$u_\tau = \frac{W(\beta^{-1})(a_\tau - c_\tau)}{2(\rho_\tau + b_\tau * W_2(\beta^{-1}))}; \quad (29)$$

$$Q_t = \sum_{\tau=0}^t K_{t-\tau} u_\tau = \sum_{\tau=0}^t K_{t-\tau} \frac{W(\beta^{-1})(a_\tau - c_\tau)}{2(\rho_\tau + b_\tau * W_2(\beta^{-1}))}$$

где

$$W(\beta^{-1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t K_t; \quad W_2(\beta^{-1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t K_t^2. \quad (30)$$

Общий объем производства в году t со всех производственных линий и чистая текущая стоимость $NPV_{[0,\infty)}$ за период $[0, \infty)$ и (т.е. за все время их функционирования) составят соответственно:

$$Q_{[0,\infty)} = W(1) * W(\beta^{-1}) Z \left\{ \frac{(a_\tau - c_\tau)}{2(\rho_\tau + b_\tau * W_2(\beta^{-1}))} \right\}_{z=1}, \quad (31)$$

$$NPV_{[0,\infty)} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau \left[\frac{[W(\beta^{-1})]^2 (a_\tau - c_\tau)^2}{4(\rho_\tau + b_\tau * W_2(\beta^{-1}))} \right]. \quad (32)$$

При выводе (31) использовано свойство Z-преобразования от суммы с бесконечным верхним пределом, см. например [13,14], $Z\{\cdot\}$ — обозначение Z-преобразования функции в скобках. Полученное выражение (32) представляет собой дисконтированную сумму NPV_τ , связанных с производством продукции с мощностями каждого поколения, и фактически является Z-преобразованием этих NPV_τ при $z = \beta^{-1}$.

С целью иллюстрации метода ниже рассматривается пример расчета показателей $Q_{[0,\infty)}$ и $NPV_{[0,\infty)}$ (общего объема производства продукции и чистой текущей стоимости со всех вводимых производственных линий) в случае, когда:

$$W(z) = \frac{\gamma z}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}, \quad (33)$$

$$a_\tau = a_0 \mu_a^\tau, \quad c_\tau = c_0 \mu_c^\tau, \quad b_\tau = b_0 \mu_b^\tau, \quad \rho_\tau = \rho_0 \mu_\rho^\tau; \quad (34)$$

$$0 < \mu_c \leq \mu_a \leq 1, \quad \mu_b \geq 1.$$

Расчеты при данных предположениях приводят к следующим результатам:

$$Q_{[0,\infty)} = \frac{W(1) * W(\beta^{-1}) \mu_b \left(\frac{a_0}{\mu_b - \mu_a} - \frac{c_0}{\mu_b - \mu_c} \right)}{2R_0}, \quad (35)$$

$$NPV_{[0,\infty)} = \frac{W(\beta^{-1})^2 \mu_b \left(\frac{a_0^2}{\mu_b - \mu_a^2 \beta} - \frac{2a_0 c_0}{\mu_b - \mu_a \mu_c \beta} + \frac{c_0^2}{\mu_b - \mu_c^2 \beta} \right)}{4R_0}, \quad (36)$$

где

$$W(\beta^{-1}) = \frac{\beta \gamma}{(z - \lambda_1 \beta)(z - \lambda_2 \beta)}, \quad (37)$$

$$W_2(\beta^{-1}) = \frac{\beta \gamma^2 (1 + \lambda_1 \lambda_2 \beta)}{(1 - \lambda_1^2 \beta)(1 - \lambda_2^2 \beta)(1 - \lambda_1 \lambda_2 \beta)},$$

$$R_0 = \rho_0 + b_0 * W_2(\beta^{-1}). \quad (38)$$

Из найденных соотношений нетрудно рассчитать оценку NPV в расчете на единицу производимой продукции.

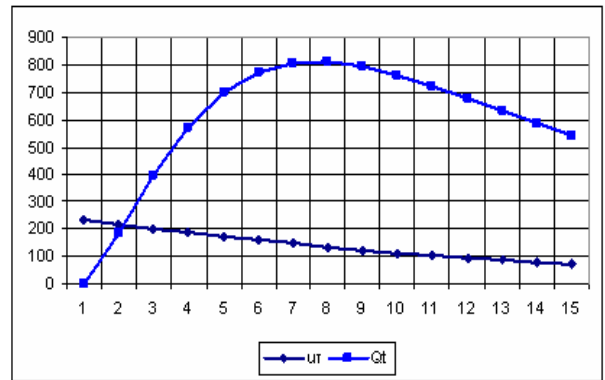


Рис. 1. Динамика объемов производства Q_t и ввода мощностей u_t в результате расчета в соответствии с (36)-(38) при принятых значениях параметров

На рис. 1 представлена динамика объемов производства Q_t и ввода мощностей u_t при следующих значениях параметров соотношений (33)-(34):

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.8; \quad \lambda_1 = 0.55; \quad \lambda_2 = 0.65; \\ \beta &= 0.952; \quad a_0 = 120; \quad b_0 = 0.015; \\ c_0 &= 82; \quad \rho_0 = 0.3; \quad \mu_a = 0.975; \\ \mu_c &= 0.95; \quad \mu_b = 1.1. \end{aligned}$$

При принятых значениях параметров данной модели общий объем производства $Q_{[0,\infty)}$ составит 14011 ед., а $NPV_{[0,\infty)}$ – 161254 усл. денежных единиц. Объем чистой текущей стоимости на единицу

продукции $\frac{NPV_{[0,\infty)}}{Q_{[0,\infty)}}$ составит 11.5 усл. денежных единиц на единицу продукции.

3. Примеры прогнозирования показателей некоторых олигополистических рынков высокотехнологичной продукции с использованием операционного исчисления

3.1. Прогнозирование динамики показателей рынка микропроцессоров на среднесрочный период

В работе [18] в результате решения игровой задачи типа (1)-(4) построены разомкнутые (open-loop) оптимальные по Нэшу-Курно стратегии компаний-производителей микропроцессоров x86 (Intel и AMD) и соответствующие им ключевые показатели дуопольного рынка микропроцессоров x86 для персональных компьютеров (PC). Для большинства сценариев (соответствующих разным значениям параметров a и b функции спроса (3)) проведенные расчеты показывают стабилизацию или уменьшение объемов суммарного производства рассматриваемых процессоров для PC. Средняя цена микропроцессоров x86 при всех сценариях будет ниже, чем в 2015 г., а рыночная доля компании AMD в большинстве сценариев может быть несколько выше, чем в базовом 2015 г. (рис. 2).



Рис. 2. Динамика средней цены микропроцессоров x86 p_i при разных значениях параметров обратной функции спроса (2015=100)

Особое внимание уделено исследованию перспективной структуры рынка микропроцессоров для серверов (с архитектурой x86 и ARM), т.к. с этим сегментом связываются наиболее актуальные для производителей и потребителей направления инновационного развития. При проведении расчетов предполагалось, что рынок микропроцессоров архитектуры x86 и ARM для серверов представляет собой олигополию, участниками которой являются с одной стороны компания Intel (практически все производство микропроцессоров архитектуры x86 будет сосредоточено на ее фабриках), а с другой стороны – компании, выпускающие микропро-

цессоры архитектуры ARM.

Рассматривались возможные в перспективе варианты структуры рынка, соответствующие различным величинам соотношений между удельными

операционными затратами компаний $\eta_{ci} = \frac{c_i}{c_0}$,

а также между коэффициентами, характеризую-

щими их инвестиционные возможности $\eta_{pi} = \frac{\rho_i}{\rho_0}$.

Расчеты показывают, что структура рассматриваемого рынка в перспективе несколько более чувствительна к изменениям величин соотношений между коэффициентами, характеризующими инвестиционные возможности компаний, чем к изменениям соотношений между удельными операционными затратами (рис. 3).

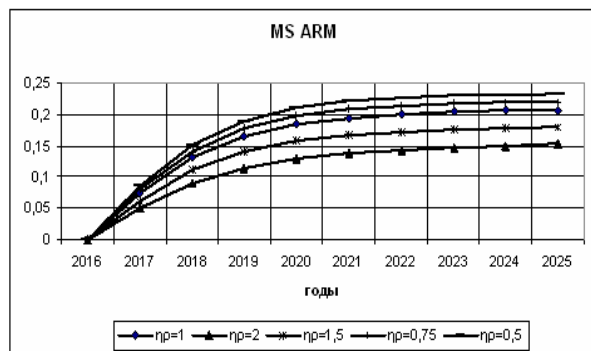


Рис. 3. Динамика рыночной доли MS_{it} микропроцессоров для серверов архитектуры ARM при различной величине соотношений между коэффициентами η_p (при условии $\eta_c = 1$)

Кроме того, исследовалось также влияние числа новых компаний, производящих микропроцессоры архитектуры ARM, на показатели рынка. По нашим расчетам, расширение числа новых компаний, обладающих значительными инвестиционными возможностями, позволило бы уже к 2020 г. существенно повысить рыночную долю микропроцессоров ARM (рис. 4)

3.2. Исследование динамики показателей рынка мобильной связи США

К настоящему времени мобильная связь проникла во все сферы жизни современного общества. С начала 1990 гг., когда появились разновидности цифровой технологии мобильной связи 2G и до настоящего времени происходит неуклонное увеличение числа пользователей мобильной связи.

Рост активности в отрасли мобильной связи США сопровождается повышением рыночной

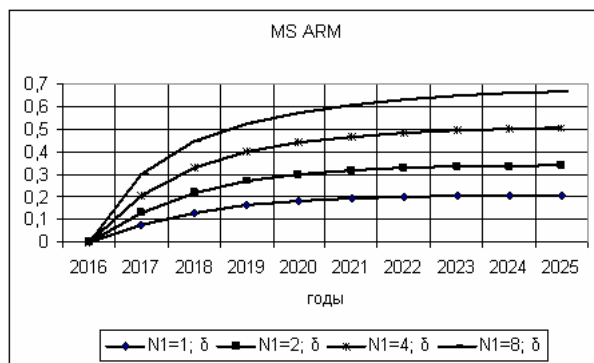


Рис. 4. Динамика рыночной доли MS_{11} микропроцессоров для серверов архитектуры ARM при значительных инвестиционных возможностях каждой из новых компаний при разном их числе N_1

доля крупных компаний-провайдеров. Так, на долю четырех компаний (Verizon, AT&T, T-Mobile и Sprint) приходится около 100% всех подключений и доходов от мобильного сервиса в США, причем доля этих компаний в подключениях в сложившейся квадрополии составляла в 2017 г. соответственно 35.5%, 34.3%, 17.3% и 12.8%.

В последнее время в Федеральной комиссии США по связи (*Federal Communications Commission*, сокр. FCC) обсуждается проблема слияния T-Mobile и Sprint! Противники объединения опасаются усиления концентрации на рынке всего 3-х компаний (возникнет триолия). В свою очередь, сторонники слияния отмечают в качестве положительного факта то, что объединенная компания будет более сильным конкурентом для AT&T и Verizon. Кроме того, они считают, что триолия будет способствовать более быстрому развертыванию системы 5G (см., напр. [URL: http://www.freestatefoundation.org/images/T-Mobile-Sprint_Merger_Offers_Public_Interest_Benefits_071218.pdf].)

Проблема формирования эффективной структуры рынка мобильных сервисов стоит и в нашей стране, где также высока доля концентрации услуг в небольшом числе компаний-провайдеров. В связи с этим, представляет практический интерес разработка методических подходов к исследованию перспективной структуры этого рынка.

Автором на основе динамической игровой модели типа (1)-(4), с использованием комбинации рассмотренных выше двух игровых подходов, проводились прогнозы динамики показателей рынка мобильной связи США в условиях как существующей квадрополии ($N=4$), так и возможной триолии ($N=3$). В частности, исследовались сценарии достижения желаемых гипотетических рыночных долей компаний к 2030 г., согласованных с их инвестиционными воз-

можностями и оптимизацией NPV, при различных сценариях роста суммарного по стране мобильного трафика данных (является экзогенной переменной).

Проведенные расчеты показывают, что превращение квадрополии мобильной связи в США в триолию может существенно повлиять на структуру рынка в сторону повышения рыночной доли объединенной компании. Так, новая объединенная компания T-Mobile+Sprint могла бы захватить наибольшую долю рынка, отклонившись от гипотетических целей, ожидаемых другими компаниями. Например, при ориентации этой компании на достижение 35% доли на рынке в 2030 г. (вместо гипотетически предполагаемой другими участниками рынка 30.1%, при целевых установках конкурентов на прежних уровнях: 35.5% и 34.3%) ее рыночная доля уже к 2025 г. составила бы более 36% (рис. 5).

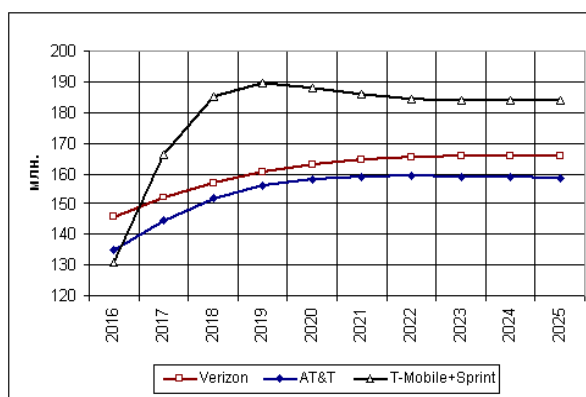


Рис. 5. Динамика числа подключений в компаниях триолии при отклонении целей компаний от первоначально принятых (сценарий 15%-го роста трафика данных)

3.3. Исследование последствий введения форвардного рынка электроэнергии

В статье [20] приводится динамический анализ условий и перспектив роста мощностей новых атомных энергоблоков (работающих в базовом режиме и характеризующихся высокими капиталовложениями), которые могут открываться при создании *форвардного* рынка электроэнергии. Рассматривается рынок с дифференцированным продуктом, в качестве которого выступает электроэнергия с источников пиковой и полупиковой мощности, генерируемая в N_s энергокомпаниях (газотурбинные установки (ГТУ) и электростанции на основе возобновляемых источников), а также с источников базовой мощности (АЭС, угольные ТЭС), генерируемых в N_f энергокомпаниях, причем $N=N_s+N_f$.

Предполагается, что компании первой группы участвуют на спотовом рынке. Освоение мощностей

в первой группе компаний происходит мгновенно (данное предположение близко к реальному положению дел, так как ГТУ, и особенно электрогенерирующие установки на основе возобновляемых источников, обладают значительно меньшей единичной мощностью по сравнению с энергоблоками АЭС и угольных ТЭС). Эти компании принимают решения в зависимости от ситуации на форвардном рынке, которая определяется стратегиями второй группы компаний, производящих базовую энергию.

Компании-производители базовой энергии являются участниками форвардного рынка. В рассматриваемой постановке, в соответствии с терминологией теории игр (отраслевых рынков), участники форвардного рынка относятся к группе олигополистов-лидеров, а спотового рынка – к группе последователей.

Освоение вводимых мощностей в компаниях второй группы происходит в соответствии с зависимостью типа (1), связывающей объема производства электроэнергии q_{fit} со входной переменной u_{fit} (вводом мощностей), $i = 1, 2, \dots, N$.

Другой блок модели – блок формирования цен, включает в себя две обратные функции спроса в виде линейной зависимости цен на рынке p_{vt} ($v = s, f$) от объемов суммарной выработки электроэнергии на пиковых и базовых станциях (в модели предполагается баланс спроса и предложения электроэнергии):

$$p_{st} = a_s - b_{ss}Q_{st} - b_{sf}Q_{ft}; p_{ft} = a_f - b_{fs}Q_{st} - b_{ff}Q_{ft}, \quad (39)$$

где $Q_{st} = \sum_{i=1}^{N_s} q_{sit}$, $Q_{ft} = \sum_{i=1}^{N_f} q_{fit}$ – суммарные объемы выработки электроэнергии на пиковых и базовых станциях, ξ_{vt} – экзогенная переменная или переменная, отражающая тренд, a_v, b_{vs}, b_{vf} – параметры, $v = s, f$ (индексы s и f относятся соответственно к производителям пиковой и базовой энергии).

В модели введено предположение о равенстве затрат на производство электроэнергии c_{st}, c_{ff} и ввод мощностей v_{st}, v_{ff} , внутри двух рассматриваемых групп компаний ($c_{st} = c_s, v_{st} = v_s, i = 1, 2, \dots, N_s$; $c_{ff} = c_f, v_{ff} = v_f, j = 1, 2, \dots, N_f$). Кроме того, предполагается, что передаточные функции в (1) одинаковы у всех компаний второй группы, т.е. $W_{fi}(z) = W_f(z)$.

Предполагается также, что производители пиковой энергии, участвующие на спотовом рынке, в каждый момент времени максимизируют чистую текущую стоимость (NPV) при первой обратной функции спроса в (39):

$$J_{sti} = [(p_{st} - PLs_i)q_{sit}] \rightarrow \max_{q_{sit}}, \quad (40)$$

где $PLs_i = c_{si} + \frac{(1+r_s)v_{si}}{r_s} = PLs$ – приведенные

затраты i -го производителя, $i = 1, 2, \dots, N_s$ (r_s – ставка дисконтирования) Энергокомпания-участники форвардного рынка знают реакцию участников спотового рынка на свои действия и в каждый момент времени τ , с учетом результатов оптимизации (40) участниками первой группы, максимизируют чистую текущую стоимость (NPV) вида (4).

Используя свойства Z-преобразования, в работе показано, что с позиций развития мощностей крупномасштабной энергетики введение форвардного рынка может оказаться тем более эффективным, чем больше величина индикатора

перекрестных связей $\gamma = \frac{b_{sf}b_{fs}}{b_{ss}b_{ff}}$ (т.е. чем сильнее

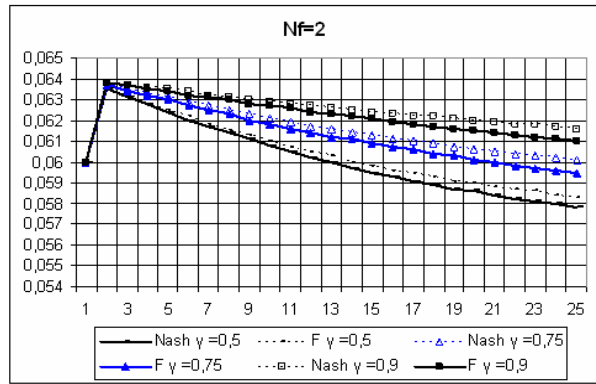


Рис. 6. Динамика цены на базовую энергию (в долл/кВт.ч.) при наличии (F) и отсутствии (Nash) форвардного рынка при разных значениях индикатора перекрестных связей γ в случае, когда базовая электроэнергия производится двумя компаниями ($N_f=2$)

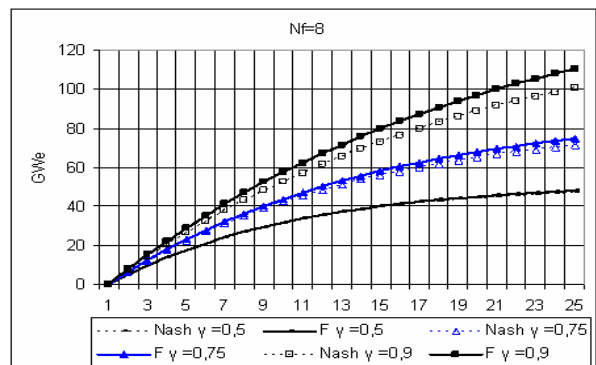


Рис. 7. Динамика установленной новой базовой мощности (в ГВт) при наличии (F) и отсутствии (Nash) форвардного рынка при разных значениях индикатора перекрестных связей γ в случае, когда базовая электроэнергия производится восемью компаниями ($N_f=8$)

взаимовлияние объемов производства одного продукта на цену другого) и чем выше уровень концентрации производства базовой электроэнергии. Вместе с тем, проведенные расчеты при значениях параметров модели, примерно соответствующих агрегированным показателям деятельности двух групп электростанций США, показывают, что введение лишь форвардного рынка может не обеспечивать значительного выигрыша с позиций стимулирования инвестиционной активности в крупномасштабной энергетике в *обозримой перспективе* (как, впрочем, и с позиций снижения цены, рис. 6, 7).

Таким образом, совершенствование рыночных механизмов и, в частности, введение форвардного рынка с целью оживления инвестиционной активности в крупномасштабной, и в особенности в атомной энергетике, даже при ее эффективности, должно сопровождаться комплексом мер государственной поддержки отрасли (в частности связанных с фискальной политикой, например, с введением налогового кредита на ввод электрической мощности, снижением налога на прибыль и др.).

Заключение

Использование линейных динамических игр с квадратичным критерием позволяет провести содержательный анализ стратегий высокотехнологичных компаний и разработать сценарии и прогнозы динамики показателей олигополистических рынков высокотехнологичной продукции.

Подход к расчету разомкнутых игровых оптимальных по Нэшу-Курно стратегий, основанный на применении операционного исчисления, обеспечивает устойчивость вычислений при широком диапазоне изменения параметров моделей, а также позволяет упростить анализ влияния основных параметров на показатели рынков. Индикаторы, используемые в рамках предложенного подхода, могут быть использованы, в частности, при формировании конкурентной среды в высокотехнологичных отраслях.

Важной особенностью данного подхода является то, что он обеспечивает возможность проведения анализа влияния различных факторов, присутствующих в моделях, на показатели эффективности инвестиционной деятельности непосредственно на основе выводимых аналитических зависимостей.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании перспектив развития рынков высокотехнологичной продукции, при разработке предложений по созданию структу-

ры формирующихся рынков, по государственной политике стимулирования инвестиционной деятельности, по антимонопольной политике. а также при формировании стратегий развития компаний.

Литература

1. *Starr A. W. and Ho Y. C.* Nonzero-sum differential games// *Journal of Optimization Theory and Applications.* . – March 1969. –vol. 3. . –pp. 184–206.
2. *Chen C.I. and Cruz J. B. Jr.* Stackelberg Solution for Two-Person Games with Biased Information Patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control.* – 1972. –v.17. – pp. 791-798.
3. *Basar T., Olsder G.J.* *Dynamic Noncooperative Game Theory.* – London/New York: Academic Press. – 1995.
4. *Dockner E.J., Jorgenson S. et. al.* *Differential Games in Economics and Management Science.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 2000.
5. *Engwerda, J.C.* *Linear Quadratic Games: An Overview.* – Discussion Paper 2006-110. –Tilburg University, Center for Economic Research. – 2006.
6. *Варшавский Л.Е.* Приближенные методы исследования динамики показателей рыночной структуры // *Компьютерные исследования и моделирование* – 2012. – Т. 4. – № 1.–с. 219-229.
7. *Варшавский Л.Е.* Использование методов теории управления для формирования рыночных структур// *Компьютерные исследования и моделирование* //– 2014. – Т. 6. – № 5. – с. 839-859.
8. *Варшавский Л.Е.* Методологические основы моделирования инвестиционного поведения промышленных фирм//*Теория и практика институциональных преобразований в России/ Ерзнкян Б.Г.(ред.).* – М.: – ЦЭМИ РАН. – 2004. – Вып. 3. – с. 70-96.
9. *Варшавский Л.Е.* Моделирование развития отраслей-потребителей высокотехнологичной продукции (на примере рынка пассажирских авиаперевозок). В кн.: *Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов.* – 2008. –Том 1. Под ред. Г.Ю.Ризниченко. М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – с. 113–121.
10. *Варшавский Л. Е.* Методологические основы моделирования развития олигополистических рынков продукции с длительным жизненным циклом (на примере рынка гражданской авиационной техники) // *Прикладная эконометрика.* – 2010. –№ 4. – с. 53-74.
11. *Варшавский Л.Е.* Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капиталов- и наукоемкой продукции (производственные мощ-

- ности, цены, технологические изменения). – М.: – ЦЭМИ РАН. – 2003. 354 с.
12. *Kwon W.H., Han S.H.* Receding horizon control: model predictive control for state models. . – London. – Springer. – 2005.
 13. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. – М.: – Машгиз, 1962.
 14. *Jury E.I.* Theory and Applications of the Z-Transform Method. NY. –John Wiley. –1964.
 15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: –Наука. – 1972.
 16. *Варшавский Л.Е.* Методы расчета оптимальных по Нэшу стратегий участников динамических игр на основе электронных таблиц // В сборнике: «Анализ и моделирование экономических и социальных процессов /Математика. Компьютер. Образование». – 2015. –Вып. 22. – №3. М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика.– с.84–96.
 17. *Vives X.* Oligopoly Pricing. – Cambridge. – MIT Press. – 1999.
 18. *Варшавский Л.Е.* Моделирование динамики ключевых показателей рынков компонентов высокопроизводительных вычислительных систем //Труды Института системного анализа Российской академии наук. – 2017. – Т. 67. –№1. – с. 12-27.
 19. *Варшавский Л.Е.* Оценка показателей эффективности компаний с использованием операционного исчисления// Теория и практика институциональных преобразований в России/ Ерзнкян Б.Г.(ред.). – М.: ЦЭМИ РАН. – 2018. – Вып. 42.
 20. *Варшавский Л.Е.* Экономико-математический анализ влияния введения форвардного рынка на показатели развития АЭС //В Сб. Теория и практика институциональных преобразований в России под ред. Б.А.Ерзнкяна. М.: ЦЭМИ РАН. – 2012. – Вып. 24. – с.121-131.

Варшавский Леонид Евгеньевич. Институт системного анализа Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук». Главный научный сотрудник. Федеральное государственное бюджетное учреждение Центральный экономико-математический институт Российской академии наук». Доктор экономических наук, доцент. Количество печатных работ: 150 (в т.ч. 5 монографий). Область научных интересов: математическое моделирование рыночных процессов и прогнозирование показателей рынков высокотехнологичной и капиталоемкой продукции, экономика науки. E-mail: hodvar@mail.ru

Forecasting dynamics of indicators of high-tech products markets with the help of operational calculus

L.E. Varshavsky^{1,II}

¹ Federal Research Center “Computer Science and Control» of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

^{II} Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Approaches to modeling and forecasting dynamics of indicators of oligopolistic markets of Hi-Tech products with the help of dynamic games with quadratic criteria are discussed. Two approaches to computation of optimal game strategies are studied: 1) traditional approach, based on generalized Riccati matrix equations and 2) based on operational calculus. Comparative analysis of different types of strategies in linear dynamical games with quadratic criteria is carried out (on the example of Nash-Cournot and Stackelberg strategies). Technique of Z-transform implementation in linear vintage models is considered in detail. Opportunities of discussed approaches to studying real markets (microprocessor, mobile communication and electricity forward markets) are analyzed.

Key words: *modeling, oligopolistic markets, operational calculus, Z-transform, economic oligopolistic markets, vintage models.*

DOI: 10.14357/20790279190201

References

1. *Starr A. W. and Ho Y. C.* Nonzero-sum differential games// *Journal of Optimization Theory and Applications*. . – March 1969. –vol. 3. . –pp. 184–206.
2. *Chen C.I. and Cruz J. B. Jr.* Stackelberg Solution for Two-Person Games with Biased Information Patterns. *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1972. –v.17. – pp. 791-798.
3. *Basar T., Olsder G.J.* Dynamic Noncooperative Game Theory. – London/New York: Academic Press. – 1995.
4. *Dockner E.J., Jorgenson S. et. al.* Differential Games in Economics and Management Science. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2000.
5. *Engwerda, J.C.* Linear Quadratic Games: An Overview. – Discussion Paper 2006-110. –Tilburg University, Center for Economic Research. – 2006.
6. *Varshavsky L.E.* 2012. Priblizhennyye metody issledovaniya dinamiki pokazatelej rynochnoj struktury [Approximate methods of studying dynamics of market structure]// *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye*/[*Computer Research and Modeling*] vol. 4, no 1, pp. 219-229.
7. *Varshavsky L.E.* 2014. Ispol'zovanie metodov teorii upravleniya dlja formirovaniya rynochnyh struktur [Control theory methods for creating market structures]// *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovani* [*Computer Research and Modeling*]. vol. 6, no 5, pp. 839-859.
8. *Varshavsky L.E.* 2004. Metodologicheskie osnovy modelirovaniya investicionnogo povedeniya promyshlennyh firm [Methodological bases for modeling the investment behavior of industrial firms]//*Teoriya i praktika institucional'nyh preobrazovanij v Rossii/ Erznkjan B.G.(red.)*[Theory and Practice of Institutional reforms in Russia/ Collection of scientific works ed. By B.H.Yerznkjan]. Moscow, Issue 3. CEMI Russian Academy of Sciences, pp. 63-89.
9. *Varshavsky L.E.* 2008. Modelirovanie razvitiya otraslej-potrebitelej vysokotekhnologichnoj produkcii (na primere rynka passazhirskih aviaperevozok) [Modeling development of industries-consumers of high technology products: A study of the US air passenger traffic]. V kn.: *Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie: Sb. nauchn. trudov.* Tom 1. Pod red. G.Ju.Riznichenko [Mathematics, Computing, Education: Proceedings of the 14 International Conference]. Vol 1. Moscow–Izhevsk: NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, [Institute of Computer Science], pp. 113–121.
10. *Varshavsky L.E.* 2010. Metodologicheskie osnovy modelirovaniya razvitiya oligopolisticheskix rynkov produkcii s dlitel'nym zhiznennym ciklom (na primere rynka grazhdanskoj aviacionnoj tehniky)[Methodological foundations of modeling evolution of markets of products with long lifecycle: A study of the market of civil aircraft] // *Prikladnaja jekonometrika* [Applied Econometrics]. Vol. 4. pp. 53-74.
11. *Varshavsky L.E.* 2003. Issledovanie investicionnyh strategij firm na rynkah kapitalo- i naukoemkoj produkcii (proizvodstvennyye moshhnosti, ceny, tehnologicheskie izmenenija) [The study of investment strategies of firms on markets of capital and R&D intensive products].. Moscow, CEMI Russian Academy of Sciences, p. 354.
12. *Kwon W.H., Han S.H.* Receding horizon control: model predictive control for state models. . – London. – Springer. – 2005.
13. *Kuzin L.T.* 1962. Raschet i proektirovanie diskretnyh sistem upravleniya [Synthesis of discrete control systems]. Moscow: Mashgiz
14. *Jury E.I.* Theory and Applications of the Z-Transform Method. NY. –John Wiley. –1964.
15. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* 1972. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka.
16. *Varshavsky L.E.* 2015. Metody rascheta optimal'nyh po Njeshu strategij uchastnikov dinamicheskix igr na osnove jelektronnyh tablits[Methods of computing optimal Nash strategies in dynamical games with the help of electronic tables] // V sbornike: «Analiz i modelirovanie jekonomicheskix i social'nyh processov /Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie» [Analysis and Modeling of Economic and Social Processes/Mathematics, Computing, Education: Proceedings of the 22 nd International Conference]. (Issue. 22), №3. Moscow– Izhevsk: NIC “Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika”, [Institute of Computer Science], pp.84–96.
17. *Vives X.* Oligopoly Pricing. – Cambridge. – MIT Press. – 1999.
18. *Varshavsky L.E.* 2017. Modelirovanie dinamiki klyuchevykh pokazatelej rynkov komponentov vysokoproizvoditel'nykh vychislitel'nykh sistem [Modeling dynamics of key market indicators of components of hpc systems]//*Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossijskoj akademii nauk* [Proceeding of the ISA RAS]. vol.67, no. 1: pp.12-27.
19. *Varshavsky L.E.* 2018. Ocenka pokazatelej jefektivnosti kompanij s ispol'zovaniem operacionnogo ischislenija [Assessment of economic indicators on the basis of ztransform]// *Teoriya*

- i praktika institucional'nyh preobrazovanij v Rossii/ Erznkjan B.G.(red.) [[Theory and Practice of Institutional reforms in Russia/Collection of scientific works ed. By B.H.Yerznkjan].]. – Moscow, Issue 42. CEMI Russian Academy of Sciences, pp. 29–40.
20. *Varshavsky L.E.* 2012. Jekonomiko-matematicheskij analiz vlijanija vvedenija forvardnogo rynka na pokazateli razvitija AJeS [Economic-mathematical analysis of impact of forward market on indicators of nuclear power stations] //V Sb. Teorija i praktika institucional'nyh preobrazovanij v Rossii pod red. B.A.Erznkjana [Theory and Practice of Institutional reforms in Russia/Collection of scientific works ed. By B.H.Yerznkjan]. Moscow, Issue 24. CEMI Russian Academy of Sciences, pp.121-131.

Varshavsky L.E. D.Sc. (Doctor of Sciences). Institute for Systems Analysis Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova str., Moscow, 119333, Russia; Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences, 47 Nakhimovskij prospect, Moscow 117418, Russia; Chief scientist of the ISA RAS and of the CEMI RAS. Author of 150 articles and monographs. Fields of scientific interests: mathematical modeling of market processes and forecasting market indicators of high technology and capital intensive products, mathematical modeling of investment and innovative strategies of firms, mathematical modeling of macroeconomic processes, methods of control theory, economics of science. E-mail: hodvar@yandex.ru