Динамика макросистем

Бифуркации и хаос в одной модели автокаталитического химического процесса с обратной связью*

Н.А. Магницкий[I,II]

[I] Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия
[II] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе проведен аналитический и численный анализ перехода к хаосу в модели автокаталитического химического процесса с обратной связью, являющейся трехмерной системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены условия рождения предельного цикла в системе в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Численно показано, что переход к хаосу в системе осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ) через субгармонический и начальную стадию гомоклинического каскада бифуркаций устойчивых предельных циклов.

Ключевые слова: *автокаталитические реакции, каскады бифуркаций, аттракторы, хаос.*
DOI: 10.14357/20790279190205

Введение

В работе [1] авторами предложена модель автокаталитического химического процесса с обратной связью, являющаяся развитием широко известной модели Грея-Скотта [2] в случае однородности ее решений. Модель является системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{x} = k + \mu z - xy^2 - x, \\ \sigma \dot{y} = xy^2 + x - y, \\ \delta \dot{z} = y - z \end{gathered} \tag{1}$$

с положительными фиксированными параметрами $k = 10, \sigma = 0.005, \delta = 0.02$ и меняющимся бифуркационным параметром μ. В работе [1] численно показано, что при росте значений параметра $\mu \geq 0.1$ система уравнений (1) имеет каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов и затем хаотическую динамику при $\mu = 0.153$, перемежающуюся одним окном периодичности цикла периода пять при $\mu = 0.155$ и цикла с удвоенным периодом десять. Затем численно показано, что в системе (1) реализуется обратное дерево Фейгенбаума вплоть до рождения устойчивого цикла периода один. Но, так как устойчивые циклы каскада бифуркаций Фейгенбаума являются регулярными аттракторами, то проведенный в работе [1] численный анализ не позволяет ответить на вопрос о природе хаотической динамики, найденной в системе (1) авторами работы [1].

Решению поставленной задачи посвящена настоящая работа, где проведен аналитический и численный анализ перехода к хаосу в системе (1). Доказано, что при определенных значениях параметров системы переход к хаосу в ней происходит в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шар-

* Работа частично поддержана грантами РФФИ № 17-07-00116а и 18-029-10008мк.

ковского-Магницкого [3-7] через каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых циклов, затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского и затем через начальную стадию гомоклинического каскада бифуркаций Магницкого.

1. Область диссипативности и особые точки системы

Исследуем область диссипативности системы (1). Вычислим:

$$div\, F(x,y,z) =$$
$$= \partial F_1/\partial x + \partial F_2/\partial y + \partial F_3/\partial z =$$
$$= -y^2 - 1 + (2xy-1)/\sigma - 1/\delta,$$

где $F_i, i=1,2,3$ – правые части уравнений системы. Найдем особые точки $O=(x_*, y_*, z_*)$ системы (1), приравняв к нулю правые части ее уравнений:

$$y = z,\ \ xy^2 = y - x,\ \ xy^2 = k + \mu\, y - x.$$

Получим, что

$$y_* = k/(1-\mu) = z_*,\ x_* = k(1-\mu)/(k^2+(1-\mu)^2),$$
$$x_* y_* = k^2/(k^2+(1-\mu)^2) \le 1.$$

Тогда

$$div\, F(x_*, y_*, z_*) \le -y_*^2 + 1/\sigma - 1/\delta < 0$$

при $\sigma > 0,\ \delta > 0,\ 1/\sigma - 1/\delta < k^2/(1-\mu)^2$. Следовательно, при таком соотношении параметров система (1) диссипативна в окрестности особой точки O.

2. Исследование устойчивости и вида бифуркации особой точки

Исследуем устойчивость особой точки O системы (1). Матрица линеаризации правой части системы в особой точке имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} -y_*^2-1 & , & -2x_*y_* & , & \mu \\ (y_*^2+1)/\sigma & , & (2x_*y_*-1)/\sigma, & & 0 \\ 0 & , & 1/\delta & , & -1/\delta \end{pmatrix},$$

а ее характеристическим уравнением является уравнение:

$$\lambda^3 + [y_*^2 + 1 - (2x_*y_* - 1)/\sigma + 1/\delta]\lambda^2 +$$
$$+[(y_*^2+1)(1/\sigma+1/\delta) - (2x_*y_*-1)/\sigma\delta\,]\lambda +$$
$$+(1-\mu)(y_*^2+1)/\sigma\delta = 0.$$

Рассмотрим систему (1) при фиксированных значениях параметров σ = 0.00495, δ = 0.014, μ = 0.16, при которых уравнение (1) имеет хаотическую динамику при k = 10.07 и цикл периода пять при k = 10.057. Параметр k выберем в качестве бифуркационного параметра.

Теорема 1. Особая точка O системы (1) асимптотически устойчива при $k > k_* \approx 11.54$. При $k < k_*$ особая точка O становится неустойчивой, и из нее в результате бифуркации Андронова-Хопфа мягко рождается устойчивый предельный цикл.

Доказательство. Перепишем характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^3 + a_1(k)\,\lambda^2 + a_2(k)\lambda + a_3(k) = 0,$$

где

$$a_1(k) = \frac{k^4 - 90.73k^2 + 136.64}{0.7056\ (k^2+0.7056)};$$

$$a_2(k) = \frac{387.54k^4 - 13883.12k^2 + 10374.76}{(k^2+0.7056)};$$

$$a_3(k) = 17178.59k^2 + 12121.21$$

В силу критерия Рауса-Гурвица особая точка O асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$a_1(k)>0,\ a_2(k)>0,\ a_3(k)>0,\ a_1(k)a_2(k)>a_3(k).$$

Заметим, что $a_1(k)>0$ при $k^2 > 89.198$, $a_2(k)>0$ при $k^2 > 35.06$, $a_3(k)>0$, а $a_1(k)a_2(k) > a_3(k)$ при

$$k^8 - 157.8323k^6 + 3347.6333k^4 - 7370.6872k^2 + 3646.9737 > 0.$$

Находя численно корни последнего многочлена четвертой степени относительно k^2, получим, что неравенство выполнено при $k^2 > 133.09$. Таким образом, особая точка O системы (1) асимптотически устойчива при $k^2 > 133.09$ или при $k > k_* \approx 11.54$. Следовательно, при $k < k_*$ особая точка O становится неустойчивой и $a_1(k)a_2(k) < a_3(k)$. В точке бифуркации $k = k_*$ имеем $a_1(k_*)a_2(k_*) = a_3(k_*)$. Покажем, что это условие означает мягкое рождение предельного цикла из особой точки O в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Действительно, найдем значение k_*, при котором корни характеристического уравнения имеют вид: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = i\omega$, $\lambda_3 = -i\omega$, что является условием наличия в точке k_* бифуркации Андронова-Хопфа. При таком значении k_* по теореме Виета имеют место равенства:

$$\lambda_1(i\omega)(-i\omega) = \lambda_1\omega^2 = -a_3(k_*),$$
$$\lambda_1(i\omega) + \lambda_1(-i\omega) + \omega^2 = \omega^2 = a_2(k_*),$$
$$\lambda_1 + i\omega - i\omega = \lambda_1 = -a_1(k_*).$$

Подставляя из второго и третьего равенств выражения для λ_1 и ω^2 в первое равенство, получим, что $a_1(k_*)a_2(k_*) = a_3(k_*)$, то есть именно при таком значении k_* в системе уравнений (1) происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Теорема доказана.

Из Теоремы 1 следует, что наибольший интерес представляет изучение возможных каскадов бифуркаций при $k < k_*$ устойчивого предельного цикла, рожденного из особой точки O при $k = k_*$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Именно в этом случае в системе (1) возможно существование всех трех каскадов бифуркаций устойчивых предельных циклов и бесконечного числа хаотических сингулярных аттракторов в соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого.

Исследование следующих бифуркаций при уменьшении значений бифуркационного параметра $k < k_*$ аналитическими методами, начиная с бифуркации удвоения периода родившегося предельного цикла, является чрезвычайно сложной задачей. Для этого необходимо найти аналитически мультипликаторы цикла, что возможно в весьма редких случаях, и определить такое значение параметра k, при котором все три мультипликатора являются вещественными числами, причем один из них равен +1, второй -1, а третий лежит в интервале (-1,0). Поэтому, дальнейшее исследование усложнения динамики решений системы (1) проведем численными методами.

3. Сценарий перехода к хаосу

Проведем численное исследование системы (1) при фиксированных значениях параметров $\sigma = 0.00495, \delta = 0.014, \mu = 0.16$ и уменьшении значений бифуркационного параметра $k < k_* \approx 11.54$. При $k \in (10.853, k_*)$ система (1) имеет устойчивый (асимптотически орбитально устойчивый) предельный цикл, из которого при значении $k \approx 10.853$ рождается устойчивый предельный цикл удвоенного периода. При дальнейшем уменьшении значений параметра k в системе (1) наблюдается каскад Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода циклов. Устойчивый цикл периода 4 рождается при $k \approx 10.1114$ (рис.1,а), цикл периода 8 рождается при $k \approx 10.0985$, цикл периода 16 рождается при $k \approx 10.0954$ т.д. При $k \approx 10.0945$ в системе (1) существует первый самый простой сингулярный (хаотический) аттрактор – аттрактор Фейгенбаума – непериодическая траектория, являющаяся пределом последовательности циклов из каскада Фейгенбаума (рис.1,б).

При дальнейшем уменьшении значений параметра k обнаруживается последовательность устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, цикл периода 12 субгармонического каскада обнаруживается при $k \approx 10.093$, периода 14 – при $k \approx 10.091$, цикл периода 10 обнаруживается при $k \approx 10.0897$, цикл периода шесть – при $k \approx 10.086$ (рис. 1,в), цикл периода семь – при $k \approx 10.0658$, цикл периода пять – при $k \approx 10.057$ (рис. 2,б) и, наконец, цикл периода три, завершающий субгармонический каскад бифуркаций Шарковского, обнаруживается при $k \approx 10.03$ (рис. 2,в). На рис. 2,а изображен один из сингулярных субгармонических аттракторов системы (1), найденный при $k \approx 10.07$.

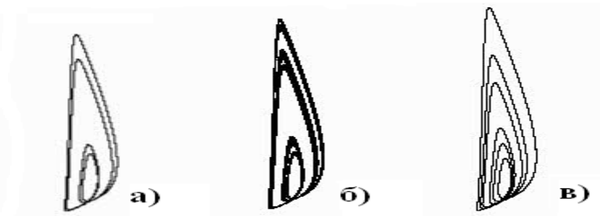

Рис. 1. Проекции на плоскость (z, y) устойчивого цикла периода 4 субгармонического каскада бифуркаций при $k \approx 10.105$ (а), аттрактора Фейгенбаума при $k \approx 10.0945$ (б) и цикла периода 6 при $k \approx 10.086$ (в)

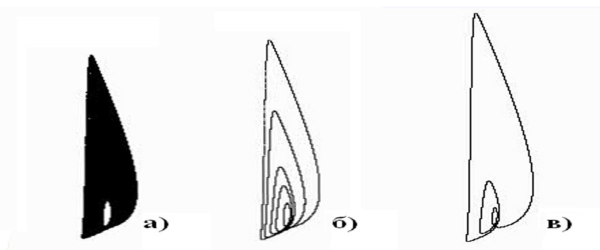

Рис. 2. Проекции на плоскость (z, y) одного из субгармонических сингулярных аттракторов при $k \approx 10.07$ (а), устойчивого цикла периода 5 субгармонического каскада бифуркаций при $k \approx 10.057$ (б) и устойчивого цикла периода 3 при $k \approx 10.03$ (в)

Как известно (см. [4]), последний цикл субгармонического каскада бифуркаций – цикл периода три является третьим циклом гомоклинического каскада, последовательность циклов которого должна сходиться к петле сепаратрисы седло-фокуса особой точки O, однако, при данном наборе значений параметров системы в ней не существует не только петля сепаратрисы, но и циклы гомоклинического каскада, начиная с цикла C_4.

Таким образом, численно установлено, что в системе (1) при изменении значений параметра

k реализуется каскад бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода устойчивых предельных циклов, полный субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского и неполный гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого. Некоторые циклы субгармонического каскада бифуркаций и сингулярные в смысле теории ФШМ аттракторы изображены на рис. 1,2.

Заключение

В работе проведен аналитический и численный анализ системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся моделью автокаталитического химического процесса с обратной связью. Найдены условия мягкого рождения предельного цикла в системе в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Численно показано, что переход к хаосу в системе осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого через субгармонический и начальную стадию гомоклинического каскада бифуркаций устойчивых предельных циклов. Доказано, что нерегулярными (хаотическими) аттракторами системы являются исключительно сингулярные в смысле теории ФШМ-аттракторы.

Литература

1. *Peng B., Scott S. K., Showalter K.* Period Doubling and Chaos in a Three-Variable Autocatalator. J. Phys. Chem. 1990, 94. P.5243-5246.
2. *Gray P., Scott S. K.* Autocatalytic Reactions in the Isothermal Continuous Stirred Tank Reactor. Chemical Engineering Science, 1984, 39 (6). P. 1087-1097.
3. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics. Singapore: World Scientific, 2006. 363 P.
4. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд, 2011. 320 С.
5. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. INTECH, 2012. P. 133-174.
6. *Evstigneev N. M.,Magnitskii N.A.* Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in Turbulence. INTECH, 2017. P.29-59.
7. *Магницкий Н.А*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. INTECH, 2018, P. 197-215.

References

Магницкий Николай Александрович Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук. Доктор физико-математических наук, профессор. Количество печатных работ: более 250. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети. E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

Bifurcations and chaos in one model of an autocatalytic chemical process with feedback

N.A. Magnitskii [I,II]

[I] Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences

[II] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The paper presents an analytical and numerical analysis of the transition to chaos in the model of an autocatalytic chemical process with feedback, which is a three-dimensional system of nonlinear ordinary differential equations. The conditions for the birth of a limit cycle in the system as a result of Andronov-Hopf bifurcation are found. It is shown numerically that the transition to chaos in the system is carried out in full accordance with the universal bifurcation theory of Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii (FShM) through the subharmonic and initial stage of the homoclinic cascades of bifurcations of stable limit cycles.

Keywords: *autocatalytic reactions, cascades of bifurcations, attractors, chaos.*

DOI: 10.14357/20790279190205

1. *Peng B., Scott S. K., Showalter K.* Period Doubling and Chaos in a Three-Variable Autocatalator. J. Phys. Chem. 1990, 94. P.5243-5246.
2. *Gray P., Scott S. K.* Autocatalytic Reactions in the Isothermal Continuous Stirred Tank Reactor. Chemical Engineering Science, 1984, 39 (6). P. 1087-1097.
3. *Magnitskii N.A., Sidorov S.V.* New methods for chaotic dynamics (monograph). Singapore: World Scientific, 2006. 363 p.
4. *Magnitskii N.A.* Teoriya dinamicheskogo khaosa [Theory of dynamical chaos]. M.: Lenand, 2011. 320s.
5. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. INTECH, 2012.P.133-174.
6. *Evstigneev N. M.,Magnitskii N.A*. Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in Turbulence. INTECH,2017.P.29-59.
7. *Magnitskii N.A.* Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. INTECH, 2018, P. 197-215.

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova Str., Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks. E-mail : nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru1.