

# Нелинейные динамические системы

## Численное решение обратных задач для уравнения квазистационарных электромагнитных волн в анизотропных неметаллических средах\*

С.Н. ШЕРГИН<sup>1</sup>, С.Г. ПЯТКОВ<sup>1</sup>, Е.И. САФОНОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», г. Ханты-Мансийск, Россия

**Аннотация.** В работе рассматриваются обратные задачи эволюционного типа для математических моделей квазистационарных электромагнитных волн. В модели предполагается, что длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями. Вводя электрический и магнитный потенциал получаем эллиптическое уравнение второго порядка по пространственным переменным, содержащее интегральные слагаемые типа свертки по времени. После дифференцирования по времени задача сводится к уравнению составного типа с интегральным слагаемым. Определению вместе с решением подлежат неизвестные коэффициенты в интегральном операторе. Дополнительно к крайевым условиям задаются условия переопределения в виде заданного набора функционалов от решения, которые могут иметь произвольный вид (интегралы от решения с весом, значения решения в отдельных точках, и пр.). Мы строим численный алгоритм решения этой обратной задачи и приводим результаты численных экспериментов. Алгоритм основан на полученных ранее теоретических результатах, где задача сводилась к некоторому уравнению Вольтерра и доказывалась сходимости метода последовательных приближений. Соответствующий оператор являлся сжимающим на малом промежутке времени. В данной работе в качестве метода используется метод последовательных приближений и метод конечных элементов.

**Ключевые слова:** уравнение Соболевского типа, эллиптическое уравнение, уравнения с памятью, обратная задача, крайевая задача, численное решение, метод конечных элементов.

**DOI:** 10.14357/20790279190405

### Введение

Мы будем рассматривать математические модели возникающие при описании процессов распространения электромагнитных волн в анизотропных средах [1] и при рассмотрении нестационарных внутренних волн в несжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости [2].

Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропных средах определяются спецификой материальных уравнений. Если длина волны мала по сравнению с пространственными неоднородностями, то эти уравнения можно записать в виде, учитывающем только временную дисперсию и после введения потенциалов электрического и магнитного поля  $E = -\nabla\varphi(x, t)$ ,  $H = -\nabla\psi(x, t)$  и некоторых простейших преобразований и предположений, мы приходим к уравнениям (см. [1], стр. 28)

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00620, № 18-41-860003 p\_a).

$$\sum_{i=1}^3 (1 + 4\pi\kappa_i^*)\varphi_{x_i x_i} = -4\pi\rho + F_d, \sum_{i=1}^3 (1 + 4\pi\kappa_i^*)\psi_{x_i x_i} = F_b \quad (1)$$

где  $\kappa_i$  – диагональные элементы тензоров электрической и магнитной восприимчивости и  $\kappa_i^* \varphi(x, t) = \int_0^t \kappa_i(t - \tau)\varphi(x, \tau) d\tau$ . В данной работе мы рассмотрим обратные задачи об определении коэффициентов  $k_i$  для общих уравнений вида

$$L_0 u + \sum_{i=1}^m \kappa_i * L_i(x, t)u = f, \quad (2)$$

где  $L_k u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x, t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i^k(x, t) + a_0^k(x, t)u$ ,  $(x, t) \in Q = G \times (0, T)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Уравнение (2) дополняется условиями переопределения

$$\Psi_j(u)(t) = \psi_j(t), \quad (3)$$

где  $\Psi_i$  – некоторые функционалы, условия на которые мы приведем ниже, и краевыми условиями

$$Bu|_S = g(x, t), \quad S = \partial G \times (0, T), \quad (4)$$

где  $Bu = u$  или  $Bu = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x, t)u_{x_i} + \sigma(x, t)u$ . Близкие к (2) уравнения и системы возникают в теории упругости (материалы с памятью) [3, 4], физике (модели фазового поля, теплоперенос) [5,6], и во многих других областях. Наиболее полно рассмотрен случай параболического (см. [3,4,7-11]) или гиперболического (см. [6, 12]) оператора  $L_0$ , причем рассмотрен и самый общий случай, когда  $L_0 = \partial_t - A$  или  $L_0 = \partial_t^2 - A$ , где оператор  $A$  уже является не обязательно дифференциальным, а является генератором аналитической полугруппы (см., например, [8]-[11]). Случай псевдопараболического оператора  $L_0$  также рассматривался (см. [13]). В случае  $L_0 = \partial_t$ , мы приходим к моделям типа Гуртина-Пипкина, которым посвящено значительное количество работ (см. [14, 15]). Эллиптический случай, по-видимому, не рассматривался, за исключением одной модельной ситуации (см. [16]), где  $n = 1$ . Обратные задачи для псевдопараболических уравнений рассматривались, например, в [17]-[20]. В данной работе мы описываем численный алгоритм решения задачи (1)-(4) и результаты численных экспериментов.

### 1. Определения и вспомогательные результаты

Мы будем использовать некоторые результаты из работы [21]. Запишем условия на данные задачи. Оператор  $L_0$  предполагается эллиптическим, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}^0 \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x, t) \in \bar{Q},$$

где  $\delta_0$  – положительная постоянная. Далее мы предполагаем, что

$$a_{ij}^0 \in C(\bar{Q}), \quad a_i^0, a_0^0 \in C([0, T]; L_p(G)), \quad a_{ij}^k \in L_\infty(Q), \\ a_{ij\tau}^0, a_{ij\tau}^k \in L_p(0, T; L_\infty(G)), \quad a_i^k, a_0^k \in L_\infty(0, T; L_p(G)), \quad a_{0t}^k, a_{it}^k \in L_p(Q) \\ (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m), \quad \gamma_i, \gamma_{it}, \sigma, \sigma_t \in C^1(\bar{S}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \gamma_i n_i \right| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall (x, t) \in S, \quad p > n,$$

и выполнены условия согласования

$$Bu_0(x) = g(x, 0), \quad (6)$$

$$\Psi_j(u_0(x)) = \psi_j(0) \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Пусть  $B$  – матрица с элементами  $b_{ij} = \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x, 0)u_0(x))$ . Мы предположим, что существует  $\delta_2 > 0$  такая, что

$$|\det B| \geq \delta_2 \quad \forall t \in [0, T], \quad (8)$$

где  $L_0^{-1} f$  есть решение  $v_0$  задачи:  $L_0 v_0 = f$ ,  $Bv_0|_\Gamma = 0$ . Мы рассматриваем задачу (2)-(4) считая, что функционалы  $\Psi_j$  удовлетворяют условиям

$$\Psi_j \in L(W_p^2(G), \mathbb{R}), \quad \Psi_j(u_0) = \psi_j(0), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

и, таким образом,  $\Psi_j \in (W_p^2(G))^*$ . Кроме того будем считать, что  $a_0^0 \leq 0$  п.в. в случае граничных данных Дирихле и  $a_0^0 < -\delta_1 < 0$  ( $\delta_1 = \text{constant} > 0$ ) п.в. в случае условий с косой производной.

**Теорема 1.** Пусть  $f, f_t \in L_p(Q)$ , выполнены условия (5)-(9),  $g \in C([0, T]; W_p^{2^0}(\Gamma))$ ,  $g_t \in L_p(0, T; W_p^{s_0}(\Gamma))$  ( $p > n$ ),  $\psi_j \in W_p^1(0, T)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Тогда существует единственное решение задачи (2)-(4) такое, что  $u_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$ ,  $u \in C([0, T]; W_p^2(G))$ ,  $k_i \in L_p(0, T)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Доказательство этой теоремы достаточно конструктивно и мы будем использовать рассуждения из него для построения численного алгоритма. Доказательство разрешимости сводится к исследованию полученного интегрального уравнения, оператор в котором оказывается сжимающим. Для простоты мы рассмотрим случай условия граничных Дирихле, т.е.  $Bu = u$  в (4). Пусть  $\Phi$  есть решение задачи

$$L_0(t)\Phi = f(x, t), \quad \Phi|_S = g(x, t), \quad (10)$$

такое, что  $\Phi(x, t) \in C([0, T]; W_p^2(G))$ ,

$\Phi_t \in L_p(0, T; W_p^2(G))$ ,  $\Phi|_S = g(x, t)$  и  $\Phi(x, 0) = u_0(x)$ , где  $u_0$  есть решение задачи (10) при  $t = 0$ . Сделаем замену  $u = v + \Phi$ . Дифференцируя уравнение (2) по  $t$ , придем к равенству

$$(L_0 v)_t + \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau + \sum_{j=1}^m k_j(t) L_j(x, 0)u_0(x) = 0, \quad (11)$$

$$Bv|_\Gamma = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad (12)$$

$$\Psi_j(v) = \tilde{\psi}_j = \psi_j - \Psi_j(\Phi), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Преобразуя это уравнение получим

$$L_0 v(x, t) = - \int_0^t \int_0^\xi \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, \xi - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, \xi - \tau)) d\tau d\xi - \sum_{j=1}^m \int_0^t k_j(\xi) d\xi L_j(x, 0) u_0(x) = G(v) \tag{14}$$

или

$$v(x, t) = L_0^{-1} G(v). \tag{15}$$

С другой стороны имеем

$$v_t(x, t) + L_0^{-1} L_{0t} v + L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau = - \sum_{j=1}^m \int_0^t k_j(\tau) L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x) d\tau, \tag{16}$$

где  $L_0^{-1} f$  сопоставляет функции  $f$  решение задачи (10) с  $g = 0$ . Применяя функционал  $\Psi_i$  к (16), получим, что

$$\tilde{\psi}_{it} + \Psi_i(L_0^{-1} L_{0t} v) + \Psi_i(L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) (L_j v)_t(x, t - \tau) d\tau) = - \sum_{j=1}^m \int_0^t k_j(\tau) \Psi_i(L_0^{-1} L_j(x, 0) u_0(x) - L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) (L_j \Phi)_t(x, t - \tau) d\tau). \tag{17}$$

В силу условия (8) из этого равенства вытекает, что

$$\vec{k} = B^{-1} \vec{F} - B^{-1} A(\vec{k}), \tag{18}$$

где  $\vec{F}$  имеет координаты  $F_i = -\tilde{\psi}_{it} \in W_p^1(0, T)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) и оператор  $A(\vec{k})$  координаты

$$A_i(\vec{k}) = \Psi_i(L_0^{-1} L_{0t} v + L_0^{-1} \int_0^t \sum_{j=1}^m k_j(\tau) ((L_j v)_t(x, t - \tau) + (L_j \Phi)_t(x, t - \tau)) d\tau),$$

где  $v = v(\vec{k})$  решение задачи (11), (12). Получили систему для нахождения вектор-функции  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ . Несмотря на нелинейные слагаемые, уравнение разрешимо глобально по времени. Оператор входящий в эту систему есть оператор Вольтерра и на малых промежутках времени он является сжимающим. Это интегральное уравнение мы решаем с помощью метода последовательных приближений, используя дополнительно метод конечных элементов.

## 2. Описание алгоритма

Приведем описание численного алгоритма в случае краевых условий Дирихле при  $m = 2$ . Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) u_{x_m x_m}(t - s) ds = f(x, t), \tag{19}$$

в области

$Q = G \times (0, T)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, T]$ . Уравнение (19) дополняется граничными условиями

$$u|_S = g(x, t), \quad u(x, 0)|_\Gamma = g(x, 0). \tag{20}$$

Функция  $p_m(s)$  определяется на основе дополнительных измерений вида

$$u(x_i, t) = \psi(t) \quad i = 1, 2 \tag{21}$$

Алгоритм основывается на преобразовании задачи (19) в псевдопараболическую. Численный алгоритм можно разбить на три части

1. Поиск приближения начальных данных  $u_0$ .

Начальные условия при  $t = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$  определяются как решение задачи

$$\Delta u_0 = f(x, 0), \quad u_0|_\Gamma = g(x, 0).$$

Функцию  $u_0$  ищем в виде

$$u_0(x) = \tilde{g} + v_0,$$

где  $\tilde{g}(x)$  – некоторая функция такая, что

$$\tilde{g}(x)|_\Gamma = g(x, 0),$$

т.е.  $\tilde{g}(x)$  есть продолжение функции  $g(x, 0)$  внутрь области. Функция  $v_0$  есть решение задачи

$$\Delta v_0 = f(x, 0) - \Delta \tilde{g}(x), \quad v_0|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Строим приближение  $v_0$  в виде

$$v_0 = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(x), \tag{23}$$

где  $\varphi_i(x)$  – кусочно-линейные базисные функции в методе конечных элементов, равные 0 на  $\Gamma$ , построенные для некоторой фиксированной триангуляции области.

Числа  $C_i$  находятся из системы

$$- \sum_{i=1}^N C_i (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = (f(x, 0), \varphi_i) + (\nabla \tilde{g}(x), \nabla \varphi_i), \tag{24}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  – количество узлов в области.

2. Поиск решения  $\Phi$  вспомогательной задачи.

Продифференцируем уравнение (19) по  $t$  и сделаем замену  $u_t = \Phi + v$ . Решим вспомогательную задачу

$$\Delta \Phi = f_t, \quad \Phi|_S = g_t(x, t).$$

Приближение функции  $\Phi$  можно найти как сумму

$$\Phi = \tilde{g} + \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i,$$

где  $\tilde{g}$  - продолжение функции  $g_t$  внутрь области.

3. Поиск решения задачи  $v$ .

$$\Delta v + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) v_{x_m x_m}(t - s) ds + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) \Phi_{x_m x_m}(t - s) ds + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) u_{0x_m x_m}(t - s) ds = 0. \tag{25}$$

Скалярно умножая уравнение (25) на  $\varphi_i$ , получим ( $i = 1, 2, \dots, N$ )

$$(\nabla v, \nabla \varphi) + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s)(v_{x_m}, \varphi_{x_m}) ds + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s)(\Phi_{x_m}, \varphi_{x_m}) ds + \sum_{m=1}^2 p_m(s)(u_{0x_m}, \varphi_{x_m}) ds = 0. \quad (26)$$

Ищем приближение функции  $v$  в виде  $v = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i$ . Тогда уравнение (26) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^N C_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s) \sum_{j=1}^N C_j (\varphi_{jx_m}, \varphi_{ix_m})(t-s) ds + \sum_{m=1}^2 \int_0^t p_m(s)(\Phi_{x_m}, \varphi_{ix_m})(t-s) ds + \sum_{m=1}^2 p_m(t)(u_{0x_m}, \varphi_{ix_m}) = 0, \quad (27)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N.$

Введем величины

$$K: k_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i),$$

$$B_m: \beta_{ij}^m = (\varphi_{ix_m}, \varphi_{jx_m}),$$

$$\vec{F}_0_m: F_{0mi} = (u_{0x_m}, \varphi_{ix_m}),$$

$$\vec{F}_m: F_{mi} = (\Phi_{x_m}, \varphi_{ix_m}).$$

Тогда уравнение (27) переписывается в виде

$$K \vec{C} + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) B_m \vec{C}(t-s) ds + \int_0^t \sum_{m=1}^2 p_m(s) \vec{F}_m(t-s) ds + \sum_{m=1}^2 p_m(s) \vec{F}_0_m = 0. \quad (28)$$

### 3. Численная реализация алгоритма

Необходимо определить из уравнения (19) функции  $u(x_1, x_2, t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ .

Алгоритм основан на методе конечных элементов (МКЭ). Задаём триангуляцию области  $G$ , узлы триангуляционной сетки  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$  и соответствующие базисные кусочно-линейные функции  $\{\varphi_i(x)\}$ . Без ограничения общности считаем, что точки замера  $x_j$  являются узлами сетки. Тогда найдутся номера  $j_1, j_2$  такие, что  $x_k = \tilde{x}_{j_k}$ ,  $k = 1, 2$ .

1. Поиск приближения  $u_0$ .

Определим матрицу жесткости  $K$  состоящую из элементов  $K_{ji} = \int_G (\nabla \varphi_i \nabla \varphi_j) dx$ , а так же вектора  $\vec{F}(0) = \int_G f(0) \varphi_i dx$  и  $\vec{g} = \int_G \Delta \tilde{g} \varphi_i dx$ . Приближённое решение (22) ищем в виде  $v_k = \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(x)$ . Вектор-функция  $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  записывается в виде

$$\vec{C} = -K^{-1}(\vec{F}0 - \vec{g}).$$

После определения приближения функции  $v_0$  можно найти начальное значение  $u_0$

$$u_0^i = C_i + \tilde{g}_i$$

где  $\tilde{g}_i$  значение функции  $\tilde{g}$  в узле сетки с индексом  $i = 1, 2, \dots, m$ .

2. Поиск решения вспомогательной задачи  $\Phi$ .

Ищем приближение функции  $\Phi$  в виде  $\Phi^m = \sum_{i=1}^m c_i(t) \varphi_i(x) + \tilde{g}$ . Вектор функция  $\vec{c}(t)$  определяем следующим образом. Найдем вектора  $\vec{F}_t, \vec{g}$  с координатами  $\int_G f_t \varphi_i dx$  и  $\int_G \Delta \tilde{g} \varphi_i dx$ . Здесь  $\tilde{g}$  – продолжение функции  $g_t$  внутрь области. Тогда

$$\vec{c}(t) = -K^{-1}(\vec{F}_t - \vec{g}),$$

3. Поиск решения вспомогательной задачи  $v$ .

Заменим интегралы в (28) на суммы

$$K C_l + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} B_m C_{l-j} + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} F_m ((l-j)\tau) + \sum_{m=1}^2 p_m \vec{F}_0_m = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

где  $\tau$  – шаг по времени и таким образом промежуток  $[0, T]$  разбивается на промежутки вида  $[(k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Перепишем условия переопределения (21) при условии, что  $v = u_t - \Phi$ :

$$v(y_m, t) = \psi_{mt}(t) - \Phi(y_m, t).$$

Пусть  $y_1 = \tilde{x}_{j_1}$ ,  $y_2 = \tilde{x}_{j_2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \psi_{1t} - \Phi(\tilde{x}_{j_1}, t) &= v(\tilde{x}_{j_1}, t) = C_{j_1}(t), \\ \psi_{2t} - \Phi(\tilde{x}_{j_2}, t) &= v(\tilde{x}_{j_2}, t) = C_{j_2}(t), \\ (C_i)_{j_1} &= \psi_{1t} - \Phi(\tilde{x}_{j_1}, t)|_{t=i\tau}, \\ (C_i)_{j_2} &= \psi_{2t} - \Phi(\tilde{x}_{j_2}, t)|_{t=i\tau}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$

Запишем уравнение (29) в точках переопределения с индексами  $j_k$ ,  $k = 1, 2$ .

$$(C_i)_{j_k} + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} (K^{-1} B_m C_{l-j})_{j_k} + \tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^l p_{m,j} (K^{-1} F_m ((l-j)\tau))_{j_k} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} (K^{-1} \vec{F}_0_m)_{j_k} = 0, \quad (31)$$

Определим  $p_{m,0}$ , подставив в (31)  $l = 0$ :

$$(C_0)_{j_k} = (\psi_{kt}(0) - \Phi(x_{j_k}, 0)) = - \sum_{m=1}^2 p_{m,0} (K^{-1} \vec{F}_0_m)_{j_k}$$

Отсюда найдем  $p_{m,0} = p_m(0)$  ( $m = 1, 2$ ) обращая соответствующую матрицу с элементами  $f_{km} = (K^{-1} \vec{F}_0_m)_{j_k}$ . Далее вектор  $C_0$  будет найден как

$$C_0 = - \sum_{m=1}^2 p_{m,0} K^{-1} \vec{F}_0_m.$$

Перепишем формулу(29) как

$$C_l + K^{-1}(\tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} B_m C_{l-j} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} B_m C_0 + \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} F_m((l-j)\tau) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_m(0)) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} \vec{F}_0 = 0. \tag{32}$$

Для того, чтобы найти вектор  $p_{m,l}$  используем равенство (31) в котором мы берем  $j_k$  координату всех векторов и используем равенство  $(C_l)_{j_k} = (\psi_{kt}(l\tau) - \Phi(x_{j_k}, l\tau))$ . Вектор  $p_{m,l}$  выразим из (31) обращая матрицу с элементами  $f_{kj}$  определенную выше. Тогда вектор  $C_l$  определится из равенства

$$C_l = -K^{-1}(\tau \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} B_m C_{l-j} + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} B_m C_0 + \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{l-1} p_{m,j} F_m((l-j)\tau) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_m(0)) + \sum_{m=1}^2 p_{m,l} F_0. \tag{33}$$

Повторяя рассуждения на каждом временном слое, мы определим вектора  $C_l$  и величины  $p_{m,l}$ .

#### 4. Результаты численных экспериментов

В этом разделе проанализируем результаты численных экспериментов для двух групп входных данных задачи, полученных в результате решения модельных обратных задач в рамках эксперимента на ЭВМ.

Характеристики испытуемой ЭВМ: Процессор: Intel(R) Core(TM) i7-3517U CPU @ 1.90GHz 2.40GHz; ОЗУ: 10,00 ГБ; Тип системы: 64-разрядная операционная система Windows 7 Ultimate.

В результате расчётов определялось приближённое значение решения  $(u, p_1, p_2)$  задачи (19)-(21) в узлах сетки в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . В качестве области возьмём круг единичного радиуса с координатами центра  $(0,0)$ .

Для численного решения задачи будут рассматриваться несколько сеток для описанной области с количеством узлов зависящим от расположения точек наблюдения и количества узлов сетки.

Решение задачи (19)-(21), а так же граничные условия в момент времени  $t = 0$  запишем в виде:  $u(x, t) = (x^2 + 1)(y^2 + 1)(t^2 + 1)$ ,  $p_1(t) = -\sqrt{t + 1}$ ,  $p_2(t) = \ln(t^2 + 1)$ ,  $g(x, 0)|_{\Gamma} = x^2 y^2 + 2$ .

Полученный вектор правой части:

$$f = 1.06t + (2(x^2 + 1)(12atan(t) - 12t + 18t^2 \cdot atan(t) + 3t^3 \cdot \ln(t^2 + 1) - 11t^3))/9 - 2y^2 \cdot (0.66(t + 1)^{3/2} - 0.66) - 1.33 \cdot (t + 1)^{3/2} + 2(t^2 + 1)(x^2 + 1) + 2(t^2 + 1)(y^2 + 1) + 2y^2(0.53t + 0.66t^2 - 0.019(t + 1)^{3/2}(16t + 8t^2 + 8) + 0.15) + 1.33t^2 - 0.038 \cdot (t + 1)^{3/2}(16t + 8t^2 + 8) + 1.638$$

Введем несколько величин:

$\epsilon_p = \max_i |p^m_i(\tau) - p^i_m|$  – ошибка вычислений, использующая среднее арифметическое  $\epsilon_u = \max_{i,j} |u_{i,j} - u(i, j)|$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ . Возьмём за  $\tau_s$  время вычислений в секундах.

Результаты численных экспериментов для шага по времени  $t_s = 0.02$  представлены в таблице 1. В них изменяются положения точек наблюдения, в связи с чем меняется и сетка области.

Табл. 1

Результаты численных экспериментов

No.	$N_x$	$\epsilon_p$	$\epsilon_u$	$\tau_s$
1	229	0,037002	0,046466	4,147049
2	236	0,011253	0,044536	4,184662
3	237	0,015125	0,047002	4,242981
4	236	0,021869	0,04542	4,004972
5	239	0,027241	0,046797	4,036889
6	669	0,048357	0,04537	49,12766
7	693	0,037822	0,044257	52,20402
8	694	0,014884	0,046501	51,6243
9	698	0,015127	0,045502	51,32633
10	689	0,037445	0,049313	48,90397
11	897	0,017754	0,041931	81,42314
12	907	0,012555	0,04202	86,20059
13	911	0,012972	0,042302	90,10167
14	905	0,015084	0,042173	83,36037
15	915	0,008126	0,042166	89,42623
16	2639	0,022252	0,042182	1755,792
17	2735	0,019808	0,041656	1846,957
18	2736	0,014147	0,042299	1801,659
19	2749	0,013294	0,042023	1790,621
20	2710	0,009836	0,043133	1811,33

Как можно заметить увеличение точности вычислений, зависит в первую очередь от однообразия треугольников в триангуляционной сетке и не жёстко связано с их количеством. На рисунке 1 представлены графики исходной и восстановленной функций  $p_1$  и  $p_2$ . Полученные графики, в виду высокой точности вычислений, практически идентичны.

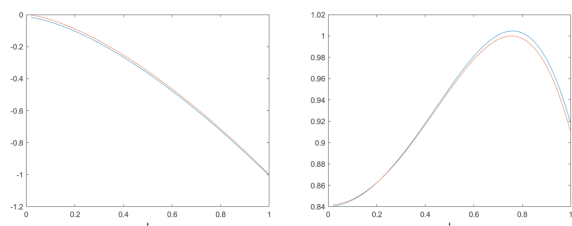


Рис. 1. Графики исходной (красный) и восстановленной (синий) функции

Для следующих нескольких экспериментов увеличим количество временных промежутков в два раза, рассмотрим только результаты для сеток 1-5 и 11-15.



Табл. 2

Результаты численных экспериментов

No.	$N_x$	$\varepsilon_p$	$\varepsilon_u$	$\tau_s$
1	229	0,03007	0,027882	15,77482
2	236	0,01078	0,026787	16,59276
3	237	0,00867	0,028076	16,87762
4	236	0,01492	0,027352	16,27913
5	239	0,02724	0,027731	16,263
6	897	0,01076	0,021724	321,624
7	907	0,00555	0,021355	334,0045
8	911	0,00602	0,022035	339,4294
9	905	0,00807	0,021586	324,4042
10	915	0,00713	0,021937	329,5462

### Заключение

Численный алгоритм основан на методе конечных элементов. Результаты численных экспериментов показывают хорошую точность вычислений. Точность определения параметров  $p_1$ ,  $p_2$  возрастает с уменьшением шага по времени, а так же с увеличением количества узлов, при условии, однородности пространственной сетки. Точность определения решения  $u$  возрастает только с уменьшением шага по времени.

### Литература

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. 2007. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. ФМЛ. 737 с.
2. Габов С.А., Свешников А.Г. 1990. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука. 341 с.
3. Colombo F., Guidetti D. 2005. An Inverse Problem for a Phase-field Model in Sobolev Spaces. Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Basel: Birkhäuser Verlag. Vol. 64, 189–210.
4. Guidetti D. and Lorenzi A. 2007. A mixed type identification problem related to a phase-field model with memory. Osaka J. Math.. Vol. 44. 579–613.
5. Lorenzi A., Paparone I. 1992. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. 87. 105-138.
6. Janno J., Von Wolfersdorf L. 1997. Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol. 20. 291-314.
7. Colombo F., Guidetti D. 2007. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. Vol. 17, No. 4. 537–565
8. Colombo F. 2015. On some methods to solve integro-differential inverse problems of parabolic type. Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. Т. 8, 3. 95-115.
9. Favini A., Lorenzi A. 2004. Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type II. Nonlinear Analysis. Vol. 56, No.6. 879-904.
10. Lorenzi A., Tanabe H. 2006. Inverse and direct problems for nonautonomous degenerate integro-differential equations of parabolic type with Dirichlet boundary conditions. Differential Equations: inverse and Direct Problems. Lecture notes in pure and applied mathematics. Vol. 251. Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group. 197-244.
11. Abaseeva N., Lorenzi A. 2005. Identification problems for nonclassical integro-differential parabolic equation. J. Inv. Ill-Posed Problems. Vol. 13, No. 6, 513–535.
12. Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh. 2015. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain. Mathematical Notes. Vol. 97, No. 6. 867-877.
13. Асанов А., Атаманов Э.Р. 1995. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения. Сиб. матем. журн. Т. 36, 4. 752-762.
14. Avdonin S.A., Ivanov S.A., Wang j. 2016. Inverse Problems for the Heat Equation with Memory. Available at: <https://arxiv.org/abs/1612.02129>
15. Pandolfi L. 2016. Identification of the relaxation kernel in diffusion processes and viscoelasticity with memory via deconvolution. Available at: <https://arxiv.org/abs/1603.04321>.
16. Денисов А.М. 2001. Обратная задача для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения. Дифференц. Уравнения. Т. 37, 10. 1350-1356.
17. Pyatkov S.G., Shergin S.N. 2015. On some mathematical models of filtration theory. Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. Т. 8, 2. 105-116.
18. Lyubanova A.Sh. 2013. Identification of a coefficient in the leading term of a pseudoparabolic equation of filtration, Sibirskii matematicheskii zhurnal. №6. 1315-1330.
19. Lyubanova A.Sh., Tani A. 2011. On inverse

- problems for pseudoparabolic and parabolic equations of filtration. Inverse problems in science and engineering. V. 19, No. 7. 1023-1042.
20. *Кожанов А.И.* 2008. О разрешимости обратных задач восстановления коэффициентов в уравнениях составного типа. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. Т. 8, Вып. 3. 81–99.
21. *Pyatkov S.G., Shergin S.N.* 2018. Inverse problems for mathematical models of quasistationary electromagnetic waves in anisotropic nonmetallic media with dispersion. Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. Т. 11, 1. 44-59.

**Шергин Сергей Николаевич**, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ЮГУ) г. Ханты-Мансийск, Россия. Ведущий программист, преподаватель, аспирант. Количество печатных работ: 6. Область научных интересов: обратные задачи, уравнения соболевского типа. E-mail: ssn@ugrasu.ru

**Пятков Сергей Григорьевич**, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ЮГУ) г. Ханты-Мансийск, Россия. Профессор, доктор физико-математических наук. Количество печатных работ: 60. Область научных интересов: обратные задачи, уравнения соболевского типа. E-mail: s\_pyatkov@ugrasu.ru

**Сафонов Егор Иванович**, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ЮГУ) г. Ханты-Мансийск, Россия. Кандидат физ.-мат. наук, доцент. Количество печатных работ: 12. Область научных интересов: обратные задачи, уравнения соболевского типа. E-mail: dc.gerz.hd@gmail.com

## Numerical solution inverse problems for equation of quasistationary electromagnetic waves in anisotropic nonmetallic media

S.N. Shergin<sup>1</sup>, S.G. Pyatkov<sup>1</sup>, E.I. Safonov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ugra State University, Khanty-Mansyisk, Russian Federation

**Abstract.** We consider inverse problems of evolution type for mathematical models of quasistationary electromagnetic waves. It is assumed in the model that the wave length is small as compared with space inhomogeneities. In this case the electric and magnetic potential satisfy elliptic equations of second order in the space variables comprising integral summands of convolution type in time. After differentiation with respect to time the equation is reduced to a composite type equation with an integral summand. We look for a solution to this equation and unknown coefficients in the integral operator. The boundary conditions are supplemented with the overdetermination conditions which are the values of some functionals of a solution (integrals of a solution with weight, the values of a solution at separate points, etc.). We construct a numerical algorithm for solving this inverse problem and present the results of numerical experiments. The algorithm is based on previously obtained theoretical results, where the problem is reduced to some Volterra equation and the convergence of the method of successive approximations is proven. The corresponding operator in this equation is contractive whenever the time interval is sufficiently small. We use the method of successive approximations and the finite element method.

**Keywords:** *sobolev-type equation, elliptic equation, equation with memory, ; inverse problem, boundary value problem, numerical solution, finite element method.*

**DOI:** 10.14357/20790279190405

## References

1. *Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner U.D.* 2007. Linear and Non-Linear Sobolev Equations. Moscow, Fizmatlit. 737 p.
2. *Gabov S.A., Sveshnikov A.G.* 1990. Linear Problems of the Theory of Nonstationary Interior Waves. Moscow. Nauka. 341 p.
3. *Colombo F., Guidetti D.* 2005. An Inverse Problem for a Phase-field Model in Sobolev Spaces. Nonlinear Elliptic and Parabolic Problems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Basel: Birkhäuser Verlag. Vol. 64, 189–210.
4. *Guidetti D., and Lorenzi A.* 2007. A mixed type identification problem related to a phase-field model with memory. Osaka J. Math.. Vol. 44. 579–613.
5. *Lorenzi A., Paparone I.* 1992. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. 87. 105-138.
6. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* 1997. Inverse Problems for Identification of Memory Kernels in Viscoelasticity. Mathematical Methods in the Applied Sciences. Vol. 20. 291-314.
7. *Colombo F., Guidetti D.* 2007. A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev spaces. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. Vol. 17, No. 4. 537–565
8. *Colombo F.* 2015. On some methods to solve integro-differential inverse problems of parabolic type. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. V. 8, 3. 95-115.
9. *Favini A., Lorenzi A.* 2004. Identification problems for singular integro-differential equations of parabolic type II. Nonlinear Analysis. Vol. 56, No.6. 879-904.
10. *Lorenzi A., Tanabe H.* 2006. Inverse and direct problems for nonautonomous degenerate integro-differential equations of parabolic type with Dirichlet boundary conditions. Differential Equations: inverse and Direct Problems. Lecture notes in pure and applied mathematics. Vol. 251. Boca Raton, London, New York: Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group. 197-244.
11. *Abaseeva N., Lorenzi A.* 2005. Identification problems for nonclassical integro-differential parabolic equation. J. Inv. Ill-Posed Problems. Vol. 13, No. 6, 513–535.
12. *Durdiev D.K., Safarov Zh.Sh.* 2015. Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain. Mathematical Notes. Vol. 97, No. 6. 867-877.
13. *Asanov A., Atamanov E.R.* 1995. An inverse problem for a pseudoparabolic integro-differential operator equation. Siberian Mathematical Journal. V. 36, 4. 752-762.
14. *Avdonin S.A., Ivanov S.A., Wang J.* 2016. Inverse Problems for the Heat Equation with Memory. Available at: <https://arxiv.org/abs/1612.02129>
15. *Pandolfi L.* 2016. Identification of the relaxation kernel in diffusion processes and viscoelasticity with memory via deconvolution. Available at: <https://arxiv.org/abs/1603.04321>.
16. *Denisov A.M.* 2001. An inverse problem for a quasilinear integro-differential equation. Differential Equations. V. 37, 10. 1350-1356.
17. *Pyatkov S.G., Shergin S.N.* 2015. On some mathematical models of filtration theory. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. V. 8, 2. 105-116.
18. *Lyubanova A.Sh.* 2013. Identification of a coefficient in the leading term of a pseudoparabolic equation of filtration, Sibirskii matematicheskii zhurnal. №6. 1315-1330.
19. *Lyubanova A.Sh., Tani A.* 2011. On inverse problems for pseudoparabolic and parabolic equations of filtration. Inverse problems in science and engineering. V. 19, No. 7. 1023-1042.
20. *Kozhanov A.I.* 2008. Solvability of some inverse problems of determining coefficients of mixed-type equations. Bulletin NSU. Series: math., mech., inform. V. 8, No. 3. 81–99.
21. *Pyatkov S.G., Shergin S.N.* 2018. Inverse problems for mathematical models of quasistationary electromagnetic waves in anisotropic nonmetallic media with dispersion. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. V. 11, 1. 44-59.

**S.N. Shergin**, Postgraduate, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Yugra State University», 16 Chehova str., Khanty-Mansyisk, 628012, Russia, e-mail: [ssn@ugrasu.ru](mailto:ssn@ugrasu.ru).

**S.G. Pyatkov**, Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Yugra State University», 16 Chehova str., Khanty-Mansyisk, 628012, Russia, e-mail: [s\\_pyatkov@ugrasu.ru](mailto:s_pyatkov@ugrasu.ru).

**E.I. Safonov**, PhD, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Yugra State University», 16 Chehova str., Khanty-Mansyisk, 628012, Russia, e-mail: [dc.gerz.hd@gmail.com](mailto:dc.gerz.hd@gmail.com).