

Алгоритм определения точечного источника в одномерном уравнении теплопроводности*

Е.И. САФОНОВ¹

¹ Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», г. Ханты-Мансийск, Россия

Аннотация. Рассматривается обратная задача определения вместе с решением, местоположения и интенсивности точечного источника в уравнении адвекции-дисперсии-реакции с использованием двух точечных измерений, расположенных по обе стороны относительно источника. Уравнение дополняется начальными и граничными условиями типа Неймана или Дирихле. Теоретический обзор этой обратной задачи, рассматривается во многих статьях, как в одномерном, так и в многомерном случаях. Однако большая часть из них основана на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего функционала. Как правило, это требует больших вычислительных возможностей и не всегда приводит к желаемому результату. В работе приводится описание схемы численного алгоритма. Численный алгоритм определения местоположения источника и решения обратной задачи обоснован с помощью явной асимптотической формулы. Интенсивность определяется по формуле Дюамеля. Численная реализация опирается на методы конечных элементов и конечных разностей для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведены численные эксперименты для двух групп входных данных. Представлены результаты численных экспериментов по восстановлению местоположения и интенсивности источников. Численные эксперименты демонстрируют хорошую сходимость.

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, метод конечных элементов, функция источника.

DOI: 10.14357/20790279190406

Введение

Рассмотрим вопрос определения местоположения и интенсивности точечного источника в уравнении адвекции-дисперсии-реакции

$$Lu = u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^m N_i(t) \delta(x - x_i) + f(x, t), \quad (1)$$
$$(x, t) \in G \times (0, T) = Q, G = (a, b),$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ дельта-функция Дирака. Здесь $u(x, t)$ концентрация, а $N_i(t)$ – интенсивность загрязнения точечного источника с координатами x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (описание модели приводится в [1]). Координаты точечного источника, функция $N_i(t)$ и решение u неизвестны. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$B_j u = \varphi_j(t), \quad j = 1, 2, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $B_1 u = u(a)$ или $B_1 u = u_x(a)$, а $B_2 u = u(b)$ или $B_2 u = u_x(b)$. Так же рассмотрим точечные условия переопределения

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (3)$$

Постановка задачи: даны функции ψ_i ($i = 0, 1, \dots, s$), u_0 , φ_i ($i = 1, 2$), найти решение u , функцию $N_i(t)$, и координаты точки x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) для уравнений (1)-(3).

Численное решение подобной обратной задачи представлено в работах [2-5]. Статьи [6-10] посвящены восстановлению функции источника в (1) с такими же или близкими условиями переопределения, но с известным местоположением источников. Статья [11] фактически является обзором этих проблем. Теоретическое исследование задачи (1)-(3) в одномерном случае изучается в [12, 13], а в многомерном – в [14-19].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства ХМАО-ЮГРЫ, грант 18-41-860003, p_урал_a.

1. Схема алгоритма

Для описания схемы алгоритма будем использовать формулы из работы [20].

Пусть $T \leq \infty$. Рассмотрим проблему

$$\begin{aligned} \Phi_t - L_0 \Phi &= f(x, t), & (x, t) \in Q &= (a, b) \times (0, T), & (4) \\ B_j \Phi &= \varphi_j(t), & j &= 1, 2, \Phi(x, 0) &= u_0(x). & (5) \end{aligned}$$

Произведем замену переменных $u = \omega + \Phi$ в (1)-(3) где Φ решение задачи (4), (5). Обратная задача при $m = 1$ сводится к задаче

$$\begin{aligned} Lu &= \omega_t - L_0 \omega = N(t)\delta(x - x_1), & (6) \\ B_j \omega &= 0, & j &= 1, 2, \omega(x, 0) &= 0, & (7) \\ \omega(y_i, t) &= \tilde{\psi}_i(t) = \psi_j(t) - \Phi(y_j, t), & i &= 1, 2, \dots, s. & (8) \end{aligned}$$

Следствие теоремы 3 [20] записывается при $a(\xi) = \alpha^2 = const$ как:

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\Psi_1(\lambda)}{\Psi_2(\lambda)} - \frac{1}{2\alpha\sqrt{\lambda}} \int_{y_1}^{y_2} b(\xi) d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (9)$$

Пусть $\tau = T/N$ где N положительное целое число. Зафиксируем $t_k = k\tau$. Где функция $\Psi_i(\lambda) = \int_0^T \tilde{\psi}_i(t) dt$. Посчитаем этот интеграл, используя правило трапеций

$$\Psi_{iN} = \sum_{k=1}^N \tau (e^{-\lambda t_{k-1}} \tilde{\psi}_i(t_{k-1}) + e^{-\lambda t_k} \tilde{\psi}_i(t_k))/2.$$

Определим функцию $N(t)$. Такая же задача описывается в разделе 6 [12]. Рассмотрим $\omega_0(x, t)$. Используем формулу Дюамеля

$$\omega(x, t) = \int_0^t N(\tau) \omega_{0t}(x, t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

В этом случае

$$\tilde{\psi}_i(t) = \int_0^t N(\tau) \omega_{0t}(y_i, t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Определим $N(t)$ через обращение этого интегрального оператора для $i = 1$ или $i = 2$. Заметим что функция $\omega_{0t}(y_i, t - \tau)$ неотрицательна и имеет ноль бесконечного порядка в $t = \tau$. Таким образом, задача не может быть сведена к уравнению Вольтерра второго рода. Тем не менее, для определения $N(t)$ можно использовать SVD-разложение или регуляризацию Тихонова.

Определив функцию $N(t)$ можно найти ω как решение задачи (6), (7) или по формуле (10). Тогда первоначальная функция u определяется как $u(x, t) = \omega(x, t) + \Phi(x, t)$.

2. Численный алгоритм

В алгоритме применяется метод конечных элементов с использованием граничных условий Дирихле. Рассуждения, в случаях других граничных

условий, почти одинаковы. Пусть границы пространственной области $a = 0, b = 1$, and $a(\xi) \equiv 1$. Определим пространственный и временной шаги как: $h = 1/M_1$ и $\tau = T/M_0$, где M_1, M_0 положительные целые числа. Построим функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-ih+h)}{h}, & x \in [(i-1)h, ih] \\ \frac{(ih+h-x)}{h}, & x \in [ih, (i+1)h], \quad i = 1, 2, \dots, M_1 - 1. \\ 0, & x \notin [(i-1)h, (i+1)h]. \end{cases}$$

Определим числа $h_0, h_1, h_2 \in [0, 1]$ (соответствующие индексам j_0, j_1, j_2) такие, что

$$\begin{aligned} h_0 j_0 h + (1 - h_0)(j_0 + 1)h &= x_1, \\ h_1 j_1 h + (1 - h_1)(j_1 + 1)h &= y_1, \\ h_2 j_2 h + (1 - h_2)(j_2 + 1)h &= y_2. \end{aligned}$$

Имеем $j_0 = [x_1/h], j_1 = [y_1/h], j_2 = [y_2/h]$, где квадратные скобки взятие целой части. Более того $h_0 = 1 - x_1/h + [x_1/h], h_1 = 1 - y_1/h + [y_1/h], h_2 = 1 - y_2/h + [y_2/h]$. Пусть $x_i = ih, t_j = j\tau$.

2.1. Построение функции Φ

Для простоты мы предполагаем, что $\varphi_i(t) \in W_2^1(0, T)$ ($i = 1, 2$). Определим функцию $\Phi_0 = \varphi_1(t)(1 - x) + \varphi_2(t)x$. Тогда функция $\Phi_1 = \Phi - \Phi_0$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} L\Phi_1 &= f(x, t) - L\Phi_0 = \tilde{f}(x, t), \\ f(x, t) - \varphi_1'(1-x) - \varphi_2'x - c(\varphi_1(1-x) + \varphi_2x) - b(\varphi_2 - \varphi_1) &= \tilde{f}(x, t), & (12) \\ \Phi_1|_{t=0} &= u_0(x) - \varphi_1(0)(1-x) - \varphi_2(0)x = u_1(x), \\ \Phi_1(0, t) &= 0, \Phi_1(1, t) = 0. \end{aligned}$$

Приближение функции Φ_1 рассчитывается по формуле $\Phi_1^{M_1}(x, t) = \sum_{i=1}^{M_1-1} C_i(t) \varphi_i(x)$, где функции C_i удовлетворяют следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(L\Phi_1^{M_1}, \varphi_i)_0 = (\tilde{f}, \varphi_i)_0 = \int_0^1 \tilde{f}(x, t) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, M_1 - 1. \quad (13)$$

Система (4) может быть переписана в форме

$$M\vec{C}_t + K\vec{C} = \vec{F} = ((\tilde{f}, \varphi_1)_0, (\tilde{f}, \varphi_2)_0, \dots, (\tilde{f}, \varphi_{M_1-1})_0)^T, \quad (14)$$

где элементы матрицы M представляются как $m_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)_0$, т.е. $m_{i,i} = 2h/3, m_{i,i+1} = h/6, m_{i-1,i} = h/6$, и $m_{i,j} = 0$ для $|i - j| > 1$. Запишем в численном виде эти элементы

$$\begin{aligned} m_{1,1} &= m_{M_1, M_1} = h/3, m_{i,i} = 2h/3, \\ m_{i,i+1} &= m_{i+1,i} = h/6, i = 1, 2, \dots, M_1 - 1. & (15) \end{aligned}$$

Элементы матрицы K записываются в виде

$$k_{i,j} = (\varphi_i', \varphi_j') + (b\varphi_j' + c\varphi_j, \varphi_i). \quad (16)$$

Отметим, что $k_{i,j} = 0$ для $|i - j| > 1$. Численная форма этих элементов

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= 1, k_{1,2} = 0, k_{M_1, M_1-1} = 0, k_{M_1, M_1} = 1, \\ k_{i,i} &= 2/h + (c(ih) - b_x(ih) + c((i-1)h) - b_x((i-1)h)) \cdot h/3, & (17) \\ k_{i,i-1} &= k_{i,i+1} = -1/h + b(ih)/2 + c(ih) \cdot h/6, \end{aligned}$$

где $i = 2, 3, \dots, M_1 - 1$. Приближение решения для системы (13) определяется неявной схемой методом конечных разностей. Определим

$\vec{C}_0 = (u_1(x_1), u_1(x_2), \dots, u_1(x_{M_1-1}))^T$. Вектора \vec{C}_n для $n \geq 1$ рассчитываются как решения для системы

$$M \frac{\vec{C}_n - \vec{C}_{n-1}}{\tau} + K \vec{C}_n = \vec{F}_n = \vec{F}(t_n), n = 1, 2, \dots, M_0. \quad (18)$$

Таким образом

$$\vec{C}_n = (M + \tau K)^{-1} (M \vec{C}_{n-1} + \tau \vec{F}_n). \quad (19)$$

Элементы вектора F_n определяются следующим образом:

$F_{1,n} = F_{M_1,n} = 0, F_{i,n} = (\tilde{f}(ih, n\tau) + \tilde{f}((i-1)h, n\tau)) \cdot h/2$, где $i = 2, 3, \dots, M_1 - 1$ и $\tilde{f}(ih, n\tau) = \tilde{f}(x_i, t_j)$ значения функции \tilde{f} в соответствующих точках. Далее, мы имеем $\vec{C}(t_n) \approx \vec{C}_n$. Приближение функции $\Phi_1(x, t)$ может быть записано как: $\Phi_1(x, t_n) \approx \sum_{j=1}^{M_1-1} C_{i,n} \varphi_i(x)$, где $C_{i,n}$ это -ая координата вектора \vec{C}_n . Соответственно функция Φ запишется в виде

$$\Phi(ih, n\tau) \approx \Phi_{i,n} = C_{i,n} + \Phi_0(ih, n\tau), i = 1, 2, \dots, M_1, n = 1, 2, \dots, M_0. \quad (20)$$

Результатом первого этапа является функция с элементами $\Phi_{i,k}$. Необходимо определить приближительное значение количества $\Phi(y_m, t)$. Определим величины

$$l_{0,j} = h_0 \Phi_{j_0,j} + (1 - h_0) \Phi_{j_0+1,j}, \\ l_{1,j} = h_1 \Phi_{j_1,j} + (1 - h_1) \Phi_{j_1+1,j} \\ \text{и } l_{2,j} = h_2 \Phi_{j_2,j} + (1 - h_2) \Phi_{j_2+1,j}.$$

Векторы

$$\vec{l}_0 = (l_{0,0}, l_{0,1}, \dots, l_{0,M_0}), \vec{l}_1 = (l_{1,0}, l_{1,1}, \dots, l_{1,M_0}), \\ \vec{l}_2 = (l_{2,0}, l_{2,1}, \dots, l_{2,M_0})$$

это приближения векторов

$$(\Phi(x_1, t_0), \Phi(x_1, t_1), \dots, \Phi(x_1, t_{M_0})), \\ (\Phi(y_1, t_0), \Phi(y_1, t_1), \dots, \Phi(y_1, t_{M_0})), \\ (\Phi(y_2, t_0), \Phi(y_2, t_1), \dots, \Phi(y_2, t_{M_0})).$$

Построим вектор

$$\vec{\psi}_1 = (\psi_1(t_0) - l_{1,0}, \psi_1(t_1) - l_{1,1}, \dots, \psi_1(t_{M_0}) - l_{1,M_0}), \\ \vec{\psi}_2 = (\psi_2(t_0) - l_{2,0}, \psi_2(t_1) - l_{2,1}, \dots, \psi_2(t_{M_0}) - l_{2,M_0}),$$

таким образом, координаты этих векторов рассчитываются как $\psi_1^i = \psi_1(t_i) - l_{1,i}, \psi_2^i = \psi_2(t_i) - l_{2,i}$.

2.2. Вычисление координат точки x_1

Воспользуемся формулой (9). Сперва найдем функции $\Psi_i(\lambda)$,

$$\Psi_i(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} (\psi_i - \Phi(y_i, t)) dt, i = 1, 2.$$

Воспользуемся формулой трапеций для вычисления интеграла $\Psi_i(\lambda)$, таким образом получаем

$$\Psi_i(\lambda) \approx \Psi^i = \sum_{j=1}^{M_0} \frac{\tau}{2} (e^{-\lambda t_{j-1}} \psi_i^{j-1} + e^{-\lambda t_j} \psi_i^j), \quad (21)$$

Далее, определим интеграл

$$J = \int_{y_1}^{y_2} r_1(\xi) d\xi \quad (22)$$

следующим образом:

$$J = \sum_{i=j_1+1}^{j_2+1} \frac{h}{2} (r_1(h(i-1)) + r_1(hi)), \quad (23)$$

Координата точки x_1 определяется по формуле

$$x_1 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) - \frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{|\Psi^1|}{|\Psi^2|} - \frac{J}{2\alpha\sqrt{\lambda}}. \quad (24)$$

2.3. Построение функции $N(t)$

Приближенное значение решения задачи (6), (7) с $N(t) \equiv 1$ записывается в форме $\omega_0 = \sum_{i=1}^{M_1-1} \alpha_i(t) \varphi_i(x)$, где функции $\alpha_i(t)$ решения системы

$$(Lv_0, \varphi_i)_0 = \varphi_i(x_1), \quad i = 1, 2, \dots, M_1 - 1. \quad (25)$$

Заметим, что вектор правой части имеет не более двух не нулевых элементов с индексами $i = j_0$ или $i = j_0 + 1$. Система (25) может быть записана в виде

$$M \vec{\alpha}_t + K \vec{\alpha} = \vec{F}_1 = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_1), \dots, \varphi_{M_1-1}(x_1))^T, \quad (26)$$

Построим приближенное решение этой системы. Пусть $\vec{\alpha}^0 = 0$. Векторы $\vec{\alpha}^n$ для $n \geq 1$ рассчитываются как

$$\vec{\alpha}^n = (A + \tau B)^{-1} (A \vec{\alpha}^{n-1} + \tau \vec{F}_1). \quad (27)$$

Обозначим i -ые координаты в $\vec{\alpha}^n$ как $\alpha_{i,n}$. Найдем вектор β с координатами

$$\beta_j = h_0 \alpha_{j_0,j} + (1 - h_0) \alpha_{j_0+1,j}, j = 0, 1, \dots, M_0, \quad (28)$$

и вектор $\tilde{\beta}$ с координатами $\tilde{\beta}_j = \beta_j - \beta_{j-1}, j = 1, 2, \dots, M_0, \tilde{\beta}_0 = 0$.

Найдем приближенное значение $\tilde{N}(t)$ функции $N(t)$ как кусочно-постоянная функция, равная N_i на интервале $(t_{i-1}, t_i]$. Ввиду (11) эти константы удовлетворяют системе

$$\psi_i^j = \sum_{k=1}^j N_k \tilde{\beta}_{j+1-k}, j = 1, 2, \dots, M_0. \quad (29)$$

Сумма в правой части является приближением интеграла $\int_0^t N(t) v_{0t}(y_i, t - \tau) d\tau \int_0^t N(t) v_{0t}(y_i, t - \tau) dt$. Для решения системы (29), мы используем регуляризацию Тихонова. Перепишем систему (29) в виде

$$\vec{\psi}_i = B \vec{N}. \quad (30)$$

Зафиксируем некоторую малую переменную $\varepsilon_0 > 0$ и запишем приближенное решение системы (6) как

$$\vec{N}_i = (B^* B + \varepsilon_0 E)^{-1} B^* \vec{\psi}_i, \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

Здесь B^* сопряженная к матрице B , E - единичная матрица. Пусть $\vec{N}_1 = (N_{11}, N_{12}, \dots, N_{1M_0})$ и $\vec{N}_2 = (N_{21}, N_{22}, \dots, N_{2M_0})$. Положим $\vec{N} = \vec{N}_1, \vec{N} = \vec{N}_2$, или $\vec{N} = (\vec{N}_1 + \vec{N}_2)/2$, т.е. $N_k = (N_{1k} + N_{2k})/2$. Каждо-

Табл. 1

Результаты численных экспериментов

No.	h	τ	x_1	ε_{x0}	ε_{N1}	ε_{N2}	ε_{Nav}	ε_u	τ_s
1	0.001	0.01	0.35	0.0088	0.1922	0.2128	0.0132	0.0256	726.31
2	0.002	0.01	0.35	0.0087	0.1881	0.2287	0.0203	0.025	371.88
3	0.002	0.004	0.35	0.0051	0.1674	0.2302	0.0384	0.0087	834.38
4	0.002	0.002	0.35	0.0025	0.1144	0.2026	0.0535	0.0048	1625.9
5	0.001	0.01	0.4	0.0098	0.2089	0.2254	0.0157	0.028	697.83
6	0.002	0.01	0.4	0.0097	0.2063	0.2387	0.0162	0.0275	363.75
7	0.002	0.004	0.4	0.0057	0.1802	0.234	0.0334	0.0097	845.31
8	0.002	0.002	0.4	0.0034	0.1375	0.2114	0.0438	0.0062	1653.9
9	0.001	0.01	0.45	0.0108	0.2244	0.2397	0.0196	0.0305	711.78
10	0.002	0.01	0.45	0.0109	0.2224	0.2508	0.0155	0.0301	347.03
11	0.002	0.004	0.45	0.0063	0.1774	0.2353	0.029	0.0106	833.33
12	0.002	0.002	0.45	0.0039	0.1248	0.2111	0.0431	0.0072	1699.1
13	0.001	0.01	0.5	0.0118	0.235	0.2543	0.0281	0.0329	688.86
14	0.002	0.01	0.5	0.0119	0.2325	0.2638	0.0235	0.0325	350.57
15	0.002	0.004	0.5	0.0067	0.1596	0.2353	0.0378	0.0114	881.45
16	0.002	0.002	0.5	0.0042	0.0941	0.2054	0.0556	0.0077	1566.6
17	0.001	0.01	0.55	0.0127	0.2383	0.2684	0.0374	0.035	722.75
18	0.002	0.01	0.55	0.0128	0.2351	0.2761	0.0334	0.0346	361.45
19	0.002	0.004	0.55	0.0070	0.135	0.2352	0.0501	0.012	841.9
20	0.002	0.002	0.55	0.0044	0.0665	0.1987	0.0696	0.0081	1635.5
21	0.001	0.01	0.6	0.0134	0.2352	0.2798	0.0473	0.0366	715.86
22	0.002	0.01	0.6	0.0135	0.2316	0.2856	0.0437	0.0362	368.94
23	0.002	0.004	0.6	0.0072	0.1136	0.2356	0.0613	0.0124	827.12
24	0.002	0.002	0.6	0.0045	0.0623	0.1950	0.0798	0.0084	1599.4
25	0.001	0.01	0.65	0.0137	0.2287	0.285	0.0571	0.0374	663.99
26	0.002	0.01	0.65	0.0138	0.227	0.2878	0.0539	0.0368	370.3
27	0.002	0.004	0.65	0.0073	0.1081	0.2347	0.066	0.0123	833.21
28	0.002	0.002	0.65	0.0047	0.0651	0.1974	0.0817	0.0086	1593.5
29	0.001	0.01	0.7	0.0136	0.2214	0.2787	0.0659	0.0366	668.23
30	0.002	0.01	0.7	0.0134	0.2255	0.2758	0.0626	0.0358	376.55
31	0.002	0.004	0.7	0.0069	0.1112	0.2251	0.0575	0.0116	836.54
32	0.002	0.002	0.7	0.0048	0.0731	0.2038	0.0714	0.0085	1611.4
33	0.001	0.01	0.75	0.0124	0.2134	0.2514	0.0808	0.0344	673.06
34	0.002	0.01	0.75	0.0117	0.2282	0.2381	0.0759	0.0327	367.81
35	0.002	0.004	0.75	0.0057	0.1348	0.1866	0.0345	0.0093	836.51
36	0.002	0.002	0.75	0.0044	0.1139	0.1958	0.0409	0.0073	1581.9
37	0.001	0.01	0.8	0.0093	0.2003	0.1851	0.0805	0.0274	676.52
38	0.002	0.01	0.8	0.0077	0.2297	0.1523	0.0697	0.0237	363.24
39	0.002	0.004	0.8	0.0025	0.1668	0.0815	0.0507	0.0048	823.44
40	0.002	0.002	0.8	0.0024	0.1777	0.1072	0.0548	0.0047	1588.3

му вектору \vec{N} , соответствует кусочно-постоянная функция $\vec{N}(t)$.

2.4. Вычисление решения

Имеем

$$\omega(ih, t_j) \approx \omega(i, j) = \sum_{k=1}^i N_k (\alpha_{i,j+1-k} - \alpha_{i,j-k}), \quad j = 1, 2, \dots, M_0, \quad (32)$$

$$u(x_i, t_j) \approx u(i, j) = \omega(i, j) + \Phi_{i,j}.$$

3. Результаты численных экспериментов

Для простоты повествования представим результаты вычисления только координаты точки x_1 и функции $N(t)$.

Для проведения экспериментов запишем решение задачи (1)-(3), начальные и граничные условия следующим образом:

$$u(x, t) = \varphi(x, t) - |x - x_1|N(t)/(2a),$$

$$u_0 = \varphi(x, 0) - N(0)|x - x_1|/(2a),$$

$$\varphi_1(t) = \varphi(0, t) - |x_1|N(t)/(2a),$$

$$\varphi_2(t) = \varphi(1, t) - |1 - x_1|N(t)/(2a).$$

где $\varphi(x, t)$ – произвольная гладкая функция.

Разделим численные эксперименты на четыре группы в зависимости от неизвестных функций $u(x, t)$, $N(t)$, точки x_1, y_1, y_2 , коэффициентов уравнения $a(x), b(x), c(x)$, и вектора правой части f . Рассматриваются несколько сеток с различными шагами по пространству $h = 1/M_1$ и времени $\tau = T/M_0$, а так же используя различные параметры λ .

Входные данные для первой группы данных: $\varphi(x, t) = x^2 + t^2 + 2, N = (t + 2), a(x) = 1, b(x) = x + 2, c(x) = (x + 1)^2,$

$$f = 2t - (xt + 2x + 2t + 4)sgn(x - x_1)/2 - (x + 1)^2|x - x_1|(t + 2)/2 + (x + 1)^2(x^2 + t^2 + 2) - 2 + 2x^2 + 4x - |x - x_1|,$$

$$y_1 = 0.3, y_2 = 0.85.$$

Возьмем за τ_s – время вычислений, в секундах. В работе будем анализировать зависимость ошибки и времени вычисления x_1 .

Введем несколько величин: $\varepsilon_{x1} = |x_1 - \tilde{x}_1|$, где \tilde{x}_1 – координаты точки, полученные в результате вычислений; $\varepsilon_{N1} = \max_i |N(it) - N_{1i}|$ и $\varepsilon_{N2} = \max_i |N(it) - N_{2i}|$; $\varepsilon_{N_{av}} = \max_i |N(it) - (N_{1i} + N_{2i})/2|$ – ошибка вычислений, использующая среднее арифметическое N_{1i} и N_{2i} ; $\varepsilon_u = \max_{i,j} |u_{i,j} - u(ih, j\tau)|$, где $i = 1, 2, \dots, M_1 - 1, j = 1, 2, \dots, M_0$.

Результаты численных экспериментов для первой групп данных представлены в таблице 1.

При проведении экспериментов изменялись шаги по пространству h и времени τ , а также координаты точки x_1 начиная с 0.35 до 0.8 с шагом 0.05. Для определения функции $u(x, t)$, за N_j была взята величина среднего арифметического приближенных значений \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . При регуляризации Тихонова использовался параметр $\varepsilon_0 = 10^{-6}$.

Как можно видеть изменение параметра h практически не влияет на точность вычислений, в то время как изменение τ приводит к её улучшению. Близкое расположение точки x_1 к точкам замеров u_1 и u_2 приводит к лучшей точности расчетов.

Результаты экспериментов 25 и 28 представлены на рисунках 1.а и 1.б соответственно, на которых представлены графики функций $N(t)$ (синие) и её приближения которой соответствует вектор $(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)/2$ (красные). Использование среднего арифметического показывает лучшую сходимость

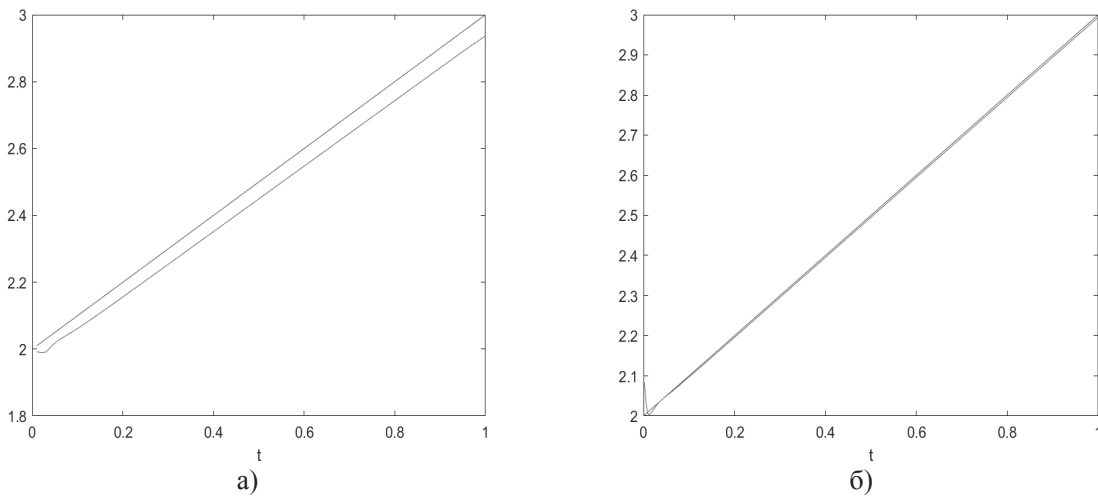


Рис. 1. Результаты вычисления функции $N(t)$

а) $\varepsilon_{N_{av}} = 0.0571, \tau = 663.99$; б) $\varepsilon_{N_{av}} = 0.0817, \tau = 1593.5$.

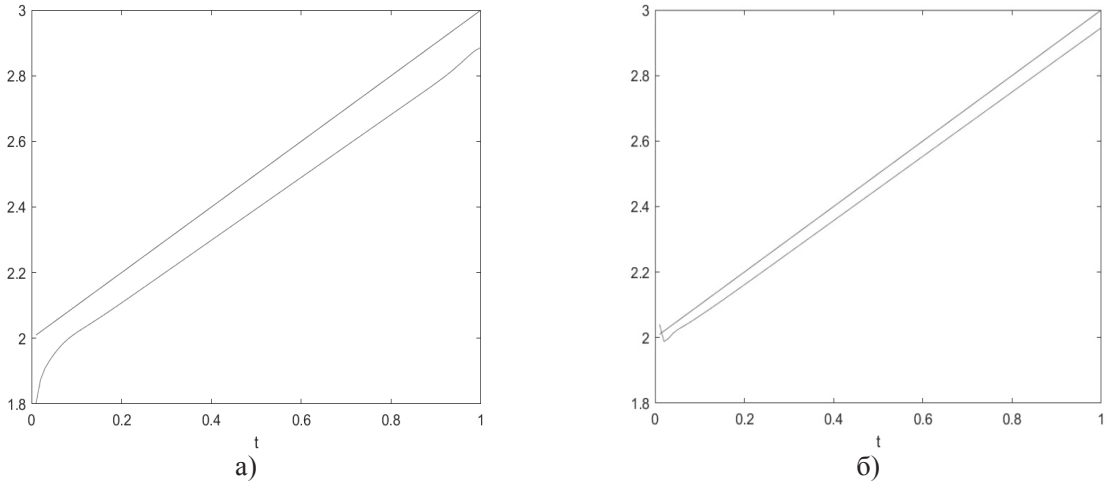


Рис. 2 Результаты вычисления функции $N(t)$

а) $\epsilon_0 = 10^{-5}$, $\epsilon_{Nav} = 0.2074$, $\tau_s = 352.97$; б) $\epsilon_0 = 10^{-7}$, $\epsilon_{Nav} = 0.0632$, $\tau_s = 354.02$.

по сравнению с \vec{N}_1 и \vec{N}_2 взятых по отдельности. При вычислении функции $\omega(x, t)$ и $u(x, t)$ в качестве приближения $\tilde{N}(t)$ так же используется $(\vec{N}_1 + \vec{N}_2)/2$.

Исходя из теоретических выкладок раздела 1 данной статьи, параметр λ должен быть максимально большим. Однако его значение ограничено сверху величиной c_0/τ , где значение c_0 достаточно мало. Экспериментальным путем, при использовании первой группы данных, была выявлена зависимость параметра λ от шага по времени $\tau = 1/M_0$, которая описывается равенством $\lambda = 0.1241/\tau + 34.06$.

Далее, изменим параметр регуляризации Тихонова ϵ_0 и сравним результаты вычислений функции $N(t)$. Рассмотрим данные первой группы и $x_0 = 0.65$. Результаты представлены на рисунке

2. Ожидаемо, увеличение параметра ϵ_0 приводит к увеличению ошибки вычислений.

Вторая группа входных данных:

$$\varphi(x, t) = (x + t + 1)^2, a(x) = 1, b(x) = x, c(x) = 0;$$

$$f = 2(x + t + 1) - 2 + 2x(x + t + 1) + (t - 0.5)|x - x_0| + 0.5x(t - 0.5)\text{sgn}(x - x_0)$$

Рассмотрим результаты при $\tau = 0.01$ и $h = 0.002$.

Графики при $x_1 = 0.8$ и неизвестных функций $N(t)$ представлены на рисунке 3: $N = -(t - 0.5)^2$ (а) и $N = (t - 0.5)^3$ (б).

Таблица 3 содержит результаты численных экспериментов для второй группы входных данных и функции $N(t) = -(t - 0.5)^2$.

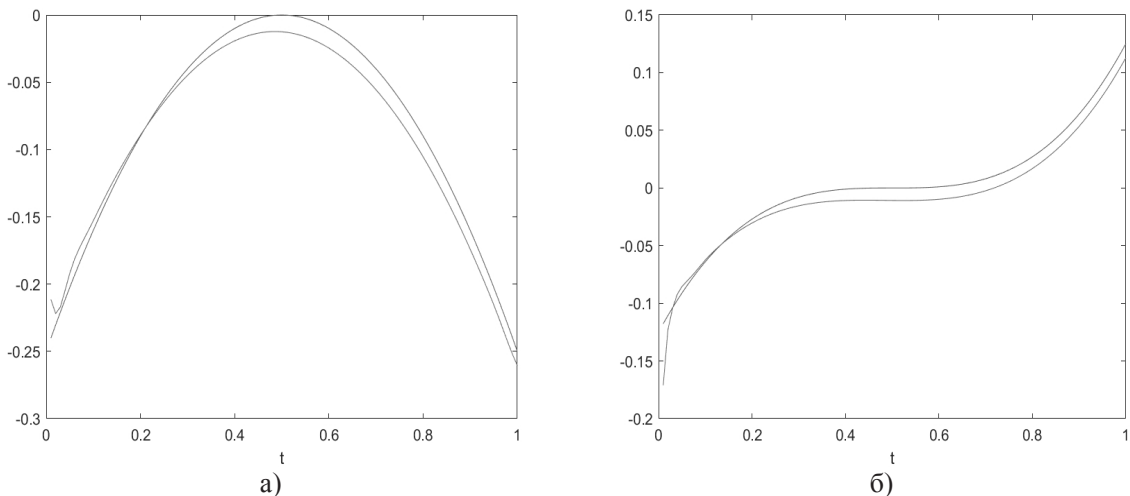


Рис. 3 Результаты вычисления функции $N(t)$ для второй группы входных данных

а) $\epsilon_{x0} = 0.0359$, $\epsilon_{Nav} = 0.0501$, $\tau_s = 321.81$; б) $\epsilon_{x0} = 0.0562$, $\epsilon_{Nav} = 0.0534$, $\tau_s = 332.9$.

Заключение

Был представлен численный алгоритм определения координат и интенсивности точечного источника для уравнения адвекции-дисперсии-реакции с использованием двух точек замера, расположенных относительно источника вверх и вниз по течению. Результаты численных экспериментов показывают хорошую точность восстановления исходного местоположения и мощности источника. Наибольшее влияние на точность оказывает шаг по времени τ , уменьшение которого приводит к увеличению точности расчета точки x_1 .

Табл. 2

Результаты численных экспериментов

N_0	M_0	λ
1	100	42
2	150	53
3	200	60
4	250	67
5	300	74
6	350	79
7	400	84
8	450	90
9	500	94
10	550	101

Табл. 3

Результаты численных экспериментов

N_0	x_1	ε_{x0}	ε_{N1}	ε_{N2}	$\varepsilon_{N_{av}}$	ε_u	τ_s
1	0.35	0.0149	0.0376	0.0586	0.0481	0.0035	322.49
2	0.4	0.0141	0.0377	0.0481	0.0429	0.0032	324.96
3	0.45	0.0142	0.04	0.0344	0.0372	0.0029	321.66
4	0.5	0.0149	0.044	0.024	0.0313	0.0032	332.72
5	0.55	0.0162	0.0487	0.0231	0.0251	0.0036	320.88
6	0.6	0.0182	0.0514	0.0255	0.0174	0.004	322.92
7	0.65	0.0209	0.0493	0.0349	0.0154	0.0046	322.62
8	0.7	0.0247	0.0403	0.0538	0.0142	0.0052	335.69
9	0.75	0.0296	0.0235	0.0744	0.0255	0.006	321.3
10	0.8	0.0359	0.0301	0.0989	0.0501	0.0069	321.81

Литература

1. Marchuk G.I. 1986. Mathematical modeling in environmental problems. Studies in Mathematics and its Applications, Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company, Inc., 16, pp: 216.
2. Alifanov O.M. 1994. Inverse Heat Transfer Problems. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, pp: 348.
3. Deng X., Y. Zhao and J. Zou. 2013. On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity. Inter. J. Numer. Analysis and Modeling, 10(3): 588-602.
4. Kabanikhin S. I. 2011. Inverse and Ill-Posed Problems: theory and applications. De Gruyter, Berlin/Boston, pp: 459.
5. Ozisik M.N. and H.A.B. Orlando. 2000. Inverse heat transfer. New-York: Taylor & Francis, pp: 352.
6. Boano F., R. Revelli and L. Ridolfi. 2005. Source identification in river pollution problems: a geo-statistical approach. Water Resources Research, 41(7): 1-13.
7. Hamdi A. 2007. Identification of Point Sources in Two Dimensional Advection-Diffusion-Reaction Equation: Application to Pollution Sources in a River. Stationary Case. Inverse Problems in Science and Engineering, 15(8), 855-870.
8. Liu C.-S. and C.-W. Chang. 2016. A global boundary integral equation method for recovering space-time dependent heat source. Intern. J. of Heat and Mass Transfer, 92: 1034-1040.
9. Ridolfi L. and M. Macis. 1997. Identification of Source Terms in Nonlinear Convection Diffusion Phenomena by Sine Collocation-Interpolation Methods. Math. Comput. Modeling, 26(2): 69-79.
10. Su J. and A.J.S. Neto. 2001. Heat Source Estimation with the Conjugate Gradient Method in Inverse Linear Diffusive Problems. J. Braz. Soc. Mech. Sci., 23(3): 321-334.
11. Orlande N.B.R. 2010. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications. J. of Heat Transfer, 134(3): 379-398.
12. Badia A. El., T Ha-Duong and A. Hamdi. 2005. Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem. Inverse Problems, 21(3): 1-17.

13. *Badia A.El. and A. Hamdi.* 2007. Inverse source problem in an advection-dispersion- reaction system: application to water pollution. *Inverse Problems*, 23(5): 2103-2120.
14. *Ling L.* 2009. T. Takeuchi Point Sources identification problems for heat equations *Commun. Comput. Phys.*, 5 (5): 897-913.
15. *Prilepko A.I., D.G. Orlovsky and I.A. Vasin.* 1999. *Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics.* New-York, Marcel Dekker, Inc., pp: 454.
16. *Isakov V.* 1990. *Inverse Source Problems, Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI., 34, pp: 191.
17. *Rao K.S.* 2007. Source estimation methods for atmospheric dispersion. *Atmos. Environ.*, 41(33): 6964–6973.
18. *Sharan M., J.-P. Issartel, K. Singh and P. Kumar.* 2009. An inversion technique for the retrieval of single-point emissions from atmospheric concentration measurements. *Proc. R. Soc. A.*, 465(2107): 2069-2088.
19. *Mamonov A.V. and Y-H.R. Tsai.* 2013. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems. *Inverse Problems*, 29(3): 26.
20. *Pyatkov S.G. and E.I. Safonov.* 2017. On Some Classes of Inverse Problems of Recovering a Source Function. *Siber. Adv. in Math.*, 27(2): 119-132.

Сафонов Егор Иванович. Институт цифровой экономики Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» (ФГБОУ ВО ЮГУ), г. Ханты-Мансийск, Россия. Доцент, к.ф.-м.н. Количество печатных работ: 19. Область научных интересов: уравнения в частных производных, вычислительная математика.
E-mail: dc.gerz.hd@gmail.com

Algorithm of recovering a point source in a one-dimensional heat equation

E.I. Safonov¹

¹Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Yugra State University», Khanty-Mansiysk, Russia.

Abstract. We consider the inverse problem of determining, together with the solution, the location, and intensity of a point source in the advection-dispersion-reaction equation using two point measurements located on both sides relative to the source. The equation is supplemented by initial and boundary conditions of the Neumann or Dirichlet type. The theoretical review of this inverse problem is considered in many articles, both in one-dimensional and multidimensional cases. However, most of them are based on reducing the problem to an optimal control problem and minimizing the corresponding functional. As a rule, this requires large computational capabilities and does not always lead to the desired result. The paper provides a description of the numerical algorithm scheme. The numerical algorithm for determining the location of the source and solving the inverse problem is justified by using an explicit asymptotic formula. The intensity is determined by the Duhamel formula. The numerical implementation is based on the finite element method and the finite difference method for the corresponding system of ordinary differential equations. Numerical experiments for two groups of input data were performed. The results of numerical experiments to restore the location and intensity of the sources are presented. Numerical experiments demonstrate good convergence.

Keywords: *parabolic equation, inverse problem, finite element method, source function.*

DOI: 10.14357/20790279190406

References

1. *Marchuk, G.I.* 1986. Mathematical modeling in environmental problems. Studies in Mathematics and its Applications, Amsterdam: Elsevier Science Publishing Company, Inc., 16, pp: 216.
2. *Alifanov, O.M.* 1994. Inverse Heat Transfer Problems. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, pp: 348.
3. *Deng, X., Y. Zhao and J. Zou.* 2013. On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity. Inter. J. Numer. Analysis and Modeling, 10(3): 588-602.
4. *Kabanikhin, S.I.* 2011. Inverse and Ill-Posed Problems: theory and applications. De Gruyter, Berlin/Boston, pp: 459.
5. *Ozisik, M.N. and H.A.B. Orlando.* 2000. Inverse heat transfer. New-York: Taylor & Francis, pp: 352.
6. *Boano, F., R. Revelli and L. Ridolfi.* 2005. Source identification in river pollution problems: a geostatistical approach. Water Resources Research, 41(7): 1-13.
7. *Hamdi, A.* 2007. Identification of Point Sources in Two Dimensional Advection-Diffusion-Reaction Equation: Application to Pollution Sources in a River. Stationary Case. Inverse Problems in Science and Engineering, 15(8), 855-870.
8. *Liu C.-S. and C.-W. Chang.* 2016. A global boundary integral equation method for recovering space-time dependent heat source. Intern. J. of Heat and Mass Transfer, 92: 1034-1040.
9. *Ridolfi L. and M. Macis.* 1997. Identification of Source Terms in Nonlinear Convection Diffusion Phenomena by Sine Collocation-Interpolation Methods. Math. Comput. Modeling, 26(2): 69-79.
10. *Su J. and A.J.S. Neto.* 2001. Heat Source Estimation with the Conjugate Gradient Method in Inverse Linear Diffusive Problems. J. Braz. Soc. Mech. Sci., 23(3): 321-334.
11. *Orlande N.B.R.* 2010. Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications. J. of Heat Transfer, 134(3): 379-398.
12. *Badia A.El., T Ha-Duong and A. Hamdi.* 2005. Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem. Inverse Problems, 21(3): 1-17.
13. *Badia A.El. and A. Hamdi.* 2007. Inverse source problem in an advection-dispersion- reaction system: application to water pollution. Inverse Problems, 23(5): 2103-2120.
14. *Ling L.* 2009. T. Takeuchi Point Sources identification problems for heat equations Commun. Comput. Phys., 5 (5): 897-913.
15. *Prilepko A.I., D.G. Orlovsky and I.A. Vasin.* 1999. Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York, Marcel Dekker, Inc., pp: 454.
16. *Isakov V.* 1990. Inverse Source Problems, Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI., 34, pp: 191.
17. *Rao K.S.* 2007. Source estimation methods for atmospheric dispersion. Atmos. Environ., 41(33): 6964–6973.
18. *Sharan M., J.-P. Issartel, K. Singh and P. Kumar.* 2009. An inversion technique for the retrieval of single-point emissions from atmospheric concentration measurements. Proc. R. Soc. A., 465(2107): 2069-2088.
19. *Mamonov A.V. and Y-H. R. Tsai.* 2013. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems. Inverse Problems, 29(3): 26.
20. *Pyatkov S.G. and E.I. Safonov.* 2017. On Some Classes of Inverse Problems of Recovering a Source Function. Siber. Adv. in Math., 27(2): 119-132.

E.I. Safonov PhD, Institute of Digital Economics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Yugra State University», 16 Chekhov str., Khanty-Mansiysk, 628012, Russia, e-mail: dc.gerz.hd@gmail.com