О некоторых классах обратных задач для систем конвекции-диффузии и их обобщений*

В.В. Ротко[I]

[I] Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет», г. Ханты-Мансийск, Россия

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева коэффициентных обратных задач для квазилинейных математических моделей конвекции-диффузии. Неизвестные функции, зависящие от времени, входят в функцию источника и в сам оператор в качестве коэффициентов. В качестве условий переопределения рассматриваются значения решения в некотором наборе внутренних точек области. Приведены условия гарантирующие локальную по времени корректность задачи в классах Соболева. Условия на данные задачи минимальны. Полученные результаты являются точными.

Ключевые слова: *параболическая система, обратная задача, функция источника, конвекция-диффузия, тепломассоперенос.*

DOI: 10.14357/20790279190407

Введение

Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением правой части специального вида и коэффициентов уравнения в квазилинейных параболических уравнениях и системах. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$ с границей Г класса C^{2m} и $Q=(0,T)\times G$. Параболическое уравнение имеет вид

$$u_t + A(t,x,D)u = g(x,t,u,Du,\dots,D^{2m-1}u) + \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t) + f, \quad (0.1)$$

где $(t,x)\in Q$, A – матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h\times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D) = \sum_{i=r+1}^{sh} q_i(t,x')A_i(t,x,D_x) + A_{sh+1}(t,x,D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_{i\alpha}(t,x)D^\alpha \ (i=r+1,\dots,sh+1), \qquad D=(\partial_{x_1},\partial_{x_2},\dots,\partial_{x_n})$$

и g – некоторая нелинейная функция, зависящая от u и производных $D^\alpha u$ с $|\alpha|\le 2m-1$. Под $D^k u$ понимаем вектор, состоящий из всех производных порядка k функции u. Уравнение (0.1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0}=u_0, \qquad B_j u|_S = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(t,x)D^\beta u|_S = g_j(t,x), \quad (0.2)$$

где $m_j<2m$, $j=1,2,\dots,m$ и $S=(0,T)\times\Gamma$. Неизвестными в (0.1), (0.2) являются решение u, функции $q_i(t)$ $(i=1,2,\dots,hs,\ sh\ge r)$, входящие как в правую часть (0.1) так и в оператор A как коэффициенты. Условия переопределения для нахождения этих функций q_i имеют вид

$$u|_{x=x_i} = \psi_i(t), \qquad i=1,2,\dots,s, \quad (0.3)$$

где $\{x_i\}$ – набор точек из G. Проблемы подобного вида возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях (см. [15,16]. Прежде всего мы сошлемся на работу [4], где получена теорема существования и единственности решений задачи (1)-(3) в пространствах Гельдера в случае $m=h=r=1$, $s=1$ и линейной по своим аргументам функции f. В случае $n=1$, $r=1$ и $G=\mathbb{R}$ аналогичный результат в получен в работах [9], [2]. Общие теоремы о разрешимости абстрактных задач такого вида в квазилинейном случае получены в монографии [17] в пространствах функций, удовлетворяющих условию Гельдера по t в случае когда главная часть оператора A не зависит от неизвестных функций и $D(A)$ не зависит от времени. Результаты применимы и к задачам вида (0.1)-(0.3) и при выполнении некоторых (довольно жестких и вообще говоря значительно завышенных) условий на данные задачи гарантируют локальную по времени разрешимость этой

* Работа поддержана грантом РФФИ 18-01-00620а.

задачи. Линейные задачи вида (0.1)-(0.3) в случае $m = 1$, были рассмотрены в работах авторов в [6,18] (здесь условия на данные минимальны), а квазилинейные в работе [7], где были ослаблены условия на данные по сравнению с теми, которые были использованы в [17]. Стоит отметить, что глобальных по времени результатов о разрешимости задач вида (0.1)-(0.3) для нелинейной правой части f, по видимому, не имеется за исключением работы [5].

Отметим, что численные методы решения различных модельных задач, входящих в класс (1)-(3) рассматривались, например, в книгах [16,1] и большом количестве работ (см., например, [11,12]), выделим работу [14], где как раз рассматривался случай квазилинейной параболической системы.

В данной работе мы получим локальную по времени теорему о существовании и единственности решений задачи (0.1)-(0.3). Схема доказательства может быть использована и для построения численных алгоритмов решения подобных задач (что собственно говоря подтверждается численными экспериментами).

Опишем содержание работы. В первом параграфе описаны условия на данные задачи и сформулированы основные результаты. Во втором параграфе приведено их доказательство. Обозначения функциональных пространств стандартные (см., например, [8]).

1. Определения, обозначения, и формулировка основных результатов

Через $B(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов, определенных на X со значениями в Y. Если $X = Y$ пишем $B(X)$ вместо $B(X, X)$. Как обычно символы $\rho(L), \sigma(L)$ обозначают спектр и резольвентное множество оператора L. Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_n(G)}$ [8]. Мы также используем пространства $C^k(\overline{G}; E)$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т.д. стандартные (см. [8,13,10]). При нецелых s пространство Соболева $W_p^s(G; E)$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^s(G; E)$. Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $B_{p,p}^s(G)$. Аналогично вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Будем считать, что аналогичное соглашение справедливо и для матриц, т.е. включение $a \in W_p^s(G)$ для данной матрицы-функции $a = \{a_{ij}\}_{j,i=1}^k$ означает, что $a_{ij}(x) \in W_p^s(G)$ для всех i, j. Для данного интервала $J = (0, T)$, положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$, Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$.

Определение вложения $\Gamma \in C^{2m}$ может быть найдено в [3]. Далее, мы считаем, что параметр $p > n + 2m$ зафиксирован. Пусть $B_\delta(x_i)$ – шар радиуса δ с центром в точке x_i. Дан набор точек $\{x_j\}$ из (0.3), параметр $\delta > 0$ назовем допустимым, если $\overline{B_\delta(x_i)} \subset G$, $\overline{B_\delta(x_i)} \cap \overline{B_\delta(x_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1,2, \dots, r$. Пусть $Q^\tau = (0, \tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(x_i)$, $Q_\delta = (0, T) \times G_\delta$, $Q_\delta^\tau = (0, \tau) \times G_\delta$.

Далее во всех условиях мы считаем, что допустимый параметр $\delta > 0$ зафиксирован и не будем это оговаривать. Зафиксируем также некоторую функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $supp\, \varphi \subset G_\delta$ и $\varphi(x) = 1$ для $x \in G_{\delta/2}$.

Условия согласования и гладкости данных могут быть записаны в виде:

$$u_0(x) \in B_{p,p}^{2m-2m/p}(G), g_j \in W_p^{k_j, 2mk_j}(S), k_j = (2m - m_j - 1/p)/(2m), \quad (1.1)$$

$$\varphi(x) \nabla u_0(x) \in B_{p,p}^{2m-2m/p}(G_\delta), \quad (1.2)$$

$$\psi_j(t) \in C^1([0, T]), \qquad \psi_j(0) = u_0(x_j), j = 1,2, \dots, s. \quad (1.3)$$

Условия на коэффициенты операторов A, B_j более или менее стандартные. Более того, для простоты выкладок мы будем использовать не самые точные условия на коэффициенты. Мы считаем, что

$$\begin{gathered} a_{i\alpha}(t, x) \in L_\infty(Q) \ \ (|\alpha| < 2m), \\ a_{i\alpha} \in C(\overline{Q}) \ (|\alpha| = 2m, i = r + 1, \dots, sh + 1), \\ b_{j\beta} \in C^{1-m_j/2m, 2m-m_j}(\overline{S}) \ (j = 1, \dots, m, |\beta| \leq m_j), \end{gathered} \quad (1/4)$$

$$b_j(t, x) \in L_p(Q), \nabla_x b_j(t, x) \in L_p(Q_\delta) \ (j = 1,2, \dots, r), \quad (1/5)$$

$$\begin{gathered} \nabla_x a_{i\alpha}(t, x) \in L_\infty(Q_\delta) \ \ (|\alpha| < 2m), \\ \nabla_x a_{i\alpha} \in L_\infty(Q_\delta) \ (|\alpha| = 2m, i = r + 1, \dots, sh + 1), \end{gathered} \quad (1/6)$$

Мы будем искать функции q_i в классе непрерывных функций. В связи с этим потребуем также, чтобы

$$a_{i\alpha}(t, x_j), b_l(t, x_j) \in C([0, T]), g(x_j, t, p) \in C([0, T] \times B_R) \ \forall R > 0 \quad (1/7)$$

при всех $l = 1, \dots, r$, $j = 1,2, \dots, s$ и $|\alpha| < 2m$.

Рассмотрим матрицу $B(t)$ размера $sh \times sh$, строчки которой с номерами с номерами от $(j-1)h + 1$ до jh занимают вектора-столбцы

$$(-b_1(t, x), -b_2(t, x), \dots, -b_r(t, x), A_{r+1}u_0(x), \dots, A_{sh}u_0(x))|_{x=x_j}.$$

Можно показать, используя условия (1.1), (1.2), (1.4), (1.7) и теоремы вложения (см. лемму 1 ниже), что элементы этой матрицы непрерывны на $[0,T]$. Потребуем, чтобы существовала постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$|\det\ B(t)| \geq \delta_0\ \ \forall t \in [0,T]. \qquad (1/8)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$B(t)\vec{q}^{\ 0} = \vec{g}, \vec{q}^{\ 0} = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_{sh}^0),$$

где $\vec{g}$ – вектор-столбец, координаты которого с номерами от $(j-1)h+1$ до jh есть вектор $f(t,x_j) - A_{sh+1}u_0(x_j) - \psi_{jt}(t) + g(t,x_j,u_0(x_j),\dots,D^{2m-1}u_0(x_j))$. При выполнении условия (1.8) система (1.9) имеет единственное решение $\vec{q}^{\ 0} = (q_1^0,\dots,q_{sh}^0) = (B(t))^{-1}\vec{g}(t)$. Приведенные выше условия на данные задачи гарантируют, что $\vec{q}^{\ 0} \in C([0,T])$.

Рассмотрим операторы

$$A_0(t,x,D) = \sum_{i=r+1}^{sh} q_i^0\,(t,x')A_i(t,x,D_x) + A_{hs+1}(t,x,D_x),$$

$$A_0^0(t,x,D) = \sum_{i=r+1}^{sh} q_i^0\,(t,x')A_{i0}(t,x,D_x) + A_{sh+1\,0}(t,x,D_x),$$

где $A_{i0}(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{i\alpha}\,(t,x)\xi^\alpha$, и предположим что оператор $\partial_t + A_0$ параболичен, т.е.

найдется постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что любой корень p многочлена

$$\det(A_0^0(t,x,i\xi) + pE) = 0$$

(E – единичная матрица) удовлетворяет неравенству

$$\text{Re } p \leq -\delta_1|\xi|^{2m}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall (x,t) \in Q. \qquad (1.9)$$

Условие Лопатинского запишется в виде: для любой точки $(t_0,x_0) \in S$ запишем операторы A_0^0, B_{j0} ($B_{j0} = \sum_{|\beta|=m_i} b_{j\beta}\,D^\beta$) в локальной системе координат y (ось y_n направлена по нормали к S а остальные оси лежат в касательной плоскости) и предположим, что система

$$(\lambda E + A_0^0(i\xi', \partial_{y_n}))v(z) = 0 \ \ B_{j0}(i\xi', \partial_{y_n})v(0) = h_j, \qquad (1.10)$$

($\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$, $y_n \in \mathbb{R}^+$, $j = 1,2,\dots,m$) имеет единственное решение из $C(\overline{\mathbb{R}^+};E)$ убывающее на бесконечности для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\arg\ \lambda| \leq \pi/2$ и $h_j \in E$ таких что $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Алгебраические условия, гарантирующие выполнение (1.11) могут быть найдены, например, в [3]. Справедлива следующая теорема (первая половина утверждения вытекает из теоремы 10.4 в [3], а доказательство второй половины по существу содержится в доказательстве теоремы 1.1 в [6]).

Теорема 1. *Пусть G – ограниченная область с границей класса C^{2m}, условия* (1.1), (1.4), (1.10), (1.11) *выполнены и $k_j \neq 1/p$ для всех $j = 1,2,\dots,m$. Тогда если $g \in L_p(Q)$, то существует единственное решение $u \in W_p^{1,2m}(Q)$ задачи*

$$u_t + A_0(t,x,D_x)u = g, u|_{t=0} = u_0(x), \qquad B_j u|_S = g_j\ (j=1,\dots,m), \qquad (1.11)$$

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q)} \leq c\left[\|g\|_{L_p(Q)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_p^{k_j,2mk_j}(S)} + \|u_0\|_{B_{pp}^{2m-2m/p}(G)}\right],$$

где c –постоянная, не зависящая от данных задачи g, g_j, u_0 и решения u. Пусть дополнительно выполнены условия (1.2), (1.5), (1.6) *и $\varphi g \in L_p(0,T;W_p^1(G))$. Тогда решение u задачи* (1.11) *обладает свойством $\varphi u \in L_p(0,T;W_p^{2m+1}(G))$, $\varphi u_t \in L_p(0,T;W_p^1(G))$, $\varphi\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q)$. Если $u_0 = 0, g_j = 0$ для всех j, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что решение u удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq c\|g\|_{L_p(Q^\tau)},$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0,T]$. Соответственно, при дополнительном условии найдется постоянная $c > 0$, не зависящая от $\tau \in (0,T]$ и такая, что

$$\|\varphi\nabla u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} \leq c(\|g\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\varphi g\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G))}).$$

Опишем свойства нелинейной вектор-функции $g(t,x,u,Du,\dots,D^{2m-1}u)$. Обозначим через p вектор $p = (p_1,p_2,\dots,p_{r_0})$, где r_0 – число h умноженное на количество различных производных вида $D^\alpha u$ с $0 \leq |\alpha| \leq 2m-1$. Вектор p отвечает аргументам $u, Du, \dots, D^{2m-1}u$ функции g. Пусть B_R – шар радиуса R с центром в нуле в $\mathbb{R}^{r_0}$.

Условие (A). Функция $g(t,x,p)$ непрерывна по параметру $p \in \mathbb{R}^{r_0}$ при п.в. $(t,x) \in Q$ и измерима по для каждого p; для каждого $R > 0$ найдется функция $\Phi_0(t,x) \in L_p(Q)$ такая, что

$$|g(t,x,p^1) - g(t,x,p^2)| \leq |\Phi_0(t,x)||p_1 - p_2|,$$

для всех $p^1, p^2 \in B_R$; найдется допустимое $\delta > 0$ такое, что для каждого $R > 0$ $g \in L_p(0,T;W_p^1(G;C(\overline{B_R})))$; при почти всех $(t,x) \in Q$ g непрерывно дифференцируема по p и производные g_{x_j}, g_{p_i} ($j = 1,2,\dots,n$, $i = 1,2,\dots,r_0$) удовлетворяют условию Липшица в следующем смысле: для каждого $R > 0$ найдутся функции $\Phi_i(t,x) \in L_p(Q)$ ($i = 1,2$) такие, что

$$|g_{p_j}(t,x,p^1) - g_{p_j}(t,x,p^2)| \leq |\Phi_1(t,x)||p^1 - p^2|, j = 1,2,\dots,r_0,$$

$$|g_{x_i}(t,x,p^1) - g_{x_i}(t,x,p^2)| \leq |\Phi_2(t,x)||p^1 - p^2|, i = 1,2,\dots,n,$$

для всех $p^1, p^2 \in B_R$ и п.в. $(t,x) \in Q_\delta$.

Теорема 2. *Пусть условия* (A), (1.1)-(1.10) *выполнены, $k_j \neq 1/p$ для всех j, $f \in L_p(Q)$, $\varphi f \in L_p(0,T;W_p^1(G))$. Тогда найдется число $\tau_0 \in (0,T]$ такое, что существует единственное решение $(u,q_1,\dots,q_{sh})$ задачи* (0.1)-(0.3) *из класса*

$$u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}): \ \varphi\nabla u \in W_p^{1,2m}(Q^{\tau_0}), \qquad q_j \in C([0,T]), j = 1,2,\dots,sh.$$

2. Доказательство основных результатов.

Нам понадобится одно вспомогательное утверждение, вытекающее из теорем вложения, доказательство которого имеется, например, в работе [6].

Лемма 1. *Если $u \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ $(\tau > 0, p > n + 2m)$, то производная вида $D_x^\alpha u$ при $|\alpha| \le 2m - 1$ быть может после изменения на множестве меры нуль принадлежит $C(\overline{Q^\tau})$ и если $u(0, x) = 0$, то для всех α с $|\alpha| < 2m$ справедлива оценка*

$$\|D^\alpha u\|_{C(\overline{Q^\tau})} \le c\|u\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}\tau^\beta,$$

где β, c – некоторые положительные постоянные, не зависящие от u.

Доказательство теоремы 2. Пусть u – решение задачи (0.1)-(0.3). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Phi_t + A_0(t, x, D)\Phi = g_0, \qquad \Phi(0, x) = u_0(x), B_j\Phi|_S = g_j \ (j = 1,2, \dots, m), \quad (2.1)$$

$$g_0 = f + g(x, t, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0) + \sum_{i=1}^{r} b_i(t, x)q_i^0(t),$$

Сделав замену переменных $u = v + \Phi$, мы придем к задаче

$$v_t + A_0 v + A(\vec{\mu})v = \tilde{g} - A(\vec{\mu})\Phi + \sum_{i=1}^{r} b_i(t, x)\mu_i(t), \quad (2.2)$$

$$v|_{t=0} = 0, \qquad B_j v|_S = 0 \ (j = 1,2, \dots, m). \quad (2.3)$$

$$v(t, x_j) = \psi_j - \Phi(t, x_j) = \tilde{\psi}_j, \qquad i = 1,2, \dots, s, \quad (2.4)$$

где

$\tilde{g} = g(t, x, v + \Phi, D(v + \Phi), \dots, D^{2m-1}(v + \Phi)) - g(x, t, u_0, Du_0, \dots, D^{2m-1}u_0)$

$\mu_i(t) = q_i(t) - q_i^0(t)$, $\quad A(\vec{\mu}) = \sum_{i=r+1}^{sh}\mu_i(t)A_i$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{sh})$. Таким образом, свели задачу (0.1)-(0.3) к эквивалентной и более простой задаче (2.2)-(2.4), которую мы и будем исследовать. Фиксируя функции $\mu_j \in C([0, \tau])$ и находя решение v задачи (2.3)-(2.4) на интервале $(0, \tau)$, мы получим отображение $v = v(\vec{\mu})$. Изучим его свойства. Положим $\|\vec{\mu}\|_{C([0,\tau])} = \sum_{i=1}^{sh}\|\mu_i\|_{C([0,\tau])}$. Используя теорему 1, сведем задачу о нахождении функции $v = v(\vec{\mu})$ к исследованию уравнения

$$v = (\partial_t + A_0)^{-1}\tilde{g} - (\partial_t - A_0)^{-1}A(\vec{\mu})(v + \Phi) + (\partial_t + A_0)^{-1}\sum_{i=1}^{r} b_i(t, x)\mu_i(t). \quad (2.5)$$

Из оценки теоремы 1 для решения вытекает и оценка для нормы оператора $(\partial_t + A_0)^{-1}$ на произвольном интервале $(0, \tau)$ $(\tau \le T)$. Определим пространство H_τ функций $v \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ таких, что $\varphi\nabla v \in W_p^{1,2m}(Q^\tau)$ и v удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям. Введем норму в нем норму $\|v\|_\tau = \|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} + \|\varphi\nabla v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)}$. Далее, из теоремы 1 имеем

$$\|(\partial_t + A_0)^{-1}A(\vec{\mu})v\|_\tau \le c\|A(\vec{\mu})v\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\varphi A(\vec{\mu})v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(G))} \le cc_1\|v\|_\tau\|\vec{\mu}\|_{C([0,\tau])},$$

где постоянная c_1 зависит от норм коэффициентов операторов A_i в $L_\infty(Q)$ и не зависит от τ. Выберем шар, в котором мы будем искать решение $\vec{\mu}$. Далее считаем, что

$$\|\vec{\mu}\|_{C([0,\tau])} \le \frac{1}{4cc_1} = r_1, \quad (2.6)$$

т.е. $\mu \in B_{r_1}(\tau)$ - шар в пространстве $C([0, \tau])$ радиуса r_1. При выполнении этого условия норма оператора $(\partial_t + A)^{-1}A(\vec{\mu})v$ в $B(H_\tau)$ оценивается через 1/4. Оценим оставшиеся слагаемые в (2.5). Обозначим правую часть (2.5) через $R(v)$. Аналогично имеем, что

$$\|(\partial_t - A_0)^{-1}A(\vec{\mu})\Phi + (\partial_t + A_0)^{-1}\sum_{i=1}^{r} b_i(t, x)\mu_i(t)\|_\tau \le c_2 r_1\|\Phi\|_T + c_3 r_1, \quad (2.7)$$

где постоянные c_i не зависят от τ. Положим $R_0 = 4(c_2 r_1\|\Phi\|_T + c_3 r_1)$. Ищем решение уравнение (2.5) в шаре $U_{R_0} = \{v \in H_\tau : \|v\|_\tau \le R_0\}$. Наконец, используя условие (A), легко получить оценку

$$\|(\partial_t + A_0)^{-1}\tilde{g}\|_\tau \le c(R_0)(\|v\|_{C([0,\tau];C^{2m-1}(\overline{G}))} + \|\Phi - u_0\|_{C([0,\tau];C^{2m-1}(\overline{G}))}). \quad (2.8)$$

В силу леммы 1 правая часть оценивается через

$$R_2 = c_1(R_0)(\tau^\beta\|v\|_{W_p^{1,2m}(Q^\tau)} + \|\Phi - u_0\|_{C([0,\tau];C^{2m-1}(\overline{G}))}).$$

Выберем τ_0 такое, что $R_2 \le R_0/2$ при $\tau \le \tau_0$. При таком выборе, в силу (2.7), (2.8) имеем, что $\|R(v)\|_\tau \le R_0$ при всех $v \in U_{R_0}$, т.е. оператор R переводит шар U_{R_0} в себя. Покажем сжимаемость оператора. Совершенно аналогично имеем оценку (при $\tau \le \tau_0$)

$$\|R(v_1) - R(v_2)\|_\tau \le c_4(R_0)\tau^\beta\|v_1 - v_2\|_\tau + 1/4\|v_1 - v_2\|.$$

Выбирая $\tau_1 \le \tau_0$ так чтобы $c_4(R_0)\tau^\beta \le 1/4$, мы получим, что оператор R сжимающий и значит уравнение (2.5) имеет единственное решение в шаре U_{R_0} из H_τ при $\tau \le \tau_1$. Получим некоторые дополнительные оценки. Пусть v_1, v_2 два решения уравнения (2.5) отвечающие двум различным векторам $\vec{\mu}^1, \vec{\mu}^2 \in B_{r_1}(\tau)$. Вычитая равенства (2.5) и используя условие (A) и лемму 1, получим оценку

$$\|v_1 - v_2\|_\tau = \|R_1(v_1) - R_2(v_2)\|_\tau \le (c\tau^\beta + 1/4)\|v_1 - v_2\| + c(R_0)\|\vec{\mu}^1 - \vec{\mu}^2\|_{C([0,\tau])},$$

откуда, взяв $\tau_2 \le \tau_1$ достаточно малым, получим оценку

$$\|v_1 - v_2\|_\tau \le 2c(R_0)\|\vec{\mu}^1 - \vec{\mu}^2\|_{C([0,\tau])} \quad (2.9)$$

при $\tau \le \tau_2$. Перейдем к построению решения обратной задачи. Пусть v – решение задачи (2.2)-(2.4) из класса H_τ. Для сокращения записи, мы ниже пишем в качеств аргумента у функции $\tilde{(g)}$ только три величины (t,x,v). Из определения этого класса вытекает в частности, что определены следы в точке $x=x_j$ всех функций входящих в уравнение (2.2) и мы имеем

$$\tilde{\psi}_{jt} + A_0 v(t,x_j) + A(\vec{\mu})v(t,x_j) = \tilde{g}(t,x_j,v(t,x_j)) - A(\vec{\mu})\Phi(t,x_j) + \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x_j)\mu_i(t), j=1,2,\dots,s. \quad (2.10)$$

Эти равенства можно записать в виде операторного уравнения

$$\tilde{B}\vec{\mu} = F + S(\vec{\mu}), \quad (2.11)$$

где матрица $\tilde{B}(t)$ имеет размер $sh \times sh$ и ее строчки с номерами с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы

$(-b_1(t,x), -b_2(t,x), \dots, -b_r(t,x), A_{r+1}\Phi(t,x), \dots, A_{sh}\Phi(t,x))|_{x=x_j}$.

Имеем $\tilde{B}(0) = B(0)$ и значит найдется $\tau_3 \le \tau_2$ такое, что $|det\,\tilde{B}(t)| > \delta_1 > 0$ на $[0,\tau_3]$, где δ_1 – некоторая положительная постоянная. В правую часть (2.11) входит вектор-функция $S(\vec{\mu})$, координаты которой с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы $-A_0 v(t,x_j) - A(\vec{\mu})v(t,x_j) + \tilde{g}(t,x_j,v(t,x_j)) - \tilde{g}(t,x_j,0)$, где функция $v = v(\vec{\mu}))$ – решение задачи (2.2), (2.3). По доказанному, этот оператор $\vec{\mu} \to v(\vec{\mu})$ определен для всех векторов $\vec{\mu} \in B_{r_1}(\tau)$ при $\tau \le \tau_2$. Свойства этого отображения $\vec{\mu} \to v(\vec{\mu})$ мы уже исследовали. У вектор-функция F координаты с номерами от $(j-1)h+1$ до jh занимают вектора-столбцы $F_j = -\tilde{\psi}_{jt}$. Система (2.11) и есть искомая система для нахождения величин μ_i. Покажем, что можно найти такое $\tau_4 \le \tau_3$, что оператор $B^{-1}F + B^{-1}S(\vec{\mu})\colon C([0,\tau_4] \to C([0,\tau_4])$, определен, переводит шар $B_{r_1}(\tau_4)$ в пространстве $C([0,\tau_4])$ в себя и является в нем сжимающим. По построению величин q_j^0 $F_j(0) = 0$. Тем же свойством обладает функция $S(0)$. Следовательно, найдется $\tau^1 \le \tau_3$ такое, что $\|F - S(0)\|_{C([0,\tau])} \le r_1/2$ при всех $\tau \le \tau^1$. Используя лемму 1, получим $(\tau \le \tau^1)$

$$\|B^{-1}S(\vec{\mu}_1)(t) - B^{-1}S(\vec{\mu}_2)(t)\|_{C([0,\tau])} \le c_1 \sum_{i=1}^{s} (\|A_0(v_1 - v_2)(t,x_j)\|_{C([0,\tau])} + \|A(\mu_1-\mu_2)v_1(t,x_j)\|_{C([0,\tau])} + \|A(\mu_2)(v_1-v_2)(t,x_j)\|_{C([0,\tau])} + \|A_0(v_1-v_2)(t,x_j)\|_{C([0,\tau])} + \|\tilde{g}(t,x_j,v_1(t,x_j)) - \tilde{g}(t,x_j,v_2(t,x_j))\|_{C([0,\tau])}.$$

Тогда используя лемму 1 и оценку (2.9) получим неравенство

$$\|B^{-1}S(\vec{\mu}_1)(t) - B^{-1}S(\vec{\mu}_2)(t)\|_{C([0,\tau])} \le c_6(R_0)\tau^{\beta}\|\mu^1 - \mu^2\|_{C([0,\tau])}, \quad (2.12)$$

где β — некоторая положительная постоянная. Выберем $\tau^2 \le \tau^1$ такое, что $c_6(R_0)(\tau^2)^{\beta} \le 1/2$. Положим $\tau_4 = \tau^2$. Тогда из (2.12) вытекает, что оператор $B^{-1}(F + S(\vec{\mu}))$, определен, переводит шар $B_{r_1}(\tau_4)$ в себя и является в нем сжимающим. Применяя теорему о неподвижной точке, получим, что в шаре $B_{r_1}(\tau_4)$ существует единственное решение системы (2.11).

Положим $v = v(\vec{\mu})$. Покажем, что построенная функция удовлетворяет условиям (2.4). По построению v – решение задачи (2.2)-(2.3). Взяв $x = x_j$ в (2.2), получим

$$v_t(t,x_j) + A_0 v(t,x_j) + A(\vec{\mu})v(t,x_j) = \tilde{g}(t,x_j,v(t,x_j)) - A(\vec{\mu})\Phi(t,x_j) + \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x_j)\mu_i(t), j=1,2,\dots,s.$$

Вычитая это равенство из (2.10) получим $(v(t,x_j) - \tilde{\psi}_j))_t = 0$ для всех j. Откуда получим требуемое.

Замечание

Способ доказательства достаточно конструктивен и позволяет на его основе строить соответствующий численный алгоритм решения. Численные эксперименты в случае систем второго порядка были проведены и показали достаточно хорошую сходимость алгоритма.

Литература

1. *Алифанов О.М., Артюхов Е.А., Ненароком А.В.* Обратные задачи сложного теплообмена. М: Янус-К, 2009.
2. *Белов, Ю.Я., Коршун К.В.* О задаче идентификации функции источника для уравнения типа Бюргерса // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2012. Т. 5(4), P. 497-506.
3. *Ладыженская О.А. Солонников В.А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
4. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа // *Дифференц. уравнения.* 1987. Т. 23, 10. С. 1791-1799.
5. *Соловьев В.В.* Существование решения в «целом» обратной задачи опре- деления источника в квазилинейном уравнении параболического типа, Дифференц. уравнения, 1996, том 32, номер 4, 536-544.
6. *Пятков С.Г., Самков М.Л.* О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // *Матем. тр.* 2012. Т. 15, 1. С. 155–177.
7. *Пятков С.Г., Ротко В.В.* Об определении функции источника в квазилинейных параболических задачах с точечными условиями переопределения // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2017. Т. 9, 4. С. 19-26.

8. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
9. *Afinogenova O.A., Belov Yu.Ya., Frolenkov I.V.* Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation // Doklady Mathematics. 2009. V. 79, N 1. P. 70-72.
10. *Amann H.* Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications // Math. Nachr. 1997. V. 186, N 1, P. 5-56.
11. Badia A.El, Hamdi A. Inverse source problem in an advection-dispersion- reaction system: application to water pollution // Inverse Problems. 2007. V. 23. P. 2103-2120.
12. *Badia A.El, Ha-Duong T.* Inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem. // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. V. 10, N 6. P. 585-599.
13. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 193-224.
14. *Mamonov A.V., Tsai Y-H.* . Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // Inverse Problems. 2013. V. 29, N 3. 26 p.
15. *Marchuk G.I.* Mathematical Models in Environmental Problems. Studies in Mathematics and its Applications. V. 16. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986.
16. *Ozisik M.N., Orlande H.R.B.* Inverse Heat Transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
17. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
18. *Pyatkov S.G., Rotko V.V.* On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1907, 020008.

Ротко Валерий Витальевич. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Югорский государственный университет» г. Ханты-Мансийск. Россия. Аспирант. Количество печатных работ: 8. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения и операторы, вычислительная математика. E-mail: v_rotko@ugrasu.ru

On some classes of inverse problems for convection-diffusion systems and their generalizations

V.V. Rotko[I]

[I] Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Ugra State University"

Abstract. The article considers the question of the correctness in Sobolev spaces of coefficient inverse problems for quasilinear mathematical models of convection-diffusion. Unknown time-dependent functions enter the source function and the operator itself as coefficients. As redefinition conditions, the values of the solution in a certain set of internal points of the region are considered. The conditions guaranteeing the local-in-time correctness of the problem in Sobolev classes are given. The conditions for these tasks are minimal. The results are accurate.

Keywords. parabolic system, inverse problem, source function, convection-diffusion, heat and mass transfer.
DOI: 10.14357/20790279190407

References

1. *Alifanov O.M., Artyukhov E.A., Nenarokom A.V.* Obratnie zadachi slojnogo teploobmena [Inverse problems of complex heat transfer]. M: Janus-K, 2009.
2. *Belov Yu.Ya., Korshun K.V.* O zadache identifikacii funkcii istochnika dlya uravneniya tipa Byurgersa [On the problem of identifying a source function for an equation of Burgers type]. // J. of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2012. Vol. 5 (4), P. 497-506.
3. *Ladyzhenskaya O.A. Solonnikov V.A., Uraltseva N.N.* Lineinie i kvazilineinie uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. M .: Nauka, 1967.
4. *Prilepko A.I., Soloviev V.V.* Teoremi razreshimosti i metod Rote v obratnih zadachah dlya uravneniya parabolicheskogo tipa [Solvability theorems and the Rothe method in inverse problems for an equation of parabolic type]. // Differenc. uravneniya [Differ.

equations]. 1987.Vol. 23, 10.C. 1791-1799.
5. *Soloviev V.V.* Suschestvovanie resheniya v “celom” obratnoi zadachi opredeleniya istochnika v kvazilineinom uravnenii parabolicheskogo tipa [Existence of a solution as a whole of the inverse problem of determining the source in a quasilinear equation of parabolic type], Differenc. uravneniya [Differ. Equations], 1996, Volume 32, Number 4, 536-544.
6. *Pyatkov S.G., Samkov M.L.* O nekotorih klassah koefficientnih obratnih zadach dlya parabolicheskih sistem uravnenii [On some classes of coefficient inverse problems for parabolic systems of equations]. // Matem. Tr. 2012. V. 15, 1. C. 155–177.
7. *Pyatkov S.G., Rotko V.V.* Ob opredelenii funkcii istochnika v kvazilineinih parabolicheskih zadachah s tochechnimi usloviyami pereopredeleniya [On determining the source function in quasilinear parabolic problems with point redefinition conditions] // Vestnik YuUrGU. Seriya “Matematika. Mehanika. Fizika” [Vestnik SUSU. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”]. 2017. Vol. 9, 4.P. 19-26.
8. *Tribel H.* Teoriya interpolyacii. Funkcionalnie prostranstva. Differencialnie operatori [Theory of interpolation. Functional spaces. Differential operators]. M .: Mir, 1980.
9. *Afinogenova O.A., Belov Yu.Ya., Frolenkov I.V.* Stabilization of the solution to the identification problem of the source function for a one-dimensional parabolic equation // Doklady Mathematics. 2009. V. 79, N 1. P. 70-72.
10. *Amann H.* Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications // Math. Nachr. 1997. V. 186, N 1, P. 5-56.
11. *Badia A.El, Hamdi A.* Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution // Inverse Problems. 2007. V. 23. P. 2103-2120.
12. *Badia A.El, Ha-Duong T.* Inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem. // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. V. 10, N 6. P. 585-599.
13. *Denk R., Hieber M., Prüss J.* Optimal L_p-L_q-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 193-224.
14. *Mamonov A.V., Tsai Y-H.R.* Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // Inverse Problems. 2013. V. 29, N 3.26 p.
15. *Marchuk G.I.* Mathematical Models in Environmental Problems. Studies in Mathematics and its Applications. V. 16. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986.
16. *Ozisik M.N., Orlande H.R.B.* Inverse Heat Transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
17. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
18. *Pyatkov S.G., Rotko V.V.* On some parabolic inverse problems with the pointwise overdetermination // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1907, 020008.

V.V. Rotko. P.G., Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Ugra State University”, 16 Chekhova str., Khanty-Mansiysk, 628000, e-mail: v_rotko@ugrasu.ru