

# Методы и модели в экономике

## К теории неравновесных финансовых рынков\*

В.Н. Костюк<sup>1</sup>, М.П. Фролова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

**Аннотация.** Рассматриваемая статья посвящена весьма актуальной и малоизученной проблеме теории неравновесных финансовых рынков – их поведению, когда имеются на рынке арбитражные возможности, а случайные изменения цен образуют Винеровский процесс. Для рассматриваемых неравновесных финансовых рынков принимается выполнение следующих условий: арбитражность рынка, аномальность случайных активов, надувание и сдувание пузырей, возникновение кризисов. Для анализа соответствующего их поведения в статье предлагается использовать элементы хорошо разработанных космологических теорий, дается содержательная интерпретация основных заимствованных из нее параметров (энергия состояния рынка  $E$  и др.). На этой основе высказываются полезные утверждения и допущения о финансовом кризисе, фракталах, белом и черном шуме, гипотезе мартингалности.

**Ключевые слова:** капитализм, социализм, развал Советского Союза, экономика, социум, индустриализация, богатство, нищета, уровень жизни населения, неравенство.

**DOI:** 10.14357/20790279200108

Предметом современной финансовой теории в значительной степени являются равновесные финансовые рынки или рынки, находящиеся «вблизи» от равновесия. Простейшим и вместе с тем фундаментальным примером такого рынка является классический эффективный рынок. На таком рынке отсутствуют арбитражные возможности, и изменения цен на нем, будучи случайными, образуют винеровский процесс<sup>2</sup>. На таком рынке «цены устанавливаются так, что оказываются в состоянии «равновесия», становятся «справедливыми»» [4, с.48]

\* Ряд важных положений этой статьи проф. В.Н.Костюк обсуждал с зав.лабораторией В.Н. Лившицем еще в 2015 году.

<sup>1</sup> Переменная  $z$  подчиняется винеровскому процессу, если изменение  $\Delta z$  на протяжении малого промежутка времени  $\Delta t$  удовлетворяет равенству:  $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ , где  $\varepsilon$  – случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному распределению  $\theta(0,1)$  Кроме того, величины  $\Delta z$  на двух малых промежутках времени  $\Delta t$  являются независимыми. Из этого определения следует, что величина  $\Delta z$  имеет нормальное распределение, у которого математическое ожидание равно нулю, стандартное отклонение равно  $\sqrt{\Delta t}$ , а дисперсия равна  $\Delta t$ .

Областью применимости таких представлений служат спокойные финансовые рынки, на которых отсутствуют заметные возмущения. Напротив, если рынок не является спокойным, если на нем возникают длительные тенденции и различного рода катаклизмы, то можно говорить о неравновесном поведении финансового рынка. Такие ситуации возникают все чаще, и это делает актуальным создание теории неравновесных финансовых рынков.

Для неравновесных финансовых рынков выполняются, в частности, следующие условия<sup>3</sup>:

- 1) сохранение арбитражных возможностей (рынок не является безарбитражным);
- 2) подчинение случайных изменений цен активов распределениям вероятностей, отличных от нормального. В первую очередь речь идет о степенных распределениях вероятностей;

<sup>2</sup> Этот перечень заведомо является неполным и может быть расширен тем или иным способом.

- 3) существующие арбитражные возможности могут не использоваться при наличии более выгодного способа поведения, состоящего в том, что инвестор поступает противоположным арбитражу образом, покупая дорожающий актив и/или продавая дешеветельный актив. Но для этого на рынке должны сложиться условия, заставляющие его предполагать, что дорожающий актив будет и дальше дорожать, а дешеветельный актив будет и дальше дешеветь. Основания для такого предположения задают тот или другой конкретный способ неравновесного поведения рынка.
- 4) перемещения по финансовым рынкам изменяющихся во времени эндогенных денежных масс, растущих или уменьшающихся под влиянием эндогенных мультипликаторов

Напомним, что эндогенной частью денежной массы  $M$  называется разность  $M - B$ , где  $B$  – денежная база. Иначе говоря, это та часть денежной массы, которая непосредственно не контролируется центральным банком. Она создается в основном коммерческими банками и их клиентами, действующими при ограничениях, задаваемых центральными банками. Простым, но важным примером эндогенного мультипликатора служит кредитный мультипликатор  $1/\gamma$  ( $\gamma$  – стоимость кредита). Чем дешевле кредит, тем больше значение кредитного мультипликатора и тем больше величина находящаяся в обороте кредитных денег  $\Delta M_0/\gamma$  ( $\Delta M_0$  – первоначальная величина кредитов). С удорожанием кредитов процесс разворачивается в обратную сторону.

- 5) аperiodическое появление (надувание) и исчезновение (сдувание) финансовых пузырей, а также возникновение финансовых кризисов. Финансовый кризис может быть понят как сдувание финансового пузыря, охватившего весь финансовый рынок или его значительную часть. Пузыри и кризисы – характерная особенность неравновесного поведения рынка, отсутствующая при его равновесном поведении.

В современной теории финансов, которая не ограничивает себя изучением состояний финансового рынка, близких к равновесию, основными инструментами исследования возникающих событий и процессов являются представления о фракталах, степенных распределениях вероятностей, структурированной секьюритизации, теория показателя Херста  $H$ . Однако этот перечень не является полным и нуждается в пополнении. В этой статье мы рассмотрим одного из кандидатов на такое пополнение.

Дело в том, что надувание финансового пузыря можно рассматривать как расширение фи-

нансового рынка или его части, а сдувание пузыря и разрешение финансового кризиса – как сжатие того, что ранее было расширено. В существующих финансовых теориях нет хорошо разработанных понятий сжатия и расширения рынка как его пространственных и временных характеристик, но эти понятия достаточно хорошо изучены в других теориях.

Речь идет, прежде всего, о некоторых чертах современной космологической теории, в которой расширение Вселенной – основной объект изучения. Специалисты в этой области знаний сильно продвинулись в изучении этого процесса. Поэтому представляет интерес гипотеза, согласно которой расширение Вселенной имеет некоторые общие черты с расширением финансовых рынков, а сжатие Вселенной – с сжатием финансовых рынков. Однако для того, чтобы увидеть это, нужны определенные усилия, состоящие в нахождении подходящей переинтерпретации некоторых космологических понятий. Прежде всего, это касается понятия энергии, играющей существенную роль в расширениях и сжатиях Вселенной.

Согласно современным космологическим представлениям, энергия вещества во Вселенной не сохраняется [2]:

$$dE = -p dV \quad (1)$$

Здесь  $E$  – энергия вещества,  $V$  – пространственная характеристика Вселенной,  $p$  – давление. Согласно (1), если Вселенная расширяется ( $dV > 0$ ), то ее энергия уменьшается при условии, что давление  $p$  положительно.

Равенство (1) можно записать и для финансовых рынков, если дать финансовую интерпретацию величинам  $E$ ,  $V$  и  $p$ , а также дать подходящую интерпретацию понятию вещества. Вместо вещества будем говорить о ценных бумагах различной природы, обращающихся на рынке.  $V$  будем понимать, как размеры (капитализацию) рынка. Величина  $p$  есть нормированная разность между числом покупаемых и продаваемых бумаг за малый промежуток времени. Если бумаг покупается больше, чем продается, то объем рынка растет, в противном случае объем рынка уменьшается. При таком понимании величины  $p$  и  $dV$  в финансовой теории становятся зависимыми. При  $p > 0$  объем рынка растет, в противном случае уменьшается.

Самое трудное – дать подходящую финансовую интерпретацию величине  $E$ . Для достижения этой цели будем понимать энергию рынка как способность рынка изменять свое состояние (т.е. переходить из текущего состояния в одно из его альтернативных состояний). Множество таких состояний

обозначим через  $\psi$ . Чем больше  $\psi$ , тем больше энергия  $E$  данного состояния рынка, и наоборот. Переинтерпретированное равенство (1) тогда означает: с ростом размеров финансового рынка его энергия (способность перейти в другое состояние) уменьшается.

С помощью такой переинтерпретации докажем следующее утверждение.

*Утверждение 1.* Неограниченное увеличение размеров финансового рынка приводит, вообще говоря, к финансовому кризису.

Для доказательства этого утверждения требуется дополнительное допущение, связанное с понятием энергии рынка.

Допущение 1. Энергия рынка полностью не исчезает.

Это означает, что множество  $\psi$  не может быть пустым. Поэтому существует некоторое предельно малое значение энергии, для которого  $\psi = 1$  (представляет собой множество, состоящее из одного элемента). Эти элементы могут быть различной природы.

Для определенности представим себе, что множество  $\psi$  состоит из элементов, каждый из которых представляет собой некоторый временной ряд оценки изменения цен активов (актива). Эти ряды альтернативны возможному продолжению исходного временного ряда. Для определения альтернативности используем следующую схему.

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  есть исходный временной ряд и его возможное продолжение представляет собой  $a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ ,  $k > 0$ . Тогда последовательность  $b_{n+1}, \dots, b_{n+k}$  альтернативна последовательности исходному продолжению  $a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$ , если для всякого  $j = n+1, \dots, n+k$  справедливо  $a_j \neq b_j$ .

Для облегчения дальнейшего рассуждения сделаем два непринципиальных упрощения: 1) на рынке продаются и покупаются активы только одного вида; 2) для каждого данного момента времени, если цена растет по сравнению с предыдущим значением или не изменяется, мы пишем 1, в противном случае записываем 0. Тогда, если продолжение исходного временного ряда есть 01, то его возможное альтернативное продолжение есть 10, и оно единственно.

Допустим теперь, что в процессе расширения финансового рынка надувается финансовый пузырь. В результате рынок расширяется и его энергия уменьшается. Поэтому пузырь не может расширяться до бесконечности. Назовем пузырь большим, если при его надувании энергия достигает минимума. В этом случае, как было показано, множество  $\psi$  содержит единственное расширение, и оно альтернативно исходному состоянию. И так

как исходное состояние было последовательностью единиц, то его альтернативное продолжение есть последовательность нулей.

Иначе говоря, при надувании большого пузыря рост цен актива неизбежно сменяется их длительным падением, т.е. кризисом<sup>4</sup>.

Обратим теперь внимание на то, что доказательство этого утверждения допускает определенную симметрию. Если в качестве исходной последовательности взять длинную последовательность нулей (длительное падение рынка, или антипузырь), то спустя какое-то время она сменится через уменьшение энергии до минимума длительной последовательностью единиц (активным ростом рынка, антикризисом). Таким образом, если пузырь вызывает кризис, то антипузырь вызывает антикризис. Последовательно объединяя то и другое, получаем колебательный процесс на финансовых рынках.

Однако это еще не все. В современных финансовых теориях возможен эффект, являющийся аналогом того, что в современных космологических теориях называется переходом от Universe к Multiwerse. Чтобы показать это, необходимо дать другую интерпретацию элементам множества  $\psi$ . Для этого нам понадобится показатель Херста  $H$  (нормированный размах) [1], принимающий значения в интервале  $(0,1)$  и обладающий замечательной способностью классифицировать все возможные состояния финансового рынка. Кроме того, будем использовать следующую теорему Федера.

*Теорема (гипотеза) Федера [3].* Пусть  $A$  – некоторый фрактальный объект, расположенный на плоскости. Тогда его фрактальная размерность  $D$  и его показатель Херста  $H$  связаны равенством  $D + H = 2$ .

Для гауссовых случайных процессов доказано, что  $H = 2 - D$ . Общепринятая гипотеза состоит в том, что это соотношение имеет более широкую область применимости, поскольку для всех исследованных стохастических временных рядов это соотношение выполняется.

С помощью этих двух инструментов можно классифицировать все случайные процессы изменения цен активов на финансовых рынках.

Соответственно различают белый шум, черный шум, розовый шум, понимая под шумом отклонение случайного процесса от его детерминированного аналога.

Если  $H = 1/2$ , то имеет место *белый шум* – классическое броуновское движение. В этом случае  $D = 1,5$ . Это траектория случайного блуждания с

<sup>3</sup> На самом деле имеет место более слабое утверждение. См. далее сноску 4.

нормальным распределением вероятностей. Такая траектория имеет зазубрены по сравнению с гладкой прямой, когда  $D = 1$ .

Процессы такого рода возникают, когда фундаментальные факторы, определяющие состояние рынка, достаточно долго остаются неизменными (или меняются мало и медленно). Тогда динамика котировок будет определяться нерегулярным воздействием вторичных обстоятельств, каждое из которых вносит небольшой вклад в конечный результат. В итоге возникает случайная величина с нормальным законом распределения, причем математическое ожидание этого изменения равно нулю (то есть увеличение столь же вероятно, как и уменьшение), а дисперсия (разброс возможных значений) пропорциональна корню квадратному из длины рассматриваемого временного интервала, значения котировок не зависит от предыстории. Это классический эффективный рынок.

Поведение такого рынка характеризуется гипотезой мартингалности. Вчерашние события не оказывают влияния сегодня, а сегодняшние события не влияют на будущее. Сегодняшняя цена актива является наилучшей прогнозной ценой. Время для таких процессов не имеет большого значения.

Такая конструкция, однако, носит идеализированный характер. На реальном эффективном рынке неизбежные в результате флуктуаций отклонения от свойства мартингалности устраняются *быстро*, но не мгновенно, как предполагает гипотеза мартингалности. Это создает условия для арбитража и тем самым для получения прибыли без риска. Такие возможности быстро используются субъектами рынка, в результате чего возникшие арбитражные возможности исчезают. Такой процесс повторяется снова и снова. Таким образом, эффективность рынка, как часто подчеркивают, поддерживается неустанными поисками арбитражных возможностей. Возникает своеобразный парадокс: для того, чтобы рынок был эффективным, необходимо, чтобы значительное число его участников верило в неэффективность рынка, создающей возможности дополнительной прибыли, и действовало в соответствии с этим убеждением. Поэтому неизбежным условием эффективности рынка является существование миллионов инвесторов, верящих в неэффективность рынков. И эта вера частично оправдывается, иначе она быстро бы исчезла.

При значениях  $H$ , устойчиво отличных от  $1/2$ , приращения котировки за два соседних интервала времени уже не являются независимыми, между ними возникает корреляция, причем, если  $H$  больше половины, то корреляция положительна, а если

меньше, то отрицательная. Значение  $H > 1/2$  означает, что изменения цен происходят в одном направлении. Неравенство  $H < 1/2$  говорит о взаимной компенсации противоположных по знаку изменений цен. Рассмотрим эти возможности.

Если  $1/2 < H < 1$ , то возникает *черный шум*. Для такого случайного процесса характерно наличие долговременной памяти. Каждый член временного ряда содержит память о предшествующих событиях, которая медленно уменьшается. Последние события имеют более сильное влияние, чем предыдущие. То, что случается сегодня, влияет на будущее. Время, таким образом, становится важным фактором. Имеет место эффект кластерности.

Долговременная память вызывает появление трендов и циклов. Возникает явление персистентности: если на каком-то отрезке временного ряда цены активов росли (падали), то с большой вероятностью они дальше будут расти (падать).

Фрактальная размерность  $D$  уменьшается с ростом  $H$ . Траектория движения менее зазубрена по сравнению с траекторией случайного блуждания, т.е. система меняется реже, чем чисто случайный процесс. Чем больше  $H$ , тем детерминированней соответствующий случайный процесс.

Для таких временных рядов характерно явление персистентности: если на каком-то отрезке временного ряда цены активов росли (падали), то с большой вероятностью они и дальше будут расти (падать). Иначе говоря, прошлое влияет на настоящее, но не определяет его. Это частично детерминированный случайный процесс. С ростом  $H$  влияние долговременной памяти растет. Однако это не облегчает долговременные предсказания, поскольку имеется значимая вероятность того, что процесс развернется в обратном направлении<sup>5</sup>.

Возникающие случайные процессы характеризуются *степенными* распределениями вероятностей с показателями  $\alpha$ . В простейших случаях взаимосвязь между ними имеет вид

$$H = 1/\alpha \quad (2)$$

Поскольку  $H$  принимает значения из  $(1/2, 1)$ , то для  $\alpha$  выполняются неравенства  $1 < \alpha < 2$ .

Параметр  $\alpha$  отслеживает ценовые колебания, их размах. На рынке с небольшим  $\alpha$  возможны большие скачки цен. Рынок с большим  $\alpha$  близок рынку подбрасывания монеты. Параметр  $H$  отслеживает взаимосвязи цен.

<sup>5</sup> В связи с этим А.Н. Ширяев [4, с.454] отмечает: случайным процессам с большим значением  $H$  отвечает возможность резкой смены направлений движения. Вслед за серией длинных подъемов случаются и серии долгих спадов. Именно по этой причине утверждение 1, сформулированное выше, выполняется не абсолютно, а только с большой вероятностью.

Степенные распределения вероятностей характеризуются также «тяжелыми хвостами». Хвосты таких распределений нельзя без ошибки отсечь, поскольку они содержат события, вероятности наступления которых не являются пренебрежимо малыми.

*Замечание.* Отдельно следует рассмотреть случай, когда  $H = 1$ . По теореме Федера, если  $H = 1$ , то  $D = 1$ . Это означает, что процесс становится полностью детерминированным, его траектория – прямая линия.

Случай  $0 < H < 1/2$  – это розовый шум. В этом случае фрактальная размерность  $D$  растет с уменьшением  $H$ . Траектория такого движения более зазубрена по сравнению с траекторией случайного блуждания и характеризует систему, подверженную очень частым изменениям. Эти изменения проявляются в антиперсистентности процесса: если на каком-то отрезке временного ряда цены активов росли (падали), то с большой вероятностью они дальше будут падать (расти). Любая тенденция с большой вероятностью изменяется на противоположную. В этом случае система меняется быстрее, чем чисто случайный процесс.

Такое положение дел соответствует сильному хаосу, ведущему практически к полной непредсказуемости будущих событий. Этим свойством обладают все *турбулентные* явления. Согласно общепринятым взглядам, турбулентность – нерегулярные движения в среде с сильным перемешиванием и хаотическим изменением параметров. Имеет место сильная перемежаемость. Время в таких процессах становится «круговым» с изменяющейся величиной «диаметра окружности».

На комплексной плоскости этому соответствуют случайные вращения. В такой среде возникают иерархии вихрей, смерчей и торнадо разных размеров. Скорости движения меняются случайным образом от больших до самых малых значений. По мере приближения к оси вихря с диаметром  $r$  скорость неограниченно возрастает как  $1/r$ . Все такие процессы описываются устойчивыми распределениями Леви с бесконечными средним и дисперсией.

**Костюк Владимир Николаевич.** Главный научный сотрудник, доктор экономических наук. Количество печатных работ: более 180. Область научных интересов: теория эволюции; макроэкономика; современные финансы; проблемы синергетики; теории сложных систем; «новой» экономики. E-mail: vlad.kostiuk@gmail.com

**Фролова Марина Петровна.** Гл. специалист, к.э.н. Кол-во печатных работ: более 70. Область научных интересов: экономика, транспорт, энергетика, инвестиции, анализ и оценка эффективности инвестиционных проектов. E-mail: marinafr2011@yandex.ru

В большинстве случаев подобные эффекты относятся к физике атмосферы. Однако понятие турбулентности, по нашему мнению, применимо не только в физике, но и к финансовым рынкам. Возникают своего рода «финансовые завихрения», которые часто существуют настолько мимолетно, что их обычно не принимают за самостоятельные явления.

Все перечисленные шумы альтернативны друг другу и каждый из них характеризует весь рынок или его большую часть в определенный момент времени. В каждый такой момент существующий шум захватывает всю «финансовую Вселенную». Для каждого такого состояния множество альтернатив  $\Psi = 2$ .

Последующие события зависят от накопленной на финансовом рынке энергии. Если она велика (накоплена в процессе сжатия рынка), то различные шумы быстро сменяют друг друга, напоминая эффект калейдоскопа. С расширением рынка энергия уменьшается, и существующий шум становится более устойчивым. Однако его устойчивость не может быть абсолютной, поскольку энергия финансового рынка, как было отмечено, не может исчезнуть полностью.

В заключение заметим, что равновесное состояние финансового рынка, соответствующее значению  $H = 1/2$ , образует множество меры ноль относительно совокупности всех возможных значений  $H$ . Это означает, что типичный финансовый рынок – это неравновесный рынок, и с этим как теоретикам, так и практикам необходимо считаться.

## Литература

1. *Костюк В.Н.* Нестационарная экономика. Влияние роста сложности на экономическое развитие. – М.: УПСС, 2013, глава 10.
2. *Линде А.Д.* Многоликая Вселенная. Лекция в ФИАН (Москва) 10 июня 2007 г. // [scorcher.ru/art/theory/cosmologia/cosmologia4.php](http://scorcher.ru/art/theory/cosmologia/cosmologia4.php)
3. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991, глава 10.
4. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. – М., 2004.

## On the theory of nonequilibrium financial markets

V.N.Kostiuk<sup>1</sup>, M.P. Frolova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Federal State Institution “Federal Research Centre “Computer and Control”, Russian Academy of Science”, Moscow < Russia

**Abstract.** This article is devoted to a very actual and poorly-studied problem of the theory of nonequilibrium financial markets – how they behave when there are arbitrage opportunities on the market and random changes in prices form the Wiener process. For nonequilibrium financial markets under consideration five conditions are accepted: arbitration of the market, abnormality of random assets, inflation and deflation of bubbles, and emergence of crises. To analyze their corresponding behavior, it is proposed in the article to use elements of well-developed cosmological theories, a meaningful interpretation of the main parameters borrowed from them is given (market energy  $E$ , etc.). On this basis, useful statements and assumptions are made on fractal analysis of financial crisis, white and black noise, martingale hypothesis.

**Keywords:** *money supply, persistence, martingale hypothesis, cluster effect.*

**DOI:** 10.14357/20790279200106

### References

1. *Kostyuk V.N.* Nestacionarnaya ekonomika. Vliyanie rosta slozhnosti na ekonomicheskoe razvitie. – M.: UPSS, 2013, glava 10.
2. *Linde A.D.* Mnogolikaya Vselennaya. Lekciya v FIAN (Moskva) 10 iyunya 2007 g. // scorcher.ru/art/theory/cosmologia/cosmologia4.php
3. *Feder E.* Fraktaly. – M.: Mir, 1991, glava 10.
4. *Shiryayev A.N.* Osnovy stohasticheskoy finansovoy matematiki. Tom 1. – M., 2004.

**Kostiuk Vladimir Nikolaevich.** Chief Research Officer, Dr. of Economy. Number of scientific works – over 180. Field of scientific interest – theory of evolution, macroeconomy, modern finances, problems of synergy, theories of complex systems, “new” economy. E-mail: vlad.kostiuk@gmail.com

**Frolova Marina Petrovna.** Chief researcher, Ph.D (Economy). Number of published works: over 70. Field of scientific interests: economy, transport, power engineering, investment, analysis and assessment of investment projects. E-mail: marinafr2011@yandex.ru