Динамические системы

Свойства селекторно-линейных периодических дифференциальных включений

М.В. Морозов[I]

[I]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрены селекторно-линейные периодические дифференциальные включения. Получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения и доказана эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости для рассматриваемого класса включений.

Ключевые слова: *селекторно-линейные периодические дифференциальные включения, равномерная асимптотическая устойчивость, равномерная экспоненциальная устойчивость.*

DOI: 10.14357/20790279200111

Введение

Изучение систем управления привело к применению теории дифференциальных включений. Использованию дифференциальных включений в теории систем управления посвящена монография [1].

В некоторых случаях, например, таких, как задача абсолютной устойчивости, исследование линейных нестационарных систем, матрица правой части которых удовлетворяет интервальным ограничениям, исследование устойчивости систем управления, которые содержат элементы с неполной информацией, могут быть использованы селекторно-линейные дифференциальные включения.

Автономным селекторно-линейным включением называется включение вида

$$\dot{x} \in F(x), F(x) = \{y : y = Ax,\ A \in \Psi\}, \qquad (1)$$

где $x, y \in R^n$, Ψ - множество в пространстве $(n \times n)$ - матриц. Включение вида (1) называют селекторно-линейным включением, поскольку многозначное отображение $F(x)$ в (1) представляет собой объединение линейных однозначных отображений (селекторов) $Ax, A \in \Psi$. В случае автономного селекторно-линейного включения правая часть включения (1) $F(x)$, матрица A, множество Ψ не зависят от времени. Говорят, что селекторно-линейное включение (1) асимптотически устойчиво, если его тривиальное решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Ниже, в разделе Примеры, приведены примеры, приводящие к рассмотрению селекторно-линейных включений.

Автономным селекторно-линейным включениям посвящен ряд публикаций. В [2] для автономного селекторно-линейного дифференциального включения, у которого множество Ψ является выпуклым многогранником, разработан итерационный алгоритм построения фунции Ляпунова из класса квадратичных форм. В [3, 4] для автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является компактом (вообще говоря, невыпуклым) получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в виде существования функций Ляпунова различного вида. В случае, если множество Ψ является выпуклым многогранником, получен алгебраический критерий асимптотической устойчивости нулевого решения в виде выполнения системы матричных равенств. В [5] получены алгебраические критерии асимптотической устойчивости автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является выпуклым многогранником. Работа [6] посвящена получению условий асимптотической устойчивости и свойствам периодических решений автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является выпуклым многогранником. В [7, 8] рассмотрено автономное селекторно-линейные дифференциальное включение, у которого множество Ψ является выпуклым многогранником, образованным Гурвицевыми матрицами. Показано, что для асимптотической устойчивости нулевого решения рассматриваемого включения необходимо и достаточно, чтобы система алгебраических неравенств, коэффициенты которых определяются коэффициентами дифференциального включения, имела решение.

В публикациях, посвященных периодическим по времени дифференциальным включениям, в основном рассматриваются вопросы существования периодических решений, см., например, [9-11]. Немного работ посвящено исследованию свойств решений и вопросу устойчивости периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [12, 13] разработан метод исследования слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения, состоящий в построении включения первого приближения и исследовании свойств его решений.

В [14,15] решены задачи абсолютной и робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами. В частности, установлено, что рассматриваемые системы управления с периодическими параметрами эквивалентны, в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений, периодическим по времени селекторно-линейным дифференциальным и разностным включениям. В [16,17] доказано, что решения периодических дифференциальных включений обладают в ряде случаев теми же свойствами, что и решения автономных дифференциальных включений.

В данной статье рассмотрены селекторно-линейные периодические дифференциальные включения. С помощью вариационного метода получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения. Известно, что свойства асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости нулевого решения автономных селекторно-линейных дифференциальных включений эквивалентны, см., например, [18]. Для периодических селекторно-линейных дифференциальных включений вопрос эквивалентности этих свойств в известных автору публикациях не рассматривался. Ниже установлена эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости нулевого решения для рассматриваемого класса включений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим селекторно-линейное периодическое дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in F(t,x),$$
$$F(t,x) = \{y : y = B(t)x,\ B(t) \in \Omega(t)\},$$
$$\Omega(t+T) = \Omega(t), \qquad (2)$$

где $x, y \in R^n$, $F : R^{n+1} \to R^n$ – многозначное отображение, функция $x(t) \equiv 0$ – положение равновесия дифференциального включения (2). $\Omega(t)$ - выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$-матриц. Предполагается, что элементы матрицы $B(t)$, являются периодическими с периодом $T > 0$, ограниченными и измеримыми функциями. Решением включения (2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке **I**, которая почти всюду на **I** удовлетворяет (2). Многозначная функция $F(t,x)$ в некоторой области $G = \{0 \le t \le T,\ x \in G_R,\ G_R = \{x_0 : \|x_0\| \le R\}$ удовлетворяет основным условиям [19, с. 60], т.е. при всех $(t,x) \in G$ множество $F(t,x) \subset R^n$ непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция $F(t,x)$ полунепрерывна сверху [19, с. 52] по (t,x). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t,x)$ при исследовании свойств решений $x(t,t_0,x_0)$ включения (2) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0,T]$.

Определение 1. Включение (2) называется равномерно устойчивым если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что как только начальные условия $x(t_0) = x_0$ удовлетворяют условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, решение $x(t,t_0,x_0)$ включения (2) с начальным условием x_0 удовлетворяет неравенству $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0 \ge 0$ и при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$.

Определение 1 требует наличия такой окрестности нуля, что решения, начинающиеся в этой окрестности, существуют для всех $t \ge 0$.

Определение 2. Включение (2) называется равномерно асимптотически устойчивым если выполнены условия определения 1 и равномерно относительно $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и x_0 из всякого шара $G_R = \{x_0 : \|x_0\| \le R\}$ выполняется предельное соотношение $\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0$, т.е. для любых $\eta > 0$ и $R > 0$ существует такое $\tau(\eta,R) \ge 0$, что при всех $t \ge t_0 + \tau(\eta,R)$ для решений $x(t,t_0,x_0)$ включения (2) выполняется неравенство $\|x(t,t_0,x_0)\| < \eta$ при любом выборе $B(t) \in \Omega(t)$, начального момента времени t_0 и начального условия $x_0 \in G_R$.

Определение 3. Включение (2) называется равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta \ge 1$, что для любого решения $x(t,t_0,x_0)$ включения (2) выполнено неравенство

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t-t_0)$$

при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$ и любых $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in R^n$.

Заметим, что определение неравномерной асимптотической устойчивости отличалось бы от определения 2 тем, что число δ зависело бы от $B(t) \in \Omega(t)$ и $t_0 \ge 0$, а величина τ зависела бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in R^n$. Определение неравномерной экспоненциальной устойчивости отличалось бы от определения 3 тем, что числа α и β зависели бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in R^n$.

Понятия устойчивости и асимптотической устойчивости дифференциальных включений возникли благодаря техническим задачам. Устойчивость имеет следующий смысл. Пусть функция $x(t) \equiv 0$ – желаемое стационарное положение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ которое является моделью некоторой системы. В случае непредсказуемых возмущений параметров системы ее динамика может быть описана дифференциальным включением $\dot{x} \in F(t,x)$. Устойчивость включения гарантирует, что любое близкое к нулю состояние системы, принимаемое в ходе будущей эволюции, не очень далеко от желаемого. Асимптотическая устойчивость включения означает, что с течением времени амплитуда отклонений от стационарного положения уменьшается и в конце концов исчезает.

Задача состоит в определении условий равномерной асимптотической устойчивости включения (2) и доказательстве эквивалентности свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости включения (2).

2. Основные результаты

Пусть $x_B(t,t_0,x_0)$ – решение с начальными условиями (t_0,x_0), соответствующее матрице $B(t) \in \Omega(t)$. Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение функции $S(t,t_0,x_0) = \max_{B(t)\in\Omega(t)} \|x_B(t,t_0,x_0)\|^2$ и

$$r(t,t_0) = \max_{\|x_0\|=1} S(t,t_0,x_0), \quad t \ge t_0. \tag{3}$$

Функция $r(t,t_0)$ определена при любом $t \ge t_0$, так как множество решений включения (2) компактно при всех x_0 ($\|x_0\| = 1$), $t_0 \ge 0$, а решение $x_B(t,t_0,x_0)$ непрерывно на любом конечном интервале [19]. Используя функцию $r(t,t_0)$ можно формулировать следующий критерий асимптотической устойчивости.

Теорема 1. Для того, чтобы включение (2) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} r(t,t_0) = 0 \tag{4}$$

равномерно по $t_0 \ge 0$.

Доказательство теоремы 1 приведено в приложении.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = B(t)x, \ x \in R^n,$$
$$B(t) \in \Omega(t), \ \Omega(\mathrm{t+T}) = \Omega(t). \tag{5}$$

Следствие теоремы 1. Для того, чтобы включение (2) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрициант $\Phi_B(t,t_0)$ системы (5) удовлетворял условию $\lim_{t\to\infty} \|\Phi_B(t,t_0)\| = 0$, равномерно по $t_0 \ge 0$ и $B(t) \in \Omega(t)$.

Доказательство следствия теоремы 1 приведено в приложении.

Эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости для включения (2) устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы включение (2) было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы включение (2) было равномерно экспоненциально устойчиво.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

3. Примеры

Пример 1. В [20] рассмотрены нелинейные системы управления, описываемые уравнениями

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b^j \varphi_j(\sigma_j, t),$$

$$\sigma_j = \langle c^j, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^j x_i,$$

$$\varphi_j(0,t) \equiv 0, \quad j=\overline{1,m}, \qquad (6)$$

где $x=(x_i)_{i=1}^n, x\in R^n$ – n-мерный вектор, характеризующий отклонение системы от режима, предписанного целью управления (этому режиму соответствует нулевое решение $x(t)\equiv o$ системы (6)), A – постоянная квадратная матрица порядка n, b^j, c^j $(j=\overline{1,m})$ – постоянные n-мерные векторы, скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают скалярное произведение. Предполагается также, что нелинейные функции $\varphi_j(\sigma_j,t)$, $j=\overline{1,m}$, задающие характеристики нелинейных элементов, удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения системы (6) при любых начальных условиях и неравенствам

$$k_{1j}\sigma_j^2 \le \varphi_j(\sigma_j,t)\sigma_j \le k_{2j}\sigma_j^2$$
$$\left(-\infty < k_{1j} \le k_{2j} < +\infty, \ j=\overline{1,m}\right)$$

при всех σ_j и $t\ge 0$. Система (6) эквивалентна [20] автономному селекторно-линейному включению (1), где Ψ - компактное множество в пространстве $(n\times n)$ - матриц. Эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений системы (6) и включения (1) при одинаковых начальных условиях.

Пример 2. В [15] рассмотрена линейная нестационарная система, описываемая уравнением вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x\in R^n, \qquad (7)$$

где $A(t)=(a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ – произвольная матрица ($a_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ – измеримые функции, вообще говоря, не периодические), которая на всяком конечном интервале полуоси $[0,\infty)$ почти всюду удовлетворяет неравенствам

$$\underline{A}(t) \le A(t) \le \overline{A}(t), \quad \underline{A}(t) = (\underline{a}_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \qquad (8)$$
$$\overline{A}(t) = (\overline{a}_{ij}(t))_{i,j=1}^n .$$

Матричные неравенства в (8) понимаются поэлементно, т.е. $\underline{a}_{ij}(t) \le a_{ij}(t) \le \overline{a}_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$, где $a_{ij}(t)$, $\underline{a}_{ij}(t)$, $\overline{a}_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$, произвольные измеримые функции. Предполагается, что заданные ограниченные «крайние» матрицы $\underline{A}(t)$ и $\overline{A}(t)$ периодичны с периодом *T>0 ,* т.е. выполнены условия

$$\underline{A}(t+T) \equiv \underline{A}(t), \ \overline{A}(t+T) \equiv \overline{A}(t).$$

Таким образом, в силу (8), рассматривается не одна фиксированная система (7), а совокупность линейных нестационарных систем (7) с периодическими интервальными ограничениями (8).

В [21] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам вида (7) с ограничениями (8). Это и следящие системы, элементы которых работают на переменном токе, и системы управления с амплитудно-импульсной модуляцией, и задачи, возникающие при исследовании вибрации фрезерных станков.

В случае если дополнительно выполнено условие $A(t+T)=A(t)$, совокупность линейных нестационарных систем (7) с периодическими интервальными ограничениями (8) эквивалентна селекторно-линейному периодическому включению вида

$$\dot{x} \in F(t,x),$$
$$\Omega(t) = \left\{A(t):\ A(t) = \lambda_1(t)\underline{A}(t) + \lambda_2(t)\overline{A}(t)\right\},$$
$$\Omega(t+T) = \Omega(t),$$

где произвольные ограниченные и измеримые функции $\lambda_k(t)$ $k=\overline{1,2}$ удовлетворяют условиям $\lambda_k(t)\ge 0$, $\sum_{k=1}^{2}\lambda_k(t)=1$, $\lambda_k(t+T)=\lambda_k(t)$ $t\ge t_0$.

Приложение

Доказательство теоремы 1. ***Необходимость.*** Так как включение (2) равномерно асимптотически устойчиво, то для любого $\eta>0$ существует $\tau(\eta)>0$, такое, что $\|x_B(t,t_0,x_0)\|<\eta$ при всех $t_0\ge 0$, $t\ge t_0+\tau$, $B(t)\in\Omega(t)$, $x_0:\|x_0\|=1$. Из последнего неравенства и (3) следует неравенство $r(t,t_0)<\eta^2$ при всех $t\ge t_0+\tau$ и $t_0\ge 0$, что и доказывает необходимость условия (4).

Достаточность. В силу ограниченности элементов матрицы $B(t)$ решения $x_B(t,t_0,x_0)$ включения (2) при $\|x_0\|=1$ будут равномерно ограничены на любом конечном интервале $[t_0,t_0+t^*]$. Поэтому для любого $t^*>0$ существует $\gamma(t^*)\ge 1$, такое, что $r(t,t_0)\le\gamma(t^*)$ при всех $t\in[t_0,t_0+t^*]$ и $t_0\ge 0$. Из последнего неравенства и соотношения (4) следует, что существует $r_0\ge 1$, не зависящее от t_0, такое, что $r(t,t_0)<r_0$ при всех $t\ge t_0$ и $t_0\ge 0$. Для любых $t_0\ge 0$, $x_0:\|x_0\|=1$, $t\ge t_0$, $B(t)\in\Omega(t)$ выполнено неравенство

$$\|x_B(t,t_0,x_0)\|^2 \le r(t,t_0) < r_0 . \qquad (9)$$

Из (9) и линейности включения (2) для всякого $\varepsilon>0$, любых $t_0\ge 0$, $x_0:\|x_0\|=1$, $t\ge t_0$ и $B(t)\in\Omega(t)$ следует неравенство

$$\left\|x_B(t,t_0,\varepsilon/\sqrt{r_0}\,x_0)\right\| < \varepsilon .$$

Положим $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/\sqrt{r_0}$. Тогда из (9) вытекает, что решения включения (2) удовлетворяют неравенству $\|x_B(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ при всех $t_0\ge 0$, $t\ge t_0$ и $B(t)\in\Omega(t)$, если только $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$. Из (4) следует, что для любых $\eta>0$ и $R>0$ существует такое $\tau(\eta,R)>0$, не зависящее от $B(t)\in\Omega(t)$

и $t_0 \geq 0$, что при всех $\{ t_0 \geq 0,\ t \geq t_0 + \tau(\eta, R),\ \|x_0\| = 1,\ B(t) \in \Omega(t) \}$ выполнено неравенство $\|x_B(t, t_0, x_0)\|^2 \leq r(t, t_0) < \eta^2 / R^2$, а значит, и неравенство $\|x_B(t, t_0, Rx_0)\| < \eta$ в силу линейности включения (2). Следовательно, $\|x_B(t, t_0, x_0)\| < \eta$ при любых $\{ t_0 \geq 0,\ t \geq t_0 + \tau(\eta, R),\ x_0 : \|x_0\| = 1,\ B(t) \in \Omega(t) \}$. Таким образом, решение включения (2) удовлетворяет всем условиям определения 2. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия теоремы 1. Утверждение следует из равенства $x_B(t, t_0, x_0) = \Phi_B(t, t_0) x_0$, $t \geq t_0$, где $\Phi_B(t, t_0)$ – матрициант системы (5), $\Phi_B(t_0, t_0) = E_n$ (E_n - единичная матрица порядка n) и равенства $r(t, t_0) = \max\limits_{B(t) \in \Omega(t)} \|\Phi_B(t, t_0)\|^2$, $t \geq t_0$.

Доказательство теоремы 2. В доказательстве нуждается лишь необходимость, поскольку достаточность условий теоремы непосредственно следует из определений 2 и 3. Многозначная функция $F(t, x)$ обладает свойством $F(t, cx) \equiv cF(t, x)$, $c > 0$, следовательно включение (2) однородно по x. По теореме 3 [16] из равномерной асимптотической устойчивости включения (2) вытекает его равномерная экспоненциальная устойчивость.

Литература

1. *Han Z., Cai X., Huang J.* Theory of Control Systems Described by Differential Inclusions. Springer, 2016.
2. *Kamenetsky V.A., Pyatnitskii E.S.* An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions, Systems and Control Letters, 1987, no. 8, pp. 445-451.
3. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 37–40.
4. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory, Systems and Control Letters, 1989, no. 13, pp. 59-64.
5. *Rapoport L.B., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-Varying Nonlinear Control Systems, IEEE Transactions on Circuit and Systems. I: Fundamental Theory and Applications, 1996, vol. 43, no. 3, pp. 219-229.
6. *Rapoport L.B.* Asymptotic Stability and Periodic Motions of of Selector-Linear Differential Inclusions. In: Garafalo F., Glielmo L. (eds) Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin Heidelberg, 1996, vol. 217, pp. 269-285.
7. *Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25-30.
8. *S. Kadry, G. Alferov, G. Ivanov, A. Sharlay.* About stability of Selector Linear Differential inclusions. AIP Conference Proceedings. 2040, 150013 (2018); doii:10.1063/1.5079216.
9. *Li G., Xue X.* On the Existence of Periodic Solutions for Differential Inclusions. // Journal of Math. Analysis and Applications. 2002. Vol. 276. Issue 1. pp. 168-183.
10. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Existence Theorems for Periodic Differential Inclusions in R^N. Acta Mathematicae Applicatae Sinica. English Series. 2004. Vol. 20. no. 2. pp. 179-190.
11. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Periodic Solutions for Differential Inclusions in R^N. Archivum Mathematicum. 2006. Vol. 42. no. 2. pp. 115-123.
12. *Smirnov G. V.* Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential inclusions // Nonlinear differential equations and applications, 1995, Vol. 2, Number 4, PP.445-461.
13. *Gama R., Smirnov G. V.* Weak exponential stability for time-periodic differential inclusions via first approximation averaging. // Set-valued and variational analysis, 2013, Vol. 21, Issue 2, PP. 191-200
14. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 2. С. 49–59.
15. *Морозов М.В.* Критерии робастной устойчивости нестационарных систем с интервальными ограничениями// Труды ИСА РАН. 2016, Т. 66. Вып. 4. С. 4-9.
16. *Морозов М.В.* О свойствах периодических дифференциальных включений // Диф. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 612–617.
17. *Морозов М.В.* О свойствах решений периодических по времени дифференциальных включений с асимптотически устойчивыми множествами // Труды ИСА РАН. 2017. Т. 67. Вып. 3. С. 13–19.
18. *Smirnov G. V.* Introduction to the Theory of differential Inclusions. AMS Graduate Studies in Mathematics. Vol. 41. 2002.

19. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
20. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I // АиТ. 1986. № 3. С. 63–73.
21. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

Морозов Михаил Владимирович. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 50. Области научных интересов: теория управления, теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости, E-mail: miguel@ipu.ru

Properties of selector-linear periodic differential inclusions

M.V. Morozov

Abstract. Selector-linear periodic differential inclusions are considered. The necessary and sufficient condition of asymptotic stability in the form of some limit relation is obtained and the equivalence of the properties of uniform asymptotic stability and uniform exponential stability for the considered class of inclusions is proved.
Keywords: *selector-linear periodic differential inclusions, uniform asymptotic stability, uniform exponential stability*
DOI: 10.14357/20790279200111

References

1. *Han Z., Cai X., Huang J.* Theory of Control Systems Described by Differential Inclusions. Springer, 2016.
2. *Kamenetsky V.A., Pyatnitskii E.S.* An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions, Systems and Control Letters, 1987, no. 8, pp. 445-451.
3. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Stability Criteria for Selector-Linear Differential Inclusions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1987, Vol. 297, No. 1, PP. 37-40.
4. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory, Systems and Control Letters, 1989, no. 13, pp. 59-64.
5. *Rapoport L.B., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-Varying Nonlinear Control Systems, IEEE Transactions on Circuit and Systems. I: Fundamental Theory and Applications, 1996, vol. 43, no. 3, pp. 219-229.
6. *Rapoport L.B.* Asymptotic Stability and Periodic Motions of of Selector-Linear Differential Inclusions. In: Garafalo F., Glielmo L. (eds) Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin Heidelberg, 1996, vol. 217, pp. 269-285.
7. Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A. Stability of Selector-Linear Differential Inclusions, Vestnik Permskogo Universiteta, Matematika, Mekhanika, Informatika, 2017, vol. 2(37), pp. 25-30.
8. *S. Kadry, G. Alferov, G. Ivanov, A. Sharlay.* About Stability of Selector Linear Differential Inclusions. AIP Conference Proceedings. 2040, 150013 (2018); doii:10.1063/1.5079216.
9. *Li G., Xue X.* On the Existence of Periodic Solutions for Differential Inclusions. // Journal of Math. Analysis and Applications. 2002. Vol. 276. Issue 1. pp. 168-183.
10. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Existence Theorems for Periodic Differential Inclusions in R^N. Acta Mathematicae Applicatae Sinica. English Series. 2004. Vol. 20. no. 2. pp. 179-190.
11. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Periodic Solutions for Differential Inclusions in R^N. Archivum Mathematicum. 2006. Vol. 42. no. 2. pp. 115-123.
12. *Smirnov G. V.* Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential

inclusions // Nonlinear differential equations and applications, 1995, Vol. 2, Number 4, PP.445-461.
13. *Gama R., Smirnov G. V.* Weak exponential stability for time-periodic differential inclusions via first approximation averaging. // Set-valued and variational analysis, 2013, Vol. 21, Issue 2, PP. 191-200
14. *Molchanov A.P., Morozov M.V.* Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems with Periodic Linear Sections // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 2. Part 1. P. 189–198.
15. *Morozov M.V.* Robust Stability Criteria for Nonstationary Systems With Interval Constraints// Proceedings of the Institute for Systems Analysis, 2016, vol. 66, no. 4, pp. 4-9.
16. *Morozov M.V.* Properties of Solutions of Periodic Differential Inclusions. Differential Equations, 2000, vol. 36, no. 5, pp. 677-682.
17. *Morozov M.V.* On the Properties of Solutions of Time-Periodic Differential Inclusions with Asymptotically Stable Sets. // Proceedings of the Institute for Systems Analysis, 2017, vol. 67, no. 3, pp. 13-19.
18. *Smirnov G. V.* Introduction to the Theory of differential Inclusions. AMS Graduate Studies in Mathematics. Vol. 41. 2002.
19. *Filippov A.F.* Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu (Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side), Moscow: Nauka, 1985.
20. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Lyapunov Functions, Defining the Necessary and Sufficient Conditions for Absolute Stability of the Nonlinear Nonstationary Control Systems. I // Avtom. Telemekh. 1986. № 3. pp. 63–73.
21. *Shil'man S.V.* Metod proizvodiatshikh funktsiy v teorii dinamitcheskikh sistem. (The Method of Generating Functions in Theory of Dynamic Systems). Moscow: Nauka. 1978.

Morozov Mikhail Vladimirovich. Senior Researcher of the Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences. Candidate of Science. Background: Moscow State University by the Name of M. V. Lomonosov, 1982. Publications: 50. Scientific interests: theory of control, theory of differential equations, theory of stability. E-mail: miguel@ipu.ru