Концепция равновесия санкций и контрсанкций в одной дифференциальной игре $n \geq 2$ лиц

В.И. Жуковский[I], Л.В. Жуковская[II]

[I] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
[II] Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук (ЦЭМИ РАН), Москва, Россия

Аннотация. В статье представлена методология моделирования процессов принятия решений в сложных управляемых динамических системах: реализация идеи сбалансированности (равновесности) систем и формирование нового механизма, способствующего решению проблем устойчивости равновесий. Указанные разработки основываются на экономико-математическом моделировании с применением синтеза научных подходов системного анализа, экономики, права, теорий игр, исследования операций и принятия решений. Рассматривается линейно-квадратичная позиционная дифференциальная игра многих лиц. Установлены коэффициентные критерии, при выполнении которых в игре существует равновесие санкций и контрсанкций и при этом не существует общепринятого равновесия по Нэшу. Рассмотрена экономико-правовая модель активного равновесия через правовое понятие санкций, что расширяет область практического применения указанного класса задач.

Ключевые слова: *управляемая сложная система, санкции, контрсанкции, равновесие санкций и контрсанкций, активные равновесия, устойчивость, эффективность, максимальность по Парето.*

DOI: 10.14357/20790279200205

1. Введение

В настоящее время основой существования национальной рыночной системы является активно используемая неолиберальная экономическая доктрина. В своей дифференциации она охватывает все сферы деятельности участников общественных отношений и проявляется в процессе принятия решений на всех уровнях управляющих и управляемых сложных систем. Указанный подход при экономико-математическом моделировании с использованием теоретико-игрового инструментария (с целью сбалансированности управляемых систем [6]) проявляется в применении различных концепций статических и активных равновесий. Если процесс принятия решений в сложной системе описывается аналитическим конструированием дифференциальной игры, то, по мнению ведущих ученых математической теории игр, равновесию как приемлемому решению дифференциальной игры, при этом должно быть присуще свойство устойчивости. На содержательном уровне требование устойчивости означает, что отклонение от равновесия отдельного игрока не может увеличить выигрыш отклоняющегося.

В рамках применения неолиберального экономического концепта решение, предложенное нобелевским лауреатом 1994 года Дж. Нэшем [11], как известно, во многих ситуациях отвечает указанному требованию. При этом стоит отметить, что такое равновесие не всегда существует при определенных условиях и/или обладает рядом общеизвестных негативных свойств, например, множество ситуаций равновесия по Нэшу, может быть как внутренне, так и внешне неустойчивым. Математическая задача поиска свойства устойчивости равновесий может заключаться в использовании активных равновесий, например, классического равновесия угроз и контругроз [5] или возражений и контрвозражений, одновременно с выполнением требования эффективности (максимальности по Парето) [9, с.92-93; 8; 10].

Отметим, что экономико-правовое обоснование теоретико-игровых моделей в общем виде использует идею системной сбалансированности, когда соотношение сложных управляемых систем проявляется в их взаимовоздействии и устанавливается фактом соответствия правового порядка общественных отношений закономерностям и тенденциям экономического развития. В частном случае экономико-правовое обоснование теоретико-игровой модели равновесия санкций и контрсанкций основывается на использовании правового понятия санкции как составляющей дефиниции юридической ответственности субъектов. В практическом плане регулятором реализуется принцип неотвратимости наступления юридической ответственности, в частности, санкции за правонарушение и преступление (отклонение от установленных в правовых предписаниях правил поведения, как, например, от указанной выше предполагаемой ситуации равновесия).

Перейдем непосредственно к используемому в работе понятийному аппарату. Понятие «угроза» на микроуровне содержит в себе не только реальное действие участника рынка, но и саму возможность такого действия с целью его понуждения к соблюдению установленных ранее правил, на макроуровне речь может идти, в том числе об «угрозе принуждения» – регулятивном определении правового режима неотвратимости наказания. В юридической литературе «угроза принуждения» означает санкцию, а сам этот термин используется для обозначения применяемых при регулировании мер воздействия» [7, с.11]. В математической теории игр для «смягчения агрессивного характера» терминов «угроза», «санкции» возможно использование как синонима слова «возражение». Экономическое содержание понятия санкции включает в себя «меры принудительного экономического воздействия за нарушение установленного порядка деятельности» и, как правило, имеют предупредительную, компенсационную или репрессивную функцию. Соответственно для моделирования процесса принятия решений макро–, микроуровня действие игрока противостоящего принуждению и использующего встречные методы воздействия – определяется через контрвозражение, контругрозу, контрсанцию.

Равновесие санкций и контрсанкций, как и другие равновесия могут обеспечивать требование устойчивости решений, но в каждой концепции при этом используются разная тактика (механизмы). В случае равновесия по Нэшу все игроки, кроме отклонившегося, продолжают придерживаться своих прежних стратегий, а при равновесии санкций и контрсанкций, на содержательном уровне, игроки переходят к допустимым нормами права действиям, которые принуждают отклонившегося игрока следовать ситуации равновесия, т.е. применяют (используют) контрсанкции. В этом случае неотвратимость наказания является веским основанием для игроков не отклонятся от рассматриваемой конкретной ситуации и с позиций права их действия основываются на понятии юридической ответственности, как «за изменение содержания уже существующего обязательства» и «проистекающего для нарушителя из факта совершенного им нарушения отрицательного последствия» [7, с.27].

Так как классическая концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, не всегда активно используется в математической теории игр и ограничена либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми двух лиц [5, 12], то новизна настоящего исследования для теории дифференциальных игр заключается

1. в том, что равновесие санкций и контрсанкций одновременно максимально по Парето;
2. выявлен достаточно широкий класс дифференциальных игр N лиц при $N \geq 2$, в которых существует равновесие санкций и контрсанкций и одновременно отсутствует равновесие по Нэшу;
3. предложен алгоритм практического построения равновесия санкций и контрсанкций.

2. Постановка формальной задачи

С целью формального обоснования и построения теоретико-игровой модели равновесия санкций и контрсанкций рассматривается бескоалиционная линейно – квадратичная дифференциальная игра N лиц в нормальной форме, заданная упорядоченной четверкой

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{N}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{J_i(U, t_0, x_0)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle.$$

В игре Γ множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, ..., N\}$, где число игроков (например, участников рыночных отношений) $N \geq 2$; изменение управляемой динамической системы Σ (тогда под управляемой динамической системой понимаются взаимодействующие субъекты рыночной деятельности) допустим, описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\Sigma \div \dot{x} = A(t)x + u_1 + ... + u_N, \;\; x(t_0) = x_0. \qquad (2.1)$$

Здесь фазовый n-вектор состояния системы $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; фиксирован момент окончания игры $\vartheta = const > 0$, а само время продолжительности игры $t \in [t_0, \vartheta]$; управляющее воздействие i-игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in \mathbb{N})$; для $n \times n$ матрицы $A(t)$ предполагаем непрерывность на $[0, \vartheta]$ ее элементов и обозначим указанный факт через $A(\cdot) \in C_{n\times n}[0, \vartheta]$; пара $(t, x) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ - текущая позиция игры Γ; (t_0, x_0) - начальная позиция; $0 \leq t_0 < \vartheta$.

Стратегия i-го игрока U_i отождествляется с n-вектор-функцией $u_i(t,x)$ и обозначается это соответствие $U_i \div u_i(t,x)$, тогда множество стратегий i-го игрока

$$\mathcal{U}_i = \{U_i\} = \{U_i \div u_i(t,x), u_i(t,x) = Q_i(t)x \,|\, \forall Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\}.$$

Таким образом, выбор стратегии i-ым игроком сводится к выбору конкретной $n\times n$ непрерывной матрицы $Q_i(t)$ $(i\in\mathbb{N})$ из $C_{n\times n}[0,\vartheta]$.

Зададим правила игры в условиях конкурентного рынка: предположим, что игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою конкретную стратегию $U_i \div Q_i(t)x$; в результате образуется ситуация игры $U=(U_1,...,U_N)\in\mathcal{U}=\mathcal{U}_1\times...\times\mathcal{U}_N$. Далее находится решение $x(t)$, $t_0\le t\le\vartheta$, системы (2.1) при $u_i = Q_i(t)x$ $(i\in\mathbb{N})$, т.е.

$$\dot{x}(t) = [A(t)+Q_1(t)+...+Q_N(t)]x(t),\; x(t_0)=x_0. \quad (2.2)$$

Система (2.2) линейных однородных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами на интервале $[t_0,\vartheta]$ имеет непрерывное продолжимое на $[t_0,\vartheta]$ решение $x(t)$ при $\forall t_0\in[0,\vartheta)$. Затем игроки переходят к построению реализаций выбранных ими стратегий $u_i[t]=Q_i(t)x(t)$ $(i\in\mathbb{N})$ и соответствующей ситуации $u[t]=(u_1[t],...,u_N[t])$, которую составляют N непрерывных на $[t_0,\vartheta]$ n-векторов $u_1[t],...,u_N[t]$. Тогда функцию выигрыша i-го игрока образует определенный на непрерывных парах $(x(t),u[t])$, $t\in[t_0,\vartheta]$, квадратичный функционал

$$J_i(U_1,...U_N,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j\in\mathbb{N}} u_j'[t]D_{ij}u_j[t]dt$$
$$(i\in\mathbb{N}), \quad (2.3)$$

где, не уменьшая общности, считаем постоянные $n\times n$ матрицы C_i, D_{ij} симметричными; штрих сверху означает операцию транспонирования (x'-вектор-строка). Значение функционала (2.3) в математической теории игр называется выигрышем i-го игрока. По ходу игры в условиях использования неолиберальной экономической доктрины предполагается, что игроки заинтересованы выбрать в дифференциальной игре Γ свои стратегии таким образом, чтобы максимально возможно увеличить личный выигрыш.

Напомним, что одной из целей настоящей статьи является выявление достаточно общего класса линейно-квадратичных дифференциальных позиционных игр N лиц в нормальной форме вида Γ, в котором отсутствует общепринятое равновесие по Нэшу, при этом одновременно существует равновесие санкций и контрсанкций. Для этого игре Γ поставим в соответствие N-критериальную динамическую задачу

$$\Gamma_\nu = \langle \Sigma, \mathcal{U}, \{J_i(U,t_0,x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

где управляемая динамическая система Σ совпадает с (2.1), совокупность альтернатив $\mathcal{U}$ задается множеством ситуаций $\mathcal{U}=\prod_{i=1}^{N}\mathcal{U}_i$ игры Γ, N критериев $J_i(U,t_0,x_0)$ $(i\in\mathbb{N})$ определены в (2.3). Тогда целью лица, принимающего решение (далее ЛПР) в задаче Γ_ν, будет выбор такой альтернативы $U^P\in\mathcal{U}$, при которой все N критериев (2.3) принимали бы возможно большие значения. Общепринятым подходом в решении указанной задачи является использование понятия, предложенного Вильфредом Парето в 1909 г.

Определение 2.1. Альтернатива $U^P=(U_1^P,...,U_N^P)\in\mathcal{U}$ называется максимальной по Парето в задаче Γ_ν, если при $\forall U\in\mathcal{U}$ и $\forall(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$, $x_0\ne 0_n$, несовместна система неравенств

$$J_i(U,t_0,x_0)\ge J_i(U^P,t_0,x_0)\; (i\in\mathbb{N}),$$

из которых хотя бы одно строгое; при этом N-вектор $J^P=J^P[t_0,x_0]=(J_1(U^P,t_0,x_0),...,J_N(U^P,t_0,x_0))$ называется максимумом по Парето в Γ_ν.

Из определения 2.1. следуют очевидные два свойства.

Свойство 2.1. Справедлива импликация:

$$[J_i(\hat{U},t_0,x_0) > J_i(U^P,t_0,x_0)] \Rightarrow [J_j(\hat{U},t_0,x_0) < J_j(U^P,t_0,x_0)]$$

для хотя бы одного $j\in\mathbb{N}$, $j\ne i$.

Свойство 2.2. Если для каких-либо постоянных $\alpha_i>0$ $(i\in\mathbb{N})$ имеет место

$$\max_{U\in\mathcal{U}}\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i J_i(U,t_0,x_0)\} = Idem\{U\to U^P\}, \quad (2.4)$$

то ситуация U^P максимальна по Парето в Γ_ν; $Idem\{U\to U^P\}$ означает выражение в фигурных скобках из (2.4), где U заменено на U^P.

Далее перейдем к понятиям двух равновесных решений игры Γ, где вектор $J=(J_1,...,J_N)\in\mathbb{R}^N$.

Определение 2.2. Пара $(U^e, J^e=J(U^e,t_0,x_0))\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^N$ называется равновесием по Нэшу игры Γ, если имеет место N равенств

$$\begin{cases} \max\limits_{U_1\in\mathcal{U}_1} J_1(U_1,U_2^e,...,U_N^e,t_0,x_0) = J_1(U_1^e,U_2^e,...,U_N^e,t_0,x_0) = J_1^e, \\ \max\limits_{U_2\in\mathcal{U}_2} J_2(U_1^e,U_2,...,U_N^e,t_0,x_0) = J_2(U_1^e,U_2^e,...,U_N^e,t_0,x_0) = J_2^e, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \max\limits_{U_N\in\mathcal{U}_N} J_N(U_1^e,...,U_{N-1}^e,U_N,t_0,x_0) = J_N(U_1^e,...,U_{N-1}^e,U_N^e,t_0,x_0) = J_N^e \end{cases}$$

при любых $(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n, x_0\ne 0_n$ (0_n - нулевой n-вектор).

Построим равновесие санкций и контрсанкций.

Пусть $U=(U_1,U_2,...,U_N)$ некоторая фиксированная ситуация игры Γ. Считаем далее, что у первого игрока имеется санкция на ситуацию U, если у него существует такая стратегия $U_1^T \in \mathcal{U}_1$, что

$$J_1(U_1^T, U_2, ..., U_N, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2, ..., U_N, t_0, x_0). \quad (2.5)$$

Наличие санкции не означает ее обязательное применение, а лишь «угрозу принуждения». Напомним, что существование санкции и ее роль проявляется в связи с понятием юридической ответственности игроков, заставляет воздерживаться от нарушений установленных условий игры и осуществляется при условии их «срывов». В терминологии теории игр применение санкции выгодно первому игроку, так как при этом, согласно (2.5), его личный выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в прежней ситуации U.

Комплекс «карательных» мер, принимаемых одной стороной против другой в ответ на санкции, проявляется в контрсанкциях, так, например, в ответ на применение санкции первым игроком U_1^T у второго, имеется (в терминологии математической теории игр) «частичная» или «неполная» контрсанкция, если у него существует стратегия $U_2^{\tilde{N}} \in \mathcal{U}_2$, при которой

$$J_1(U_1^T, U_2^C, ..., U_N, t_0, x_0) \le J_1(U_1, U_2, ..., U_N, t_0, x_0), \quad (2.6)$$

и «полная» контрсанкция, если существует такая стратегия $U_2^{\tilde{N}} \in \mathcal{U}_2$, что одновременно с неравенством (2.6) выполняется и

$$J_2(U_1^T, U_2^C, ..., U_N, t_0, x_0) > J_2(U_1^T, U_2, ..., U_N, t_0, x_0). \quad (2.7)$$

Таким образом, формализуется контрсанкция в ответ на каждую санкцию U_i^T.

При наличии «частичной» или «неполной» контрсанкции, второй игрок за счет выбора своей стратегии U_2^C приводит, согласно (2.6), выигрыш применившего санкцию игрока к значению, не превосходящему (может быть и меньше) его первоначальный выигрыш в ситуации U и делает ничтожным (нулевым) применение санкции. В дополнение, «полная» контрсанкция побуждает отвечающего на санкции второго игрока к применению U_2^C. Действительно, в полученной в результате ситуации $(U_1^T, U_2^C, ..., U_N)$ его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации $(U_1^T, U_2, ..., U_N)$ (сложившейся при применении санкции U_1^T). Аналогично строится санкция U_i^T, примененная любым i-ым игроком на ситуацию U и ответная контрсанкция.

Естественно, если в ответ на санкцию на ситуацию U любого игрока, у хотя бы одного из оставшихся имеется контрсанкция, то смысл применения санкций становится ничтожным, так как в результате использования контрсанкций выигрыш игрока не увеличится (а может и уменьшиться!).

Определение 2.3. Ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, ..., U_N^P) \in \mathcal{U}$ называется активно равновесной в игре Γ, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \ne 0_n$,

1) U^P максимальна по Парето в Γ_{v_T};
2) в ответ на каждую санкцию $U_i^T \in \mathcal{U}_i$ любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется «неполная» контрсанкция.

Определение 2.4. Пара $(U^P, J^P) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N$ называется равновесием санкций и контрсанкций в позиционной дифференциальной игре N лиц Γ, если при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \ne 0_n$

1) U^P максимальна по Парето в N-критериальной динамической задаче Γ_v;
2) в ответ на каждую санкцию любого игрока, по крайней мере, у одного из оставшихся имеется «полная» контрсанкция;

где, напомним, $J^P = (J_1^P, J_2^P, ..., J_N^P)$, $J_i^P = J_i(U^P, t_0, x_0)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Из определений 2.3. и 2.4. следует, что равновесие санкций и контрсанкций является одновременно активным равновесием. Активно равновесным ситуациям и равновесиям санкций и контрсанкций, основанным на известной в теории игр концепции угроз и контругроз, присущи все позитивные свойства ситуации равновесия по Нэшу: они устойчивы по отклонению отдельного игрока, удовлетворяют свойству индивидуальной рациональности и совпадают с седловой точкой в случае антагонистической игры. При этом одновременно с тем указанные равновесия свободны от следующих недостатков:

– они существуют в ряде случаев, когда равновесие по Нэшу отсутствует;
– в отличие от него, в силу паретовости, внешне и внутренне устойчивы;
– наличие в игре равновесия по Нэшу влечет существование некоторых видов активных равновесий, выигрыши всех игроков при которых не меньше, чем при равновесии по Нэшу;
– если ситуации равновесия по Нэшу одновременно максимальны по Парето, то они являются равновесиями санкций и контрсанкций.

Подчеркнем еще раз, что в настоящем исследовании, указанный прием позволил «внести» в определения 2.3 и 2.4 требование эффективности (максимума по Парето), «снимая» тем самым некоторые негативные свойства равновесия по Нэшу, такие как отсутствие внутренней и внешней устойчивости множества равновесий по Нэшу.

Стоит отметить, что в условиях экономических санкций против России методология построения активных равновесий, в частности концепции равновесия санкций и контрсанкций высокоактуальна для практических задач экономико-математического моделирования процессов принятия решений.

3. Формализация эффективных ситуаций и выигрышей в задаче Γ_ν

С целью проведения дальнейших исследований приведем следующие обозначения: запись $D<0$ (>0) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определенно положительна (соответственно, определенно отрицательна, т.е. $x'Dx<0$ для $\forall x \neq 0_n$).

Рассмотрим N-критериальную статическую вспомогательную задачу

$$\Gamma_N = \left\langle \mathbb{R}^{Nn}, \{f_i(u) = u_1' D_{i1} u_1 + \ldots + u_N' D_{iN} u_N\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle, \quad (3.1)$$

в которой ЛПР выбирает альтернативу $u=(u_1,u_2,...,u_N)\in\mathbb{R}^{Nn}$ с целью достичь одновременно возможно больших значений всех компонент векторного критерия $f(u)=(f_1(u),f_2(u),...,f_N(u))$.

Далее по аналогии с определением 2.1.: альтернатива u^P максимальна по Парето в задаче Γ_N, если при $\forall u\in\mathbb{R}^{Nn}$ несовместна система неравенств $f_i(u)\geq f_i(u^P)$ $(i\in\mathbb{N})$, из которых хотя бы одно строгое.

Приведем вспомогательные утверждения, касающиеся свойств квадратичных форм $x'Dx=\sum_{\gamma,\beta=1}^{n} d_{\gamma\beta}x_\gamma x_\beta$, где используются постоянные $d_{\gamma\beta}$ – элементы $n\times n$ матрицы D и компоненты $x_1,...,x_n$ n-вектора $x\in\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.1. Заменой $b_{\gamma\beta}=\dfrac{d_{\gamma\beta}+d_{\beta\gamma}}{2}$ можно всегда свести квадратичную форму $x'Dx$ к виду $x'Bx$, где уже $n\times n$ матрица $B=(b_{ij})$ будет симметричной, т.е. $B'=B$.

Далее, не уменьшая общности, будем считать матрицы всех используемых ниже квадратичных форм симметричными.

Лемма 3.2. Имеет место импликация [3, с. 281]: $D_{ii}>0 \Rightarrow$ все n корней характеристического уравнения $\det[D_{ii}-\Lambda E_n]=0$ вещественны и положительны $(i\in\mathbb{N})$, где E_n - единичная $n\times n$ матрица. Пусть $\Lambda_{ii}>0$ - наибольший из этих корней, тогда

$$u_i' D_{ii} u_i \leq \Lambda_{ii}\|u_i\|^2 = \Lambda_{ii} u_i' u_i \quad \forall u_i\in\mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Так как $D>0 \Leftrightarrow -D=(-1)D<0$, то для $D<0$ все n корней $-\lambda_{ij}<0$ характеристического уравнения $\det[D_{ij}-\lambda E_n]=0$ отрицательны $(i,j\in\mathbb{N}, j\neq i)$.

Пусть $-\lambda_{ij}$ наибольший (по абсолютной величине наименьший) из них, тогда аналогично (3.2) будет

$$u_j' D_{ij} u_j \leq -\lambda_{ij} u_i' u_j \quad \forall u_j\in\mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Следующая лемма «вытекает» из свойства 2.2.

В N-критериальной задаче Γ_N, не уменьшая общности, будем считать, что санкцию применяет игрок 1, а контрсанкцию объявляет игрок 2 (отметим, что нумерация игроков – субъективна).

Лемма 3.3. Предположим, что в Γ_N

1) симметричные $n\times n$ матрицы D_{ij} таковы, что

$$D_{ii}>0,\ D_{ij}<0\ (i,j\in\mathbb{N}, j\neq i),\ \Lambda_{11}\Lambda_{22}<\lambda_{12}\lambda_{21}; \quad (3.4)$$

2) ненулевая $N\times N$ матрица

$$\grave{A}=\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & -\lambda_{21} & \ldots & -\lambda_{N1} \\ -\lambda_{12} & \Lambda_{22} & \ldots & -\lambda_{N2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_{1N} & -\lambda_{2N} & \ldots & \Lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

вырождена (т.е. $\det A=0$), где $\det A$ определитель матрицы A.

Тогда система однородных линейных строгих неравенств (относительно N-компонент вектора-столбца $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)$)

$$\begin{cases} +\alpha_1\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}-\alpha_3\lambda_{31}-\ldots-\alpha_N\lambda_{N1}<0, \\ -\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}-\alpha_3\lambda_{32}-\ldots-\alpha_N\lambda_{N2}<0, \\ -\alpha_1\lambda_{13}-\alpha_2\lambda_{23}+\alpha_3\Lambda_{33}-\ldots-\alpha_N\lambda_{N3}<0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\alpha_1\lambda_{1N}-\alpha_2\lambda_{2N}-\ldots-\alpha_{N-1}\lambda_{N-1}+\alpha_N\Lambda_{NN}<0 \end{cases} \quad (3.5)$$

имеет положительное решение $\alpha=(1,\alpha_2,...,\alpha_N)$, т.е. все $\alpha_j>0, j=2,...,N$; где $\Lambda_{ii}(-\lambda_{ij})$ $(i,j\in\mathbb{N}, j\neq i)$ наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii}-\Lambda E_n]=0$ (соответственно, $\det[D_{ij}-\lambda E_n]=0$ $(i,j\in\mathbb{N}, j\neq i)$).

Доказательство. Далее при построении максимальной по Парето ситуации в игре Γ будем использовать свойство 2.2. Для этого потребуется линейная свертка $\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i f_i(u)$ критериев (3.1) с положительными коэффициентами $\alpha_i>0$. Затем опять-таки с помощью (3.1) построим квадратичную форму компонент Nn-вектора $u=(u_1,...,u_N)$:

$$f(u)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i f_i(u)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\alpha_i[u_1'D_{i1}u_1+u_2'D_{i2}u_2+\ldots+u_N'D_{iN}u_N].$$

С учетом (3.1)-(3.3) тогда

$$f(u)=u_1'[\alpha_1\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}-...-\alpha_N\lambda_{N1}]u_1+$$
$$+u_2'[-\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}-...-\alpha_N\lambda_{N2}]u_2+$$
$$+...+$$
$$+u_{N-1}'[-\alpha_1\lambda_{1N-1}-\alpha_2\lambda_{2N-1}-...+\alpha_{N-1}\Lambda_{N-1N-1}-\alpha_N\lambda_{N-1}]u_{N-1}+$$
$$+u_N'[-\alpha_1\lambda_{1N}-\alpha_2\lambda_{2N}-...-\alpha_{N-1}\lambda_{N-1N}+\alpha_N\Lambda_{NN}]u_N=$$
$$=d_1\|u_1\|^2+...+d_N\|u_N\|^2.$$

Установим, что можно выбрать $\alpha_i=const>0$ $(i\in\mathbb{N})$ так, чтобы все d_i стали отрицательными числами, причем

$$\begin{aligned}&d_1=[\alpha_1\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}-...-\alpha_N\lambda_{N1}],\\&d_2=[-\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}-...-\alpha_N\lambda_{N2}],\\&..\\&d_{N-1}=[-\alpha_1\lambda_{1N-1}-\alpha_2\lambda_{2N-1}-...+\alpha_{N-1}\Lambda_{N-1N-1}-\alpha_N\lambda_{N-1}],\\&d_N=[-\alpha_1\lambda_{1N}-\alpha_2\lambda_{2N}-...-\alpha_{N-1}\lambda_{N-1N}+\alpha_N\Lambda_{NN}].\end{aligned}\tag{3.6}$$

С этой целью (3.5) поставим в соответствие систему линейных строгих однородных неравенств

$$\begin{cases}\alpha_1\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}<0,\\-\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}<0,\\-\alpha_1\lambda_{13}-\alpha_2\lambda_{23}+\alpha_3\Lambda_{33}<0,\\-\alpha_1\lambda_{14}-\alpha_2\lambda_{24}-\alpha_3\lambda_{34}+\alpha_4\Lambda_{44}<0,\\..\\-\alpha_1\lambda_{1N-1}-\alpha_2\lambda_{2N-1}-...+\alpha_{N-1}\Lambda_{N-1N-1}<0,\\-\alpha_1\lambda_{1N-1}-\alpha_2\lambda_{2N-1}-...-\alpha_{N-1}\lambda_{N-1N}+\alpha_N\Lambda_{NN}<0,\end{cases}\tag{3.7}$$

которые получаем из (3.5) «отбрасыванием» всех отрицательных слагаемых, кроме $-\alpha_2\lambda_{21}$ из первого неравенства и $-\alpha_1\lambda_{12}$ второго. С учетом факта, что добавление отрицательных слагаемых лишь «усиливает» строгие неравенства, получаем, что при $\lambda_{ij}>0$ и $\alpha_i>0$ любые положительные решения системы (3.7) являются положительными и для (3.5). Тогда очевидно, что квадратичная форма $f(u)$ будет определенно отрицательной относительно компонент Nn-вектора $u=(u_1,...,u_N)$, если система (3.5) (или система (3.7)) имеет положительное решение $\alpha=(1,\alpha_2,...,\alpha_N)$, т.е. все числа $\alpha_\gamma>0$ $(\gamma=2,...,N)$. Перейдем к доказательству указанного факта для системы (3.7). С этой целью найдем α_2 из первых двух строгих неравенств в (3.7):

$$\begin{cases}\alpha_1\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}<0,\\-\alpha_1\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}<0.\end{cases}$$

Если $\alpha_1=1$, то для $\Lambda_{ii}>0$, $\lambda_{ij}>0$ $(i,j=1,2;i\neq j)$ существует положительное число α_2 такое, что

$$\begin{Bmatrix}\Lambda_{11}-\alpha_2\lambda_{21}<0\\-\lambda_{12}+\alpha_2\Lambda_{22}<0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\dfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}}<\alpha_2\\\dfrac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}>\alpha_2\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\left\{\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}}<\alpha_2<\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right\},$$

чего можно достичь при $\Lambda_{11}\Lambda_{22}<\lambda_{12}\lambda_{21}$, например, для

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right].\tag{3.8}$$

Заметим, из третьего неравенства в (3.7) получаем для $\alpha_1=1$, и α_2 из (3.8), что

$$0<\alpha_3<\frac{1}{\Lambda_{33}}\left[\lambda_{13}+\frac{\lambda_{23}}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\right],$$

например, установив

$\alpha_3=\dfrac{1}{2\Lambda_{33}}\left[\lambda_{13}+\dfrac{\lambda_{23}}{2}\left(\dfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}+\dfrac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}}\right)\right].$ Продолжая последовательно проведенные выше построения, используя четвертое неравенство из (3.7) находим, применяя при этом уже вычисленные $\alpha_1=1$, α_2, α_3, и т.д. таким образом достигаем рекуррентно

$$\alpha_N=\frac{1}{2\Lambda_{NN}}\left[\lambda_{1N}+\alpha_2\lambda_{2N}+...+\alpha_{N-1}\lambda_{N-1N}\right].$$

Замечание 3.1. Аналогично лемме 3.3. получаем, что, если в задаче Γ_N симметричные $n\times n$ матрицы D_{ij} и положительные числа $\Lambda_{ii},\lambda_{ij}$ удовлетворяют условиям

$$D_{ii}>0, D_{ij}<0 \text{ при } i\neq j \text{ и}$$
$$\Lambda_{11}\Lambda_{33}<\lambda_{13}\lambda_{31},$$

то при

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}}+\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right),$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}}+\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right)\frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}}\right],\ldots$$

α_γ $(\gamma=4,...,N)$ строятся с использованием леммы 3.3, квадратичная форма

$$f(u)=f_1(u)+\alpha_2 f_2(u)+\alpha_3 f_3(u)+...+\alpha_N f_N(u)=$$
$$=u_1'd_1u_1+u_2'd_2u_2+u_3'd_3u_3+...+u_N'd_Nu_N$$

становится определенно отрицательной; постоянные $d_i<0$ найдены в (3.6).

Действительно, определенные выше α_2 и α_3 также являются решением специальных строгих неравенств из (3.5).

Отметим, что кроме приведенных в лемме 3.3. и замечании 3.1. решений α_γ системы строгих неравенств (3.5) – континуум. Продемонстрируем далее, что каждое из них при $D_{ii}>0, D_{ij}<0$ $(i,j\in\mathbb{N}, i\neq j)$ «порождает» соответствующее равновесие санкций и контрсанкций дифференциальной игры Γ.

Замечание 3.2. Для нахождения положительных решений (3.5) можно было бы использовать подход С.Н. Черникова из книги «Линейные неравенства», но в настоящей работе с целью отказа от диктуемых указанной методологией громоздких конструкций (преобразований и записей) предложен авторский способ, примененный при доказательстве леммы 3.3.

Лемма 3.4. Решению $x(t)$ системы $\dot{x}=K(t)x$, $x(t_0)=x_0$, где $K(\cdot)\in C_{n\times n}[0,\vartheta]$ присуще свойство «нетривиальности», именно,

$$x_0\neq 0_n \Rightarrow x(t)\neq 0_n \;\; \forall t\in[t_0,\vartheta];$$

здесь 0_n нуль n-вектор из $\mathbb{R}^n$.

Доказательство от противного: пусть $\exists$ $t_1\in(t_0,\vartheta]$ такой, что $x(t_1)=0_n$. Указанное означает, что в момент t_1 через позицию $(t_1,0_n)$ проходит два решения системы $\dot{x}=K(t)x$: тривиальное $x^{(1)}(t)=0_n$ $\forall t\in[0,\vartheta]$ и нетривиальное $x^{(2)}(t)$, порожденное ненулевым начальным условием $x_0\neq 0_n$. Это противоречит теореме единственности решения матричного линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами.

Утверждение 3.1. Если в дифференциальной игре Γ

$$D_{ii}>0, D_{ij}<0, C_i<0 \;(i,j\in\mathbb{N}, i\neq j),$$
$$\Lambda_{11}\Lambda_{22}<\lambda_{12}\lambda_{21}, \qquad (3.9)$$

то максимальная по Парето ситуация U^P в N-критериальной задаче Γ_v будет

$$\begin{aligned}&U^P=(U_1^P,U_2^P,...,U_N^P)\div(u_1^P(t,x),u_2^P(t,x),...,u_N^P(t,x))=u^P(t,x)=\\&=(Q_1^P(t)x,Q_2^P(t)x,...,Q_N^P(t)x)=\\&=(-d_1^{-1}\Theta^P(t)x,-d_2^{-1}\Theta^P(t)x,...,-d_N^{-1}\Theta^P(t)x),\end{aligned} \qquad (3.10)$$

где симметричная и непрерывная на $[0,\vartheta]$ $n\times n$ - матрица

$$\Theta^P(t)=[X^{-1}(t)]'\{C^{-1}+\int_t^{\vartheta}X^{-1}(\tau)[d^{-1}_1+d^{-1}_2+...+d^{-1}_N],$$
$$[X^{-1}(\tau)]'d\tau\}^{-1}X^{-1}(t) \qquad (3.11)$$

постоянные отрицательные числа d_i определены в (3.6), числа

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right], \alpha_3=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{12}}{\lambda_{21}}+\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right], \qquad (3.12)$$

остальные $\alpha_\gamma(\gamma=4,...,N)$ находятся по рекуррентным формулам

$$\alpha_m=\frac{1}{2\Lambda_{mm}}\left[\lambda_{1m}+\alpha_2\lambda_{2m}+...+\alpha_{m-1}\lambda_{m-1m}\right]$$
$$(m=4,...,N), \qquad (3.13)$$

здесь, напомним, величина Λ_{ii} – наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii}-\Lambda E_n]=0$ $(i\in\mathbb{N})$, величина $-\lambda_{ij}$ – наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ij}-\lambda E_n]=0$ $(i,j\in\mathbb{N}, i\neq j)$, E_n – единичная $n\times n$-матрица, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x$, $X(\vartheta)=E_n$.

Доказательство. Найдем максимальную по Парето ситуацию U^P, применяя лемму 3.3. (используем (2.4)) и метод динамического программирования [4, с.112]. Указанный метод, с учетом свойства 2.2., сведется к реализации двух следующих этапов.

Первый этап. Для задачи Γ требуется найти $N-1$ положительных числа $\alpha_m(m=2,...,N-1)$ и непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $V(t,x)=x'\Theta(t)x$, $\Theta(t)=\Theta'(t)$ $\forall t\in[0,\vartheta]$, а также и n– вектор – функции $u_i(t,x,V)$ $(i\in\mathbb{N})$ такие, что $\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$V(\vartheta,x)=x'Cx,\; C=C_1+\alpha_2C_2+...+\alpha_NC_N; \qquad (3.14)$$

с помощью скалярной функции

$$W(t,x,u_1,u_2,...,u_N,V)=\frac{\partial V}{\partial x}+\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]'(A(t)x+u_1+u_2+...+u_N)+$$
$$+u_1'd_1u_1+u_2'd_2u_2+...+u_N'd_Nu_N$$

определить N вектор – функции $u_i(t,x,V)$ $(i\in\mathbb{N})$;

исходя из $\left(\frac{\partial V}{\partial x}=grad_xV\right)$,

$$\max_{u_1,u_2,...,u_N}W(t,x,u_1,u_2,...,u_N,V)=Idem\{u_i\to u_i(t,x,V)\}$$
$$(i\in\mathbb{N}) \qquad (3.15)$$

при любых $t\in[0,\vartheta]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $V\in\mathbb{R}$. Достаточные условия существования $u_i(t,x,V)$ в (3.15) сводятся к выполнению требований: при $\forall(t,x)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n$ должны выполняться

$$\left.\frac{\partial W}{\partial u_i}\right|_{u(t,x,V)}=\frac{\partial V}{\partial x}+2d_iu_i(t,x,V)=0_n \;\;(i\in\mathbb{N}), \qquad (3.16)$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i^2}=2d_iE_n<0\;\;(i\in\mathbb{N}),$$

здесь, напомним, 0_n нулевой n– вектор-столбец из $\mathbb{R}^n$, а $d_i<0$ в силу леммы 3.3.

Из (3.16) получаем

$$u_i(t,x,V)=-\frac{1}{2}d_i^{-1}\frac{\partial V}{\partial x}\;\;(i\in\mathbb{N}). \qquad (3.17)$$

Поэтому

$$W(t,x,u(t,x,V),V)=W[t,x,V]=$$
$$=\frac{\partial V}{\partial t}+\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]'A(t)x-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'[d_1^{-1}+d_2^{-1}+...+d_N^{-1}]\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Второй этап. Найдем решение вида $V = V^P(t,x) = x'\Theta^P x, \quad \Theta^P = [\Theta^P(t)]'$ дифференциального уравнения с частными производными

$$W[t,x,V] = 0$$

и граничным условием $(C = C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_N C_N)$

$$V(\vartheta, x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. для $\forall t \in [0,\vartheta], \forall x \in \mathbb{R}^n$ должно иметь место

$$W[t,x,V(t,x) = x'\Theta^P x] = 0, \ V(\vartheta,x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Оба эти равенства выполнены, если симметричная $n \times n$-матрица $\Theta^P(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному нелинейному уравнению типа Риккати ($0_{n\times n}$ нулевая $n \times n$-матрица)

$$\dot{\Theta}^P(t) + \Theta^P(t)A(t) + A'(t)\Theta^P(t) - \Theta^P(t)[d_1^{-1} + d_2^{-1} + ... + d_N^{-1}]\Theta^P(t) = 0_{n\times n},$$

$$\Theta^P(\vartheta) = C = C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_N C_N].$$

Решение $\Theta^P(t)$ полученного матричного уравнения типа Риккати имеет [4, с.65] вид (3.11), причем учтена импликация

$$C_i < 0 \ \ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_N C_N < 0.$$

Наконец, из (3.11), а так же учитывая

$$[V(t,x) = x'\Theta^P(t)x] \Rightarrow \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} = 2\Theta^P(t)x\right],$$

приходим к справедливости (3.10). Таким образом, максимальная по Парето ситуация U^P в задаче Γ_v имеет вид (3.10), (3.11).

Перейдем к построению набора максимальных по Парето выигрышей $J^P = (J_1(U^P,t_0,x_0), J_2(U^P,t_0,x_0), ..., J_N(U^P,t_0,x_0)) = (J_1^P, J_2^P, ..., J_N^P)$ также при помощи идей метода динамического программирования.

Утверждение 3.2. Пусть выполнены требования (3.9) из утверждения 3.1 и для дифференциальной игры Γ удалось найти N скалярных непрерывно дифференцируемых функций вида $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x \ (i \in \mathbb{N})$ таких, что

$$V_i(\vartheta,x) = x'C_i x \ \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

система из N уравнений с частными производными

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x}\right)'(N(t)x + x'\Theta^P(t)M_i(t)\Theta^P(t)x) = 0, \quad (3.18)$$

$$V_i(\vartheta,x) = x'C_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ (i \in \mathbb{N})$$

имеет решение вида $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t) \ (i \in \mathbb{N})$.

Тогда при любой начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0_n$ имеет место

$$J_i^P = J_i(U^P,t_0,x_0) = x_0'\Theta_i^P(t_0)x_0 \ (i \in \mathbb{N}).$$

В (3.18) непрерывные $n \times n$-матрицы

$$N(t) = A(t) - (d_1^{-1} + d_2^{-1} + ... + d_N^{-1})E_n,$$

$$M_i(t) = \Theta^P(t)([d_1^{-1}]^2 D_{i1} + [d_2^{-1}]^2 D_{i2} + ... + [d_N^{-1}]^2 D_{iN})\Theta^P(t)$$
$$(i \in \mathbb{N}),$$

$n \times n$-матрица $\Theta^P(t)$ приведена в (3.10),(3.11), числа d_i в (3.6), симметричные $n \times n$-матрицы

$$\Theta_i(t) = \left[Y^{-1}(t)\right]'\left\{C_i - \int_t^{\vartheta} Y'(\tau)\Theta(\tau)M_i(\tau)\Theta(\tau)Y(\tau)d\tau\right\}Y^{-1}(t)$$
$$(i \in \mathbb{N}). \quad (3.19)$$

Далее, $Y(t)$ – фундаментальная матрица решения однородной системы $\dot{y} = N(t)y, \ Y(\vartheta) = E_n$.

Доказательство. Составим N скалярных функций

$$W_i[y,x,V_i] = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\right]'(N(t)x + [u_1^P(t,x)]'D_{i1}u_1^P(t,x) + \quad (3.20)$$

$$+[u_2^P(t,x)]'D_{i2}u_2^P(t,x) + ... + [u_N^P(t,x)]'D_{iN}u_N^P(t,x)$$
$$(i \in \mathbb{N}),$$

причем $u_i^P(t,x)$ – n-вектор-функции, определенные в (3.10), (3.11).

Найдем решение $V_i(t,x) \ (i \in \mathbb{N})$ системы из N уравнений с частными производными

$$W_i[t,x,V_i] = 0, \ V_i(\vartheta,x) = x'C_i x \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ (i \in \mathbb{N}) \quad (3.21)$$

в виде квадратичной формы $V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x$, $[\Theta_i(t)]' = \Theta_i(t) \ (i \in \mathbb{N})$.

Установим два факта.

Во-первых, решению системы (3.20), (3.21) присуще свойство

$$V_i(t_0,x_0) = J_i(U^P,t_0,x_0) \ \ (i \in \mathbb{N}), \quad (3.22)$$

где ситуация $U^P = (U_1^P, U_2^P, ..., U_N^P)$ имеет вид (3.10), (3.11). Действительно, если U^P – ситуация из (3.5) - (3.7) , то согласно (3.20), (3.21) для решения $x^P(t)$ системы $\dot{x} = N(t)x, \ x(t_0) = x_0 \neq 0_n$, при $x = x^P(t)$ будет

$$0 = W_i[t,x^P(t),V_i(t,x^P(t))] = \frac{\partial V_i(t,x^P(t))}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_i(t,x^P(t))}{\partial x}\right]' N(t)x^P(t) +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}[u_j^P(t,x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t,x^P(t)) = \overline{W}_i[t] \quad \forall t \in [t_0,\vartheta] \ \ (i \in \mathbb{N}).$$

Интегрируя обе части этого тождества в пределах от t_0 до ϑ, с учетом граничных условий из (3.21), приходим к

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta}\overline{W}_i[t]dt = \int_{t_0}^{\vartheta}\frac{dV_i(t,x^P(t))}{dt}dt + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{N}[u_j^P(t,x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t,x^P(t))dt =$$

$$= V_i^P(\vartheta,x^P(\vartheta)) - V_i^P(t_0,x^P(t_0)) + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{N}[u_j^P(t,x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t,x^P(t))dt =$$

$$= x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta}\sum_{j=1}^{N}[u_j^P(t,x^P(t))]'D_{ij}u_j^P(t,x^P(t))dt - V_i^P(t_0,x^P(t_0)) =$$

$$= J_i(U^P,t_0,x_0) - V_i^P(t_0,x^P(t_0))(i \in \mathbb{N}).$$

Из вышеуказанного следует справедливость равенств (3.22).

Во-вторых, установим, что решение системы имеет вид $V_i(t,x)=x'\Theta_i(t)x,$ симметричная – $n\times n$-матрица представима в виде (3.19). Действительно, подставив $V_i(t,x)=x'\Theta_i(t)x,$ в (3.21) получаем справедливость (3.22), если только $\Theta_i(t)$ является решением матричного линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\Theta_i+\Theta_i N+N\Theta_i+\Theta^P(t)M_i\Theta^P(t)=0_{n\times n},$$

$$\Theta_i(\vartheta)=C_i \quad (i\in\mathbb{N}).$$

Подстановка $\Theta_i(t)$ показывает, что симметричная – $n\times n$-матрица из (3.19) является решением (3.23), что завершает доказательство утверждения 3.2. Заметим, что

$$\frac{dY^{-1}(t)}{dt}=-Y^{-1}(t)A(t),\ \frac{d[Y^{-1}(t)]'}{dt}=-A'(t)[Y^{-1}(t)]'.$$

Замечание 3.3. Объединение утверждений 3.1 и 3.2 приводит к «итоговому результату», касающегося явного вида максимального по Парето решения $(U^P,J^P)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^N$ игры Γ.

Пусть для дифференциальной игры Γ постоянные симметричные – $n\times n$-матрицы

$$D_{ii}>0, D_{ij}<0, C_i<0 \ (i,j\in\mathbb{N}, i\neq j);$$
$$\Lambda_{11}\Lambda_{22}<\lambda_{12}\lambda_{21}.$$

Тогда при $\forall(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times\mathbb{R}^n, x_0\neq 0_n$ будет

$$U^P\div u^P(t,x)=(-d_1^{-1}\Theta^P(t)x,-d_2^{-1}\Theta^P(t)x,....,-d_N^{-1}\Theta^P(t)x),$$

$$J^P=(J_1^P,J_2^P,...,J_N^P),\ J_i^P=x_0'\Theta_i(t_0)x_0 \ (i\in\mathbb{N}),$$

а симметричные – $n\times n$-матрицы

$$\Theta^P(t)=[X^{-1}(t)]'\{C^{-1}+\int_t^{\vartheta}X^{-1}(\tau)$$
$$[d_1^{-1}+d_2^{-1}+...+d_N^{-1}][X^{-1}(\tau)]'d\tau\}^{-1}X^{-1}(t),$$

$$\Theta_i(t)=[Y^{-1}(t)]'\left\{C_i-\int_t^{\vartheta}Y'(\tau)\Theta^P M_i(\tau)\Theta^P Y(\tau)d\tau\right\}Y^{-1}(t),$$

$n\times n$-матрица $X(t)$, $(Y(t))$– фундаментальная матрица решения системы $\dot{x}=A(t)x,\ X(\vartheta)=E_n$ (соответственно, $\dot{y}=N(t)y,\ Y(\vartheta)=E_n$);

матрицы

$$C=C_1+\alpha_2C_2+...+\alpha_NC_N,$$
$$N(t)=A(t)-(d_1^{-1}+d_2^{-1}+...+d_n^{-1})\Theta^P(t),$$
$$M_i(t)=\Theta^P(t)([d_1^{-1}]^2D_{i1}+[d_2^{-1}]^2D_{i2}+...+[d_N^{-1}]^2D_{iN})\Theta^P(t),$$

числа $\alpha_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}}+\dfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right),$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{13}}{\Lambda_{33}}+\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{31}}\right)\frac{\lambda_{32}}{\Lambda_{22}}\right],\ldots$$

$\alpha_\gamma\ (\gamma=4,...,N)$, заданы в (3.13), отрицательные числа d_i определены в (3.6), величина $\Lambda_{ii}(-\lambda_{ij})$ – наибольший корень характеристического уравнения $det[D_{ii}-\Lambda E_n]=0$ (соответственно $det[D_{ij}-\lambda E_n]=0$) $(i,j\in\mathbb{N}, i\neq j)$.

4. Утверждения о мажорантах

Далее перейдем к утверждениям, которые

1) позволят выявить при выполнении (3.4) отсутствие в дифференциальных играх вида Γ равновесия по Нэшу;
2) реализуют для игры Γ концепцию санкций и контрсанкций.

Указанные выше пункты 1 и 2 получаются на основании специальной знакоопределенности квадратичных форм, используемых в интегральных слагаемых функций выигрыша (2.3). Далее предполагаем выполнение ограничения (3.4) и, следовательно, существует максимальная по Парето в Γ_v ситуация

$$U^P=(U_1^P,U_2^P,...,U_N^P)\div(u_1^P(t,x),u_2^P(t,x),...,u_N^P(t,x))=u^P(t,x)=$$
$$=(Q_1^P(t)x,Q_2^P(t)x,...,Q_N^P(t)x)=(-d_1^{-1}\Theta^P(t)x,-d_2^{-1}\Theta^P(t)x,...,-d_N^{-1}\Theta^P(t)x).$$

Лемма 4.1. Пусть в (2.3) при $i=1$ матрица $D_{11}>0.$ Тогда для максимальной по Парето в игре Γ ситуации U^P существует постоянная $\alpha^{(1)}(U^P,t_0,x_0)>0$ такая, что при $\forall\alpha\geq\alpha^{(1)}(U^P,t_0,x_0)>0$ и стратегии первого игрока $U_1^T\div\alpha x$ будет

$$J_1(U_1^T,U_2^P,...,U_N^P,t_0,x_0)>J_1(U_1^P,U_2^P,...,U_N^P,t_0,x_0) \quad (4.1)$$

для любых начальных позиций $(t_0,x_0)\in[0,\vartheta)\times[\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}]$..

Доказательство. В утверждении 3.2. установлено существование функции Беллмана $V_1(t,x)=x'\Theta_1(t)x$, для которой

$$J_1(U^P,t_0,x_0)=V_1(t_0,x_0)=x_0'\Theta_1(t_0)x_0,$$

здесь непрерывная на $[0,\vartheta)$ – симметричная $n\times n$-матрица $\Theta_1(t)$ имеет вид (3.19) $(i=1)$.

Рассмотрим на данном этапе стратегию первого игрока $U_1^T\div u_1^T(t,x)=\alpha x,$ величину числового параметра $\alpha>0$ определим далее. Вследствие симметричности матрицы D_{11} и при этом $D_{11}>0$ имеет место

$$u_1'D_{11}u_1\geq\lambda_1\|u_1\|^2=\lambda_1u_1'u_1 \quad \forall u_1\in\mathbb{R}^n, \qquad (4.2)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма и $\lambda_1>0$ – наименьший корень характеристического уравнения $det[D_{11}-\lambda E_n]=0$.

Для доказательства настоящей леммы используем из (3.11) симметричную $n\times n$-матрицу $\Theta^P(t)$; из (3.10) стратегию второго игрока $U_2^P\div Q_2^P(t)x$,…, стратегию N -го игрока $U_N^P \div Q_N^P(t)x$. Затем рассмотрим скалярную функцию

$$W_1[t,x] = [W_1(t,x,u_1^T(t,x) = \alpha x, u_2^P(t,x) = Q_2^P x, \ldots, u_N^P(t,x) = Q_N^P x, V_1(t,x) = x'\Theta_1(t)x] =$$

$$= \frac{\partial V_1(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1(t,x)}{\partial x}\right]' (A(t)x + u_1^T(t,x) + u_2^P(t,x) + \ldots + u_N^P(t,x)) +$$

$$+[u_1^T(t,x)]'d_1 u_1^T(t,x) + [u_2^P(t,x)]'d_2 u_2^P(t,x) + \ldots + [u_N^P(t,x)]'d_N u_N^P(t,x) \geq$$

$$\geq x'\frac{d\Theta_1(t)}{dt}x + 2x'\Theta_1(t)[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)]x +$$

$$+x'(\lambda_1\alpha^2 E_n)x + x'[Q_2^P(t)]'D_{12}Q_2^P(t)x + \ldots + x'[Q_N^P(t)]'D_{1N}Q_N^P(t)x =$$

$$= x'\{\frac{d\Theta_1(t)}{dt} + \Theta_1(t)[A(t) + \alpha E_n + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)] +$$

$$+[A'(t) + \alpha E_n + (Q_2^P(t))' + \ldots + (Q_N^P(t))']\Theta_1(t) + \lambda_1\alpha^2 E_n +$$

$$+[Q_2^P(t)]'D_{12}Q_2^P(t) + \ldots + [Q_N^P(t)]'D_{1N}Q_N^P(t)\}x = x'M_1(t,\alpha)x.$$

Используемая выше в фигурных скобках матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична и имеет вид

$$M_1(t,\alpha) = \lambda_1\alpha^2 E_n + 2\alpha\Theta_1(t) + K_1(t),$$

где непрерывная и симметричная $-n \times n$ -матрица

$$K_1(t) = \dot{\Theta}_1(t) + \Theta_1(t)[A(t) + Q_2^P(t) + \ldots + Q_N^P(t)] + [Q_2^P(t)]'D_{12}Q_2^P(t) + \ldots + [Q_N^P(t)]'D_{1N}Q_N^P(t) +$$
$$+[A'(t) + (Q_2^P(t))' + \ldots + (Q_N^P(t))']\Theta_1(t)$$

Элементы матриц $\Theta_1(t)$ и $K_1(t)$ непрерывны на $[0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены на компакте $[0,\vartheta]$. Множитель α^2 входит только в диагональные элементы матрицы $M_1(t,\alpha)$. При этом $\lambda_1 > 0$ является наименьшим корнем характеристического уравнения $det[D_{11} - \lambda E_n] = 0,$ где E_n – единичная $n \times n$ -матрица. Следовательно, постоянную $\alpha = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ можно выбрать настолько большой, что все ведущие миноры матрицы $M_1(t,\alpha)$ стали положительными при $\forall t \in [0,\vartheta],\ \forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ (доказательство данного факта приводится далее). Поэтому, согласно лемме 3.2 и [3, с. 88] квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ будет определенно положительной для всех $t \in [0,\vartheta]$ и постоянных $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$.

Далее перейдем к доказательству существования постоянной $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) > 0$ такой, что при всех $\alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ будет определенно положительной для $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $x \in \mathbb{R}^n$, при этом – $n \times n$ -матрица $M_1(t,\alpha)$ симметрична. По критерию Сильвестра квадратичная форма $x'M_1(t,\alpha)x$ определенно положительна, если все ведущие миноры $\Delta_r (r = 1,\ldots,n)$ матрицы $M_1(t,\alpha)$ положительны. Миноры Δ_r ведущие, т.е. расположены в первых r строках и первых r столбцах матрицы $M_1(t,\alpha)$, т.е. $(r = 1,\ldots,n)$

$$\Delta_r(t,\alpha) = \begin{vmatrix} \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{11}(t) + k_{11}(t) & \cdots & \alpha l_{1r}(t) + k_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha l_{r1}(t) + k_{r1}(t) & \cdots & \lambda_1\alpha^2 n + \alpha l_{rr}(t) + k_{rr}(t) \end{vmatrix}$$

должны быть положительны при $\forall t \in [0,\vartheta]$ и $\forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$. Раскрывая определители $\Delta_r(t,\alpha)$ и располагая слагаемые по убыванию степени параметра α, получаем

$$\Delta_r(t,\alpha) = a_0\alpha^{2r} + a_1(t)\alpha^{2r-1} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t),$$

причем постоянная $a_0 = \lambda_1^r n^r > 0$, а остальные коэффициенты $a_1(t), \ldots.., a_{2r}(t)$ непрерывны на компакте $[0,\vartheta]$ и, следовательно, равномерно ограничены. Указанная равномерная ограниченность приводит к существованию $\Omega_r = const > 0$ такого, что

$$\max_{0 \leq t \leq \vartheta}\{a_p(t) \mid p = 0,1,\ldots,2r\} < \Omega_r.$$

Далее докажем, что при

$$\alpha > \frac{\Omega_r}{|a_0|} + 1 = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$$

будет

$$\left|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)\right| < \left|a_0\alpha^{2r}\right|,$$

т.е. знак многочлена $\Delta_r(t,\alpha)$ при достаточно большом $|\alpha|$ определяется знаком его старшего члена. Действительно,

$$\left|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)\right| \leq$$

$$\leq \left|a_1(t)\alpha^{2r-1}\right| + \left|a_2(t)\alpha^{2r-2}\right| + \ldots + \left|a_{2r-1}(t)\alpha\right| + \left|a_{2r}(t)\right| \leq$$

$$\leq \Omega_r(\alpha^{2r-1} + \alpha^{2r-2} + \ldots + \alpha + 1) = \Omega_r\frac{\alpha^{2r-1}}{\alpha - 1}.$$

Кроме того,

$$\left[\alpha > \frac{\Omega_r}{|a_0|} + 1\right] \Rightarrow [\Omega_r < a_0(\alpha - 1)].$$

Следовательно, подставляя в предыдущее неравенство вместо Ω_r величину $a_0(\alpha - 1)$, получаем

$$\left|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)\right| <$$

$$< a_0(\alpha - 1)\frac{\alpha^{2r-1}}{\alpha - 1} = a_0(\alpha - 1) < a_0\alpha^{2r}.$$

Таким образом, при

$$\forall \alpha \geq \Omega_r = \alpha^{(r)}(U, t_0, x_0) > 0,\ \forall t \in [0,\vartheta]$$

имеет место

$$\left|a_1(t)\alpha^{2r-1} + a_2(t)\alpha^{2r-2} + \ldots + a_{2r-1}(t)\alpha + a_{2r}(t)\right| < a_0\alpha^{2r},$$

т.е. при достаточно большом α знак многочлена $\Delta_r(t,\alpha)$ определяется знаком его старшего члена. Далее для каждого $r = 1,\ldots,n$ находим число $\Omega_r > 0$ и считаем $\alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0) = \max\limits_{r=1,\ldots,n}\Omega_r$.

Следовательно, при $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ получаем

$$\tilde{W}_1[t,x] = x'M_1(t,\alpha^{(1)})x > 0\ \forall t \in [0,\vartheta]$$
$$\text{и}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}. \qquad (4.3)$$

Обозначим через $\tilde{x}(t)$ решение при $t \in [0,\vartheta]$ векторного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + \alpha^{(1)}x + Q_2^P(t)x + \ldots + Q_N^P(t)x,$$
$$x(t_0) = x_0 \neq 0_n.$$

Используем лемму 3.2. и импликацию $[x_0 \neq 0_n] \Rightarrow (\tilde{x}(t) \neq 0_n \, t \in [0, \vartheta])$, согласно (4.3), получаем

$$\tilde{W}_1[t, \tilde{x}(t)] > 0 \quad \forall t \in [0, \vartheta].$$

Интегрируя обе части последнего неравенства (4.3) в пределах от t_0 до ϑ, а также учитывая граничное условие $\Theta_1(\vartheta) = C_1$ и $u_1^T[t] = \alpha^{(1)}\tilde{x}(t)$, имеем

$$0 = \int_{t_0}^{\vartheta} \tilde{W}_1[t, \tilde{x}(t)]dt = \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ \frac{\partial V_1(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1(t,x)}{\partial x} \right]' [A(t)x + \alpha^{(1)}E_n x + Q_2^P(t)x + \ldots + Q_N^P(t)x] \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{\vartheta} \left\{ (\alpha^{(1)})^2 x' D_{11} x + x'[Q_2^P(t)]' D_{12} Q_2^P(t) + \ldots + x'[Q_N^P(t)]' D_{1N} Q_N^P(t) \right\}_{x=\tilde{x}(t)} dt =$$
$$= \int_{t_0}^{\vartheta} \frac{dV_1(t, \tilde{x}(t))}{dt} dt + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} [u_j^T[t]]' D_{1j} u_j^T[t] dt =$$
$$= [\tilde{x}(\vartheta)]' C_1 \tilde{x}(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{N} [u_j^T[t]]' D_{1j} u_j^T[t] dt - V_1(t_0, x_0) =$$
$$= J_1(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) - V_1(t_0, x_0).$$

Наконец учитывая $J_1(U_1^P, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) = V_1(t_0, x_0)$, сразу следует справедливость леммы 4.1.

Замечание 4.1. Рассмотрим внутреннюю оптимизационную задачу в игре Γ: найти $\max_{U_1 \in \mathcal{U}_1} J_1(U_1, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0)$ при ограничении (2.1), фиксированных стратегиях $U_2 = U_2^P \in \mathcal{U}_2$ второго, …, $U_N = U_N^P \in \mathcal{U}_N$ N–го игроков, а также $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}]$. По существу лемма 4.1 утверждает, что при $D_{11} > 0$, $x_0 \neq 0_n$ рассматриваемая задача максимизации не имеет решения. Действительно, при выборе любой стратегии $U_1 \in \mathcal{U}_1$ первым игроком всегда существует стратегия этого игрока U_1^T такая, что

$$J_1(\tilde{U}_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) > J_1(U_1, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0)$$
$$\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times [\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}].$$

Подобный результат при выборе решения игры Γ позволяет сразу «отсекать» такие концепции принятия равновесных решений игровых задач вида Γ, в условиях которых фигурирует максимизация по U_1 функции выигрыша первого игрока, (например, не использование при $D_{11} > 0$ концепции равновесия по Нэшу в качестве принципа выбора решения в игре Γ).

Следовательно в дифференциальной игре Γ при выполнении требований (3.4) ситуация равновесия по Нэшу не существует. При этом стратегия первого игрока $U_1^T \div \alpha x \ \forall \alpha \geq \alpha^{(1)}(U^P, t_0, x_0)$ реализует, согласно (2.5) санкцию первого игрока на максимальную по Парето (эффективную) ситуацию U^P. Далее в последующих леммах будем считать позицию (t_0, x_0) «замороженной» и совпадающей с той, которая используется в лемме 4.1, а в угрожающей стратегии первого игрока $U_1^T \div \alpha x$ предполагаем постоянным скаляр $\alpha = \alpha^{(1)}$. Считаем также выполненными ограничения (3.4). Итак, лемма 4.1. устанавливает справедливость нижеследующего утверждения.

Утверждение 4.1. Если в игре Γ хотя бы одна из постоянных симметричных $n \times n$-матриц $D_{ii} > 0$ $(i \in \mathbb{N})$, то в дифференциальной игре Γ не существует равновесия по Нэшу, т.е. не существует стратегии $U_i^e \in \mathcal{U}_i$, для которой выполняется соответствующее требование из определения 2.2.

Далее отметим, что

1) условие $D_{ii} > 0$ при фиксированном $i \in \mathbb{N}$ не допускает выполнение только i–го неравенства из определения 2.2. Указанного достаточно для отсутствия равновесной по Нэшу ситуации U^e в игре Γ. Если $D_{ii} > 0$ при любых $i \in \mathbb{N}$, то не могут реализоваться все N равенств из определения 2.2;
2) очевидна эквиваленция

$$D > 0 \Leftrightarrow -D < 0$$

$(D < 0)$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на – 1.

Следовательно, лемма 4.1 приводит также и к справедливости

Лемма 4.2. Пусть в (2.3) матрица $D_{12} < 0$. Тогда существует постоянная $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) > 0$ такая, что для стратегии второго игрока $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ будет

$$J_1(U_1^T, U_2^C, U_3^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) < J_1(U^P, t_0, x_0), \quad (4.4)$$

т.е. стратегия $U_2^C \div \alpha x$ при $\forall \alpha \geq \alpha^{(2)}$ реализует в игре Γ неполную контрсанкцию в ответ на санкцию U_1^T первого игрока.

Доказательство. Доказательство следует из леммы 4.1. Далее предполагаем, что уже построена функция Беллмана $\tilde{V}_1(t,x) = x'\tilde{\Theta}(t)x, \ \tilde{\Theta}(t) = \Theta_1(t)$ такая, что

$$J_1(U_1^T, U_2^P, \ldots, U_N^P, t_0, x_0) = \tilde{V}_1(t_0, x_0). \quad (4.5)$$

Аналогично с использованием лемм 4.1 и 4.2 устанавливается справедливость следующей леммы 4.3. Напомним, что в указанной лемме считаем фиксированными начальную позицию (t_0, x_0), $n \times n$-непрерывную матрицу $\Theta^P(t)$, стратегию $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$ неполной контрсанкции, используемых в леммах 4.1 и 4.2, и выполненными ограничения (3.4).

Лемма 4.3. Имеет место импликация $D_{22} > 0 \Rightarrow \exists \alpha^{(3)}(U^P, U_1^T, t_0, x_0) = const > 0$ такая, что при $\forall \alpha \geq \alpha^{(3)}$ и стратегии $U_2^C \div \alpha x$ будет

$$J_2(U_1^T, U_2^C, U_3^P, t_0, x_0) < J_2(U_1^T, U_2^P, U_3^P, t_0, x_0),$$

т.е. стратегия второго игрока $U_2^C \div (\max\{\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\})x$ завершает построение полной контрсанкции совместно с $U_2^C \div \alpha^{(2)}x$ на санкцию первого на U^P.

Аналогичные рассуждения о применении санкции любым игроком и «обнуляющей» ее контрсанкции одного из оставшихся.

5. Доказательство существования.

Теорема 5.1. Предположим, что для игры Γ выполнены ограничения (3.9). Тогда набор

$$(U^P, J_1^P, J_2^P, \dots, J_N^P) = ((U_1^P, U_2^P, \dots, U_N^P), J_1(U^P, t_0, x_0), J_2(U^P, t_0, x_0), \dots, J_N(U^P, t_0, x_0)) =$$
$$= ((-d_1^{-1}\Theta^P(t)x, -d_2^{-1}\Theta^P(t)x, \dots, -d_N^{-1}\Theta^P(t)x), x_0'\Theta_1(t_0)x_0, x_0'\Theta_2(t_0)x_0, \dots, x_0'\Theta_N(t_0)x_0)$$

является равновесием санкций и контрсанкций для дифференциальной игры

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{N}, \Sigma \div (2.2), \{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{J_i(U, t_0, x_0) \div (2.3)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle,$$

здесь матрица

$$\Theta^P(t) = [X^{-1}(t)]'\{C^{-1} - \int_t^{\vartheta} X^{-1}(\tau)[d_1^{-1} + d_2^{-1} + \dots + d_N^{-1}][X^{-1}(\tau)]'d\tau\}^{-1} X^{-1}(t),$$

постоянные d_i заданы в (3.6), $n \times n$-матрицу $C = C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_N C_N$,

числа $\alpha_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \dfrac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)$,

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda_{13}}{\lambda_{33}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_{11}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}}{\Lambda_{22}}\right)\frac{\lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\right], \dots,$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\Lambda_{mm}}[\lambda_{1m} + \alpha_2\lambda_{2m} + \dots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1m}] \quad (m = 4, \dots, N),$$

где Λ_{ii} – наибольший корень уравнения $det[D_{ii} - \Lambda E_n] = 0$, $-\lambda_{ij}$ – наибольший корень уравнения $det[D_{ij} - \lambda E_n] = 0$, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(\vartheta) = E_n$ $(i, j \in \mathbb{N}, i \neq j)$, а симметричные матрицы $\Theta_i(t)$ $(i \in \mathbb{N})$ определены в (3.19).

Доказательство. Из $D_{11} > 0$ следует несколько выводов: отсутствие в игре Γ ситуации равновесия по Нэшу и наличие санкции U_1^T со стороны первого игрока на максимальную по Парето ситуацию U^P в N– критериальной задаче Γ_ν (замечание 4.1). Существование максимальной по Парето ситуации и максимальных по Парето выигрышей в Γ_ν и при этом их явный вид получены в утверждениях 3.1 и 3.2. соответственно. Условие $D_{21} < 0$ позволяет сконструировать неполную контрсанкцию U_2^C второго игрока в ответ на санкции первого (лемма 4.2), а $D_{22} > 0$ и лемма 4.3 дают возможность «довести» второму игроку неполную контрсанкцию U_2^C до полной U_2^C. При этом требование $D_{22} > 0$ повлечет отсутствие ситуации равновесия по Нэшу (не существует $\max\limits_{U_2} J_2(U_1^e, U_2, U_3^e, \dots, U_N^e, t_0, x_0)$ при $\forall U_2 \in \mathcal{U}_2$) и возможность аналитически построить второму игроку санкцию U_2^T на U^P в игре Γ:

$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, \dots, U_N^P) \leq J_2(U^P t_0, x_0). \qquad (5.1)$$

Условие $D_{22} > 0$ и лемма 4.4. обеспечивают существование неполной контрсанкции $\forall U_1^C \in \mathcal{U}_1$ первого игрока на санкцию второго U_2^T:

$$J_2(U_1^C, U_2^T, U_3^P, \dots, U_N^P) < J_2(U^P t_0, x_0). \qquad (5.2)$$

Из максимальности по Парето U^P и свойства 2.1. будет следовать

$$J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, \dots, U_N^P) < J_1(U^P t_0, x_0), \qquad (5.3)$$

а из $D_{11} > 0$ и леммы 4.1 получаем существование $\bar{U}_1^C \in \mathcal{U}_1$ такого, что

$$J_1(\bar{U}_1^C, U_2^T, U_3^P, \dots, U_N^P) > J_1(U_1^P, U_2^T, U_3^P, \dots, U_N^P, t_0, x_0). \qquad (5.4)$$

Аналогичны построения контрсанкций в ответ на санкцию третьего игрока на U^P и т.д.

Таким образом, установили, что в игре Γ максимальную по Парето ситуацию U^P у одного из оставшихся имеется полная контрсанкция, что и доказывает теорему 5.1.

Заключение

Результаты исследования показали, что в линейно-квадратичной игре Γ при выполнении ограничений (3.4) не существует равновесия по Нэшу, однако при этом существует равновесие санкций и контрсанкций. Этот факт позволяет утверждать, что экономико-правовое обоснование построения теоретико-игровых моделей равновесия расширяет область практического применения рассматриваемого в статье класса задач. В то же время авторы не претендуют на универсальность применения теоретико-игрового инструментария при моделировании экономических процессов. При этом показывают настоятельную необходимость дополнительных исследований свойств, используемых при аналитическом конструировании различных равновесий, в том числе и равновесия санкций и контрсанкций, как механизма исследования сбалансированности (равновесности) сложных управляемых систем.

Литература

1. *Вайсборд Э.М.* “О коалиционных дифференциальных играх”, Дифференциальные уравнения, 10:4 (1974), 613–623.
2. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их

приложения, Советское радио, М., 1980.
3. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления, Наука, М., 1984.
4. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры, Учебное пособие для ВУЗов, Юрайт, М., 2017.
5. *Жуковская Л.В. (Бирюкова Л.В.)* Равновесие угроз и контругроз при неопределенности. / Автореф. дисс…. кандидата физико-математических наук: – СПб., 1996. – 15 с.
6. *Клейнер Г.Б., Рыбачук М.А.* Системная сбалансированность экономики: монография; Центральный экономико-математический институт Российской академии наук. — М. : Научная библиотека, 2017.
7. *Лейст О.Э.* Санкции в Советском праве. Государственное издательство юридической литературы, М., 1962.
8. *Мамедов М.Б.* "О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето", Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук, 4:2 (1983), 11–17.
9. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач, Физматлит, М., 2007.
10. *Case J.H.* "A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium", J. Optimiz. Theory Appl., 13:3 (1974), 378–385.
11. *Nash J.* "Non-cooperative games", Annales of Mathematics, 54 (1951), 286–295.
12. *Zhukovskii V.I.* "Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games", Mathematical Method in Operation Research, Academy of Sciences, Bulgaria, Sofia, 1985, 103–195.

Жуковский Владислав Иосифович. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. Профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики. Д.ф.-м.н., профессор Количество печатных работ: более 300. Область научных интересов: устойчивость систем, дифференциальные игры многих лиц, многокритериальные динамические задачи и проблемы принятия решений при неопределенности.

Жуковская Лидия Владиславна. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук. Ведущий научный сотрудник. К.ф.-м.н., Количество печатных работ: более 40. Область научных интересов: системный анализ, теория игр, теория многокритериальных задач. E-mail: zhukovskaylv@mail.ru

The concept of a balance of sanctions and counter-sanctions in one differential game n ≥ 2 persons

V.I. Zhukovskiy[I], L.V. Zhukovskaya[II]

[I] Moscow State University, Moscow, Russia

[II] Central Economics and Mathematics Institute Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The article presents a methodology for modeling decision-making processes in complex controlled dynamic systems: the implementation of the idea of balanced (equilibrium) systems and the formation of a new mechanism that contributes to solving the problems of equilibrium stability. These developments are based on economic and mathematical modeling using a synthesis of scientific approaches to system analysis, economics, law, game theories, operations research and decision making.

The linear-quadratic positional differential game of many people is considered. Coefficient criteria have been established at the fulfillment of which in the game there is a balance of sanctions and counter-sanctions and at the same time there is no generally accepted Nash equilibrium. The economic-legal model of active equilibrium through the legal concept of sanctions is considered, which expands the field of practical application of this class of tasks.

Keywords: *managed complex system, sanctions, counter-sanctions, balance of sanctions of counter-sanctions, active equilibriums, stability, efficiency, Pareto maximum.*

DOI: 10.14357/20790279200205

References

1. *Waisbord E.M.* 1974. O koalitsionnykh differentsial'nykh igrakh, Differentsial'nyye uravneniya [On coalition differential games", Differential equations] 10:4. 613–623.
2. *Waisbord E.M., Zhukovsky V.I.* 1980. Vvedeniye v differentsial'nyye igry neskol'kikh lits i ikh prilozheniya [Introduction to the differential games of several people and their applications] Soviet Radio. M.
3. *Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.* 1984. Matritsy i vychisleniya [Matrices and calculations] Nauka. M.
4. *Zhukovsky V.I., Chikriy A.A.* 2017. Differentsial'nyye uravneniya. Lineynokvadratichnyye differentsial'nyye igry, Uchebnoye posobiye dlya VUZov [Differential equations. Linear-square differential games, Textbook for High Schools] Yurayt. M.
5. *Zhukovskaya L.V. (Biryukova L.V.)* 1996 Ravnovesiye ugroz i kontrugroz pri neopredelennosti [Balance of threats and counter-threats under uncertainty] / Abstract. diss .... Candidate of physico-mathematical sciences. SPb.15 p.
6. *Kleiner G.B., Rybachuk M.A.* 2017. Sistemnaya sbalansirovannost' ekonomiki: monografiya [Systemic balance of the economy: monograph] Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences. M. Scientific Library.
7. *Leist O.E.* 1962. Sanktsii v Sovetskom prave [Sanctions in Soviet law. State publishing house of legal literature] M.
8. *Mamedov M.B.* 1983. O ravnovesii po Neshu situatsii, optimal'noy po Pareto [On the Nash equilibrium of a Pareto optimal situation] Izv. Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of physical and technical. Sciences 4: 2. 11–17.
9. *Podinovsky V.V., Nogin V.D.* 2007. Pareto-optimal'nyye resheniya mnogokriterial'nykh zadach [Pareto-optimal solutions of multicriteria problems] Fizmatlit. M.
10. *Case J.H.* 1974. A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium J. Optimiz. Theory Appl. 13:3. 378–385.
11. *Nash J.* 1951. Non-cooperative games. Annales of Mathematics. 54. 286–295.
12. *Zhukovskii V.I.* 1985. Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. Mathematical Method in Operation Research. Academy of Sciences. Bulgaria. Sofia. 103–195.

Zhukovskiy Vladislav Iosifovich. Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Lomonosov Moscow State University (Lomonosov Moscow State University), Moscow, Russia. Professor Department of Optimal Control Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. Research interests: stability of systems, differential games of many persons, multi-criteria dynamic problems and decision-making problems under uncertainty.

Zhukovskaya Lidiya Vladislavna. Federal State Budgetary Institution of Science Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia. Leading Researcher. Research interests: system analysis, game theory, multi-criteria problem theory. E-mail: zhukovskaylv@mail.ru