

Системный анализ в медицине и биологии

О переходе к хаосу в одной модели динамики популяций*

Н.А. Магницкий^{I,II}

^I Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

^{II} Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

Аннотация. В работе проведен аналитический и численный анализ перехода к хаосу в предложенной А.Д.Базыкиным модели динамики численности взаимодействующих популяций хищника и двух жертв. Найдены условия рождения периодического решения в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Численно показано, что переход к хаосу в системе дифференциальных уравнений, описывающих динамику взаимодействующих популяций, осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ) через субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций устойчивых предельных циклов.

Ключевые слова: динамика популяций, модель хищник-жертвы, каскады бифуркаций, теория ФШМ, аттракторы, хаос.

DOI: 10.14357/20790279200208

Введение

В работе [1] А.Д.Базыкиным с сотрудниками предложена модель динамики численности взаимодействующих популяций хищника и двух жертв. Модель является системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\alpha - x - \beta y - 4z), \\ \dot{y} &= y(\delta - y - x - 10z), \\ \dot{z} &= z(-1 - x/4 + 4y - z)\end{aligned}\quad (1)$$

с положительными фиксированными параметрами $\alpha = 11$, $\beta = 6$ и меняющимся бифуркационным параметром δ , являющимся скоростью роста второй жертвы. В [1] численно показано, что при уменьше-

нии значений параметра δ в системе (1) наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода устойчивых предельных циклов. В [2] высказана гипотеза, что такой каскад является переходом к сложной необъяснимой квазистохастической динамике.

Целью настоящей работы является показать, что найденная в [1-2] динамика в системе (1) не является квазистохастической, а полностью подчиняется универсальному закону перехода к динамическому хаосу в любых нелинейных системах дифференциальных уравнений в соответствии с бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого [3-7] через каскад бифуркаций Фейгенбаума, затем через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского и затем через гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого.

* Работа поддержана грантами РФФИ № 18-029-10008мк и № 20-07-00066а.

1. Область диссипативности и особые точки системы.

Система (1) имеет семь особых точек: 1) $x^* = y^* = z^* = 0$; 2) $x^* = \alpha$, $y^* = z^* = 0$; 3) $x^* = 0$, $y^* = \delta$, $z^* = 0$; 4) $x^* = y^* = 0$, $z^* = -1$; 5) $x^* = 0$, $y^* = (10 + \delta)/41$, $z^* = (-1 + 4\delta)/41$; 6) $z^* = 0$, $x^* = (11 - \beta\delta)/(1 - \beta)$, $y^* = (\delta - 11)/(1 - \beta)$; 7) $y^* = (\alpha + 4)/(\beta + 16)$, $x^* = -(\delta + 10)/1.5 + 27.33333 y^*$, $z^* = -1 - x^*/4 + 4y^*$. Нас будет интересовать динамика решений системы (1) в окрестности седьмой особой точки O с отличными от нуля координатами (x^*, y^*, z^*) , в окрестности которой возможно существование сложной нерегулярной динамики. Положим $\alpha = 10$, $\beta = 3.4$ и исследуем систему (1) при $10.9 < \delta < 13.1$. Вычислим дивергенцию векторного поля системы

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x^*, y^*, z^*) &= \\ &= (\partial F_1 / \partial x + \partial F_2 / \partial y + \partial F_3 / \partial z)(x^*, y^*, z^*) = \\ &= -(x^* + y^* + z^*) < 0 \end{aligned}$$

всюду в рассматриваемой области, где F_i , $i = 1, 2, 3$ — правые части уравнений системы. Следовательно, система (1) диссипативна в окрестности особой точки $O(x^*, y^*, z^*)$ при всех рассматриваемых значениях параметра δ .

2. Исследование устойчивости и вида бифуркации особой точки.

Исследуем устойчивость особой точки $O(x^*, y^*, z^*)$ системы (1). Матрица линеаризации правой части системы в особой точке имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -x^* & -3.4x^* & -4x^* \\ -y^* & -y^* & -10y^* \\ -0.25z^* & 4z^* & -z^* \end{pmatrix}$$

а ее характеристическим уравнением является уравнение:

$$\lambda^3 + (x^* + y^* + z^*)\lambda^2 + (41z^* - 2.4x^*)y^*\lambda + 29.1x^*y^*z^* = 0$$

Теорема 1. Особая точка O системы (1) асимптотически устойчива при $\delta > \delta^* \approx 13.0939$. При $\delta < \delta^*$ особая точка O становится неустойчивой, и из нее в результате бифуркации Андронова-Хопфа мягко рождается устойчивый предельный цикл.

Доказательство. Перепишем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^3 + a_1(\delta)\lambda^2 + a_2(\delta)\lambda + a_3(\delta) = 0.$$

В силу критерия Рауса-Гурвица особая точка O асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$a_1(\delta) > 0, a_2(\delta) > 0, a_3(\delta) > 0, a_1(\delta)a_2(\delta) > a_3(\delta).$$

Так как $a_1(\delta) > 0$ при $\delta < 26.644$, $a_2(\delta) > 0$ при $\delta > 11.1933$, $a_3(\delta) > 0$ при $8.881 < \delta < 21.067$, а $a_1(\delta)a_2(\delta) > a_3(\delta)$ при $13.0939 < \delta < 50.6845$, то особая точка O системы (1) асимптотически устойчива при $13.0939 < \delta < 21.067$. При $\delta < \delta^* = 13.0939$ особая точка O становится неустойчивой, и при этом $a_1(\delta)a_2(\delta) < a_3(\delta)$. В точке бифуркации $\delta = \delta^*$ имеем $a_1(\delta)a_2(\delta) = a_3(\delta)$. Покажем, что при таком значении δ^* в системе (1) происходит мягкое рождение предельного цикла из особой точки O в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Действительно, при выполнении в точке δ^* условий Рауса-Гурвица положительности коэффициентов характеристического уравнения и условия $a_1(\delta)a_2(\delta) = a_3(\delta)$ характеристическое уравнение можно переписать в виде

$$(\lambda^2 + a_2(\delta^*))(\lambda + a_1(\delta^*)) = 0.$$

Следовательно, в точке δ^* корни характеристического уравнения имеют вид: $\lambda_1 = -a_1(\delta^*) < 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{a_2(\delta^*)}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{a_2(\delta^*)}$, то есть характеристическое уравнение имеет один действительный отрицательный корень и два комплексно сопряженных корня, что является условием наличия в точке δ^* бифуркации Андронова-Хопфа. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что наибольший интерес представляет изучение возможных каскадов бифуркаций при $\delta < \delta^*$ устойчивого предельного цикла, рожденного из особой точки O при $\delta = \delta^*$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Именно в этом случае в системе (1) возможно существование всех трех каскадов бифуркаций устойчивых предельных циклов и бесконечного числа хаотических сингулярных аттракторов в соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого.

Исследование следующих бифуркаций при уменьшении значений бифуркационного параметра $\delta < \delta^*$ аналитическими методами, начиная с бифуркации удвоения периода родившегося предельного цикла, является чрезвычайно сложной задачей. Поэтому, дальнейшее исследование сложения динамики решений системы (1) проведем численными методами.

3. Сценарий перехода к хаосу.

Проведем численное исследование системы (1) при фиксированных значениях параметров $\alpha = 10.7$, $\beta = 3.4$ и уменьшении значений бифуркационного параметра $\delta < \delta^* = 13.0939$. При $11.1 < \delta < \delta^*$ в системе (1) наблюдается каскад Фейгенбаума бифуркаций удвоения периода устойчивых циклов. Так, при $\delta = 11.18$ в системе (1) существует

устойчивый (асимптотически орбитально устойчивый) предельный цикл удвоенного периода, при $\delta = 11.13$ – устойчивый цикл периода четыре, при $\delta = 11.11$ – устойчивый цикл периода восемь и т.д. При дальнейшем уменьшении значений параметра δ в системе (1) обнаруживается последовательность устойчивых циклов субгармонического каскада бифуркаций в соответствии с порядком Шарковского. Так, например, цикл периода шесть субгармонического каскада обнаруживается при $\delta = 11.09$, цикл периода три, завершающий каскад Шарковского, обнаруживается при $\delta = 11.031$ (рис.1).

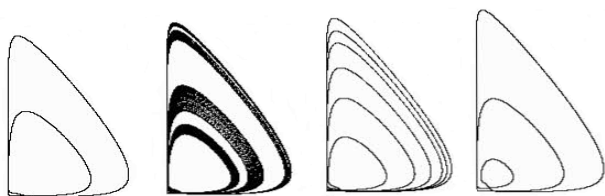


Рис. 1. Проекция на плоскость (z, y) устойчивых циклов субгармонического каскада бифуркаций: периода 2 при $\delta = 11.18$, аттрактора Фейгенбаума при $\delta = 11.11$, периода 6 при $\delta = 11.09$ и периода 3 при $\delta = 11.031$.

Как известно (см. [4]), последний цикл субгармонического каскада бифуркаций – цикл периода три является третьим циклом гомоклинического каскада, последовательность циклов которого должна сходиться к петле сепаратрисы седло-фокуса особой точки O . На рисунке 2 изображены устойчивые циклы гомоклинического каскада периодов четыре и пять, а также один из сингулярных гомоклинических аттракторов системы (1) при $\delta = 10.97$, лежащий в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса особой точки O .

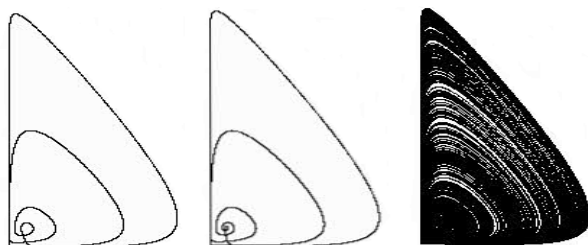


Рис. 2. Проекция на плоскость (z, y) устойчивых циклов гомоклинического каскада бифуркаций: периода 4 при $\delta = 10.99$, периода 5 при $\delta = 10.9761$, и одного из гомоклинических сингулярных аттракторов при $\delta = 10.97$.

Таким образом, численно установлено, что в системе (1) при изменении значений параметра δ реализуется каскад бифуркаций Фейген-

баума удвоения периода устойчивых предельных циклов, полный субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов в соответствии с порядком Шарковского и неполный гомоклинический каскад бифуркаций Магницкого. Некоторые циклы субгармонического и гомоклинического каскадов бифуркаций и сингулярные в смысле теории ФШМ аттракторы изображены на рисунках 1,2.

Заключение

В работе проведен аналитический и численный анализ системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся моделью динамики численности взаимодействующих популяций хищника и двух жертв. Найдены условия мягкого рождения предельного цикла в системе в результате бифуркации Андронова-Хопфа. Численно показано, что переход к хаосу в системе осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого через субгармонический и гомоклинический каскады бифуркаций устойчивых предельных циклов. Доказано, что нерегулярными (хаотическими) аттракторами системы являются исключительно сингулярные в смысле теории ФШМ аттракторы.

Литература

1. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985, 165 С.
2. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. Москва-Ижевск, ИКИ, 2003, 184 С.
3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М., URSS, 320 С.
4. Магницкий Н.А. Теория динамического хаоса. М.: Ленанд, 2011. 320 С.
5. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. INTECH, 2012. P. 133-174.
6. Evstigneev N. M., Magnitskii N.A. Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in Turbulence. INTECH, 2017. P.29-59.
7. Магницкий Н.А. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. INTECH, 2018, P. 197-215.

Магницкий Николай Александрович. Федеральный Исследовательский Центр “Информатика и управление” Российской академии наук. Адрес: 119333, Москва, ул. Вавилова 44/2. Г.н.с., д.ф.-м.н., профессор. Количество печатных работ: более 250. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети.
E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

On the transition to chaos in one model of population dynamics

N.A. Magnitskii^{I,II}

^I Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

^{II} Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, e-mail: nikmagn@gmail.com

Abstract. An analytical and numerical analysis of the transition to chaos was carried out in the model proposed by A.D. Bazykin for the dynamics of the number of interacting populations of a predator and two prey. The conditions for the creation of a periodic solution as a result of the Andronov-Hopf bifurcation are found. It is shown numerically that the transition to chaos in the system of differential equations describing the dynamics of interacting populations is carried out in full accordance with the Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii universal bifurcation theory (FShM) through subharmonic and homoclinic bifurcation cascades of stable limit cycles.

Key words: population dynamics, predator-prey model, bifurcation cascades, FShM theory, attractors, chaos.
DOI: 10.14357/20790279200208

References.

1. Bazykin A.D. Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy. M., Nauka, 1985, 165 P
2. Rznichenko G.Y. Matematicheskiye modeli v biofizike i ekologii. Moskva-Izhevsk, IKI, 2003, 184 P
3. Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New methods for chaotic dynamics (monograph). Singapore: World Scientific, 2006. 363 P
4. Magnitskii N.A. Teoriya dinamicheskogo khaosa. M.: Lenand, 2011, 320 P
5. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. INTECH, 2012. P.133-174.
6. Evstigneev N. M., Magnitskii N.A. Numerical analysis of laminar-turbulent bifurcation scenarios in Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities for compressible flow. Chapter in Turbulence. INTECH, 2017. P.29-59.
7. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. INTECH, 2018, P. 197-215.

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova Str., Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks. E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru1.