Риск-нейтральная динамика портфеля базовых активов при использовании метода главных компонент

А.Р. Данилишин[I]

[I] Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, г. Москва, Россия

Аннотация. Оценка рисков портфеля опционов на различные базовые активы требует совместного моделирования динамики их цен. Если число активов велико, то для сокращения размерности часто используется метод главных компонент, который позволяет перейти от цен базовых активов к относительно небольшому числу некоррелированных компонент. В статье для представления динамики главных компонент цен базовых активов рассматривается использование моделей ARIMA-GARCH, позволяющих учитывать изменение тренда и волатильности случайных процессов. Оценку риска опционов методом Монте-Карло проводят на основе как физической, так и риск-нейтральной меры. Это связано с тем, что риск-метрики на основе физической меры являются ретроспективными, что затрудняет прогнозирование будущих рисков цен финансовых инструментов. Рассматривается получение коэффициентов ARIMA-GARCH моделей, которые обеспечивают риск-нейтральную динамику цен базовых активов, восстанавливаемых на основе значений их главных компонент.

Ключевые слова: *ARIMA, GARCH, риск-нейтральная мера, расширенный принцип Гирсанова, распределение S_U Джонсона, ценообразование опционов, метод главных компонент.*

DOI: 10.14357/20790279200302

Введение

В современном риск-менеджменте разработано множество мер риска, позволяющих ограничивать потенциальные потери от инвестиций в активы при повышенной волатильности цен. До недавнего времени основной мерой риска выступал показатель VaR (Value at Risk). VaR – это уровень потерь в течении N дней, вероятность превышения которого составляет $(100 – X)$%, где X – уровень доверия (confidence level) [1]. Однако кризис 2008 года показал, что необходимо учитывать эффект «толстых хвостов» распределений, поэтому Базельский комитет по банковскому надзору на сегодняшний день рекомендует использовать также меру риска ES (Expected Shortfall). ES – это ожидаемый уровень потерь в течении N дней, при условии, что потери превысят величину VaR [2].

Для расчета VaR и ES необходимо формальное описание динамики цен базовых активов. Достаточно точные результаты получаются при использовании моделей, позволяющих учитывать переменную волатильность, ее кластерность и изменяющийся тренд случайного процесса. Примером такой модели является интегрированная модель авторегрессии и скользящего среднего, обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность, Autoregressive Integrated Moving Average, Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (ARIMA-GARCH) [3]. Оценки коэффициентов данной модели, полученные методом квази-максимального правдоподобия на основе исторических данных [4], позволяют воспроизвести динамику базового актива.

Оценку риска опционов методом Монте-Карло рекомендуется проводить на основе как физической, так и риск-нейтральной меры. Это связано с тем, что риск-метрики на основе физической меры являются ретроспективными, поэтому затрудняют прогнозирование будущих рисков цен финансовых инструментов. Для устранения данного недостатка пользуются риск-нейтральной мерой, основанной на экономических предпосылках, например, обеспечивающей максимум функции полезности инвестора.

На данный момент существует ряд преобразований, позволяющих получать риск-нейтральную меру из физической меры, соответствующей исходному ARIMA-GARCH-процессу. К подобным преобразованиям относятся локально риск-нейтральная мера (LRNVR) [5], преобразование Эшера, расширенный принцип Гирсанова [6]. Для неполных рынков характерно существование нескольких риск-нейтральных мер. Выбор меры должен проводиться исходя из экономических предположений о рациональном поведении участников рынка. Локальная риск-нейтральная мера [5] обеспечивает максимизацию функции полезности инвестора. В случае расширенного принципа Гирсанова минимизируется функция затрат динамического хеджирования, необходимого для выполнения инвестором в конечный момент времени своих обязательств. В рамках данной статьи рассматривается расширенный принцип Гирсанова. Подробное описание принципа Гирсанова можно найти в статье [6].

Коэффициенты ARIMA-GARCH-моделей, обеспечивающие риск-нейтральную динамику цен базовых активов, позволяют рассчитывать VaR и ES портфеля опционов. Однако в случае нескольких базовых активов приходится моделировать их совместное распределение. С подобного рода задачами часто приходится сталкиваться финансовым организациям, имеющим портфели с большим количеством деривативов на разные базовые активы.

Расширенный принцип Гирсанова применим для многомерного распределения, однако для таких моделей как ARIMA-GARCH приходится иметь дело с системой уравнений, включающих в себя не только уравнения, описывающие дисперсии, но также уравнения ковариаций, что в конечном итоге приводит к оптимизационной задаче (метод квази-максимального правдоподобия) с большим количеством неизвестных. Одним из способов решения проблемы размерности является использование метода главных компонент, позволяющего перейти от базовых активов к некоррелированным случайным процессам (компонентам) [7]. На данный момент существует множество статей [8–10], посвященных применению метода главных компонент в финансовом анализе, однако нет работ посвященных теории и практики применения данного метода к риск-нейтральному моделированию цен активов

Целью статьи является описание подхода, позволяющего применить аппарат метода главных компонент для риск-нейтрального моделирования цен активов и расчета рисков соответствующего портфеля опционов.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 приводится краткий обзор метода главных компонент, позволяющего получить статистически независимые компоненты взамен исходных цен базовых активов. В разделе 2 рассматривается расширенный принцип Гирсанова, используемый для получения риск-нейтральных коэффициентов для одномерных ARIMA-GARCH-моделей, описывается ARIMA-GARCH-модель и приводятся примеры использования расширенного принципа Гирсанова. Раздел 3 содержит результаты, необходимые для получения риск-нейтральных ARIMA-GARCH-моделей главных компонент. Раздел 4 посвящен постановке задачи оценки риск-метрики VaR портфеля опционов на разные базовые активы и проведению численного эксперимента, позволяющего оценить эффективность полученных теоретических результатов.

1. Метод главных компонент

Метод главных компонент [11] заключается в разложении случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ размерности n по линейно независимой системе векторов, отвечающей собственным значениям ковариационной матрицы вектора X. Рассмотрим центрированный вектор $\breve{X} = X - \mathbb{E}[X]$, тогда линейная модель главных компонент для $\breve{X}$ примет вид $\breve{X} = AF^T$, где $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ - нормированный и центрированный случайный вектор некоррелированных главных компонент F_j $(j = 1, \dots, n)$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – детерминированная матрица коэффициентов разложения случайных величин X_i на главные компоненты F_j. Ниже приводится краткий обзор получения случайного вектора F.

Пусть $\Sigma = \mathbb{E}\left[\breve{X}\breve{X}^T\right]$ – ковариационная матрица случайного вектора X. Ковариационная матрица является симметричной и неотрицательно определенной, поэтому имеет n вещественных неотрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Введем матрицу Λ при условии, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \tag{1}$$

Рассмотрим $v_j = \left(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}\right)^T$ – нормированные собственные векторы матрицы Σ, соответствующие собственным значениям λ_j $(i = 1, \dots, n)$. Тогда для $\forall j = 1, \dots, n$ следует, что $det\left|\Sigma - \lambda_j I\right| = 0, (j = 1, \dots, n)$, где I – единичная матрица размерности n:

$$\Sigma v_j = \lambda_j v_j, j = 1, \dots, n,$$

$$v_i^T v_j = \sum_{p=1}^{n} v_{pi} v_{pj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, i, j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Введя матрицу $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, с учетом соотношений (1) и (2) получим:

$$v_i^{\mathrm{T}}\Sigma v_j = \lambda_j v_i^T v_j = \begin{cases}\lambda_j, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases}, i,j = 1,\dots,n,$$

$$V^T\Sigma\mathrm{V} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} = \Lambda.$$

Пусть $\breve{F} = V^T\breve{X}$, при этом, так как $\mathbb{E}[\breve{F}] = \mathbb{E}[V^T\breve{X}] = V^T\mathbb{E}[\breve{X}] = 0$, то $\breve{F}$ – центрированный вектор, а поскольку $\mathbb{E}[\breve{F}\breve{F}^T] = \mathbb{E}[V^T\breve{X}\breve{X}^T V] = V^T\mathbb{E}[\breve{X}\breve{X}^T]V = V^T\Sigma\mathrm{V} = \Lambda$, получаем, что компоненты случайного вектора $\breve{F}$ не коррелированы и $Var[\breve{F}_j] = \lambda_j$ $(j = 1,\dots,n)$. Поэтому нормированный и центрированный вектор F равен $F = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\breve{F} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}V^T\breve{X}$.

Из $\Lambda = V^T\Sigma\mathrm{V}$, $\det(\Lambda - tE) = \det(V^T\Sigma V - tE) = \det(V^T(\Sigma - tE)V) = \det(\Sigma - tE)$ и того, что у характеристического многочлена матрицы n-го порядка коэффициент при мономе t^{n-1} равен следу матрицы, следует, что $tr(\Sigma) = tr(\Lambda)$ (след матрицы будет являться инвариантом относительно данного линейного преобразования). Из равенства следов матриц Σ и Λ получим, что

$$\sum_{i=1}^n Var[\breve{X}_i] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] = tr(\Sigma) = tr(\Lambda) = $$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n Var[\breve{F}_i].$$

То есть, дисперсия исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ полностью описывается дисперсией компонент $\breve{F}_1, \breve{F}_2, \dots, \breve{F}_n$, при этом, в силу сделанного предположения $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, имеем: $Var[\breve{F}_1] > Var[\breve{F}_2] > \cdots > Var[\breve{F}_n]$. Таким образом дисперсия каждой следующей компоненты будет описывать меньшую долю дисперсии исходных случайных величин, чем дисперсия предыдущей главной компоненты. Из того, что $\mathbb{E}[F^TF] = I$, $\Sigma = \mathbb{E}[\breve{X}\breve{X}^T] = \mathbb{E}[AF^TFA^T] = A\mathbb{E}[F^TF]A^T = AA^T$ следует $cov(X_i, X_j) = cov(\breve{X}_i, \breve{X}_j) = \sum_{p=1}^n a_{ip}a_{jp}$, $i,j = 1,\dots,n$.

В частности, $Var[\breve{X}_i] = Var[X_i] = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, $i = 1,\dots,n$, то есть ковариационная матрица случайного вектора X полностью воспроизводится матрицей коэффициентов A. Так как $\mathbb{E}[\breve{X}F^T] = \mathbb{E}[AFF^T] = A\mathbb{E}[FF^T] = A$, то $cov(X_i, F_j) = a_{ij}, i,j = 1,\dots,n$ (ковариация случайной величины X_i и компоненты F_j равна элементу матрицы коэффициентов a_{ij}). Найдем матрицу коэффициентов A. Из того, что $\breve{F} = V^T\breve{X}$ следует $V\breve{F} = VV^T\breve{X} = \breve{X}$. Из равенства $A = \mathbb{E}[\breve{X}F^T]$ получаем $A = V\Lambda^{\frac{1}{2}}$, $F = \Lambda^{-\frac{1}{2}}V^T\breve{X} = \frac{\sum_{i=1}^n v_{ij}\breve{X}_i}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ij}\breve{X}_i}{\lambda_j}, j = 1,\dots,n$. Как правило, при моделировании случайных векторов используют k первых главных компонент, которыми описывается не менее 70% дисперсии исходных случайных величин $(k < n)$ [11].

2. Расширенный принцип Гирсанова

В рамках модели расширенного принципа Гирсанова рассматриваются разности логарифмов цен базового актива: $Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, где S_t – стоимость базового актива, выраженного в единицах валюты рассматриваемого финансового инструмента. При переходе к дисконтированным ценам базового актива $(\widetilde{S_t} = e^{-rt}S_t)$ условие риск-нейтральности примет вид $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\widetilde{S_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}$, где $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ – математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$, $\mathcal{F}_{t-1}$ – фильтрация относительно меры $\mathbb{P}$. Динамика дисконтированных цен базового актива описывается уравнением:

$$\widetilde{S_t} = \tilde{S}_0 A_t M_t,\ \ A_t = \prod_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}|\mathcal{F}_{t-1}],\ \ M_t = \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_0 A_t}$$

где процесс M_t является мартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_0 A_t}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{\tilde{S}_{t-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\tilde{S}_0 A_t} =$$

$$= \frac{\tilde{S}_{t-1}\frac{A_t}{A_{t-1}}}{\tilde{S}_0 A_t} = \frac{\tilde{S}_{t-1}}{\tilde{S}_0 A_{t-1}} = M_{t-1}.$$

Поделив левую и правую части выражения динамики цен базового актива на $\tilde{S}_{t-1}$, получим:

$$\widetilde{S_t} = \tilde{S}_{t-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\frac{M_t}{M_{t-1}} = \tilde{S}_{t-1}e^{\ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right)}W_t =$$

$$= \tilde{S}_{t-1}e^{v_t}W_t,\ \text{где } W_t = \frac{M_t}{M_{t-1}}$$

Из того, что $\ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right) = -r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|G_{t-1}])$ следует

$$\widetilde{S_t} = \tilde{S}_{t-1}e^{-r+\ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}]\right)}W_t = \tilde{S}_{t-1}e^{v_t}W_t. \quad (3)$$

Выражение (3) также описывает динамику дисконтированных цен базового актива, но уже выраженную через обратный дисконтирующий множитель и случайный процесс W_t. Из выражения (3) видно, что условие риск-нейтральности будет выполнено если $-r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|G_{t-1}]) = 0$, т. е. условие $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\widetilde{S_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}$ эквивалентно условию $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r$.

Расширенный принцип Гирсанова опирается на понятия эквивалентности мер и производной Радона-Никодима [12,13]. Напомним, что вероятностная мера $\mathbb{Q}$ называется эквивалентной мартингальной мерой (equivalent martingale measure EMM) относительно меры $\mathbb{P}$, если $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$, т.е. $\forall B \in \mathcal{F}: \mathbb{Q}(B) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = 0$ и процесс $\widetilde{S_t}$ является мартингальным относительно меры $\mathbb{Q}$, т.е. он интегрируем $\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S_t}\middle|\mathcal{F}_k\right] = \widetilde{S_k}, k \le t,\ t = 0, \dots, T\right)$. Понятие производной Радона-Никодима вытекает непосредственно из понятия об эквивалентности мер. Пусть $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{P}$ – две меры на $(\Omega, \mathcal{F})$. Если $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$, тогда существует неотрицательная борелевская функция f на Ω, такая, что $\mathbb{Q}(B) = \int f d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}$. Более того, f единственна, т.к. если $\mathbb{Q}(B) = \int g d\mathbb{P}, \forall B \in \mathcal{F}$, то $f = g$. Функция $f = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ называется производной Радона-Никодима. В расширенном принципе Гирсанова утверждается, что случайный процесс Z_t, соответствующий производной Радона-Никодима $\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dP}}|_{\mathrm{F}_{t-1}}$,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)e^{v_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)},$$

где $g_{W_k}^{\mathbb{P}}$ – условная плотность распределения W_t, обеспечивает риск-нейтральную динамику для $\tilde{S}_t$ в новой мере $\mathbb{Q}$, относительно старой $\mathbb{P}$ [6]. Таким образом, процесс $\tilde{S}_t$ в новой мере $\mathbb{Q}$ относительно старой $\mathbb{P}$ должен быть мартингалом. Закон распределения случайного процесса $\tilde{S}_t$ относительно вероятностной меры $\mathbb{Q}$ должен совпадать с законом распределения $\mathrm{M_t}$ по мере $\mathbb{P}$, т. е. $\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}\left(\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathcal{L}^{\mathbb{P}}(M_t|\mathcal{F}_{t-1})$.

Для случайного процесса Y_k с условной плотностью распределения $f_{Y_k}^{\mathbb{P}}$ производная Радона-Никодима примет вид:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}\left(Y_k - r + \ln\left(M_{Y_k|\mathcal{F}_{t-1}}(1)\right)\right)}{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(Y_k)},$$

где $M_{Y_k|\mathcal{F}_{t-1}}(1)$ – значение условной производящей функции моментов в точке 1 [14]. Для перехода к распределению по мере $\mathbb{Q}$ используется производящая функция моментов:

$$M_{Y_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-c\left(-r+\ln\left(M_{Y_t}(1)\right)\right)} M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(c)\ .$$

Рассмотрим построение риск-нейтральных ARIMA-GARCH-моделей с ошибками ε_t, распределенными по нормальному и обобщенному экспоненциальному бета-закону (EGB2). Для этого выпишем общий вид $ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$ модели:

$$\begin{cases} \Delta^d Y_t = m_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t|\sim iid(0,1) \\ m_t = \mathbb{E}[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \phi_0 + \phi_1\Delta^d Y_{t-1} + \dots + \phi_p\Delta^d Y_{t-p} + \theta_1\sqrt{h_{t-1}}\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\sqrt{h_{t-q}}\varepsilon_{t-q}, \\ h_t = Var[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \dots + \alpha_P h_{t-P} + \beta_1 h_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_Q h_{t-Q}\varepsilon_{t-Q}^2 \end{cases}$$

где Δ^k – разностный оператор порядка k, определяемый рекуррентно по формулам $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \dots, \Delta^k Y_t = \Delta^{k-1}Y_t - \Delta^{k-1}Y_{t-1}$ [15, 16].

Производящая функция моментов $M_{\varepsilon_t}(c)$ и плотности $f(x,\alpha,\beta,\delta,\mu)$ распределения $EGB2(\alpha,\beta,\delta,\mu)$ имеют следующий вид:

$$M_{\varepsilon_t}(c) = \frac{B(\alpha+\delta c, \beta-\delta c)}{B(\alpha,\beta)} e^{\mu c},$$

$$f(x,\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{1}{\delta B(\alpha,\beta)} \frac{\left(\exp\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)^{\alpha}}{\left(1+\exp\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)^{\alpha+\beta}},$$

где $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha,\beta), \Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $x,\mu \in \mathbb{R}, \alpha,\beta,\delta > 0$ – параметры распределения. Математическое ожидание и дисперсия выводятся непосредственно из производящей функции моментов и имеют вид: $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu + \delta\varpi(\alpha,\beta)$, $Var[\varepsilon_t] = \delta^2 l(\alpha,\beta)$,

где $\varpi(\alpha,\beta) = \frac{dln\Gamma(c)}{dc}\Big|_{c=\alpha} - \frac{dln\Gamma(c)}{dc}\Big|_{c=\alpha}$,

$l(\alpha,\beta) = \frac{d^2 ln\Gamma(c)}{dc^2}\Big|_{c=\alpha} + \frac{d^2 ln\Gamma(c)}{dc^2}\Big|_{c=\beta}$. В итоге получим $Var[\varepsilon_t] = \delta^2 l(\alpha,\beta) = 1 \Rightarrow \bar{\delta} = 1/\sqrt{l(\alpha,\beta)}$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu + \delta\varpi(\alpha,\beta) = 0 \Rightarrow \bar{\mu} = -\varpi(\alpha,\beta)/\sqrt{l(\alpha,\beta)}$. Тогда $\varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2(\alpha,\Beta,\bar{\delta},\bar{\mu})$. По распределению случайного процесса ε_t находим распределение $Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2(\alpha,\beta,\delta_t\bar{\delta}, m_t + \bar{\mu}\delta_t)$. Таким образом получаем производящую функцию моментов для $Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}}$: $M_{Y_t|\mathcal{F}_{t-1}}(c) = \frac{B(\alpha+\delta_t\bar{\delta}c, \beta-\delta_t\bar{\delta}c)}{B(\alpha,\beta)} e^{(m_t+\bar{\mu}\delta_t)c}$.

В результате преобразования, описанного в расширенном принципе Гирсанова, приходим к выводу, что в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$ случайная величина $Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}}$ имеет распределение $EGB2\left(\alpha,\beta,\delta_t\bar{\delta}, r - ln\frac{B(\alpha+\delta_t\bar{\delta}, \beta-\delta_t\bar{\delta})}{B(\alpha,\beta)}\right)$. Тогда ARIMA-GARCH-модель примет вид:

$$\mathrm{Y_t} = r - ln\frac{B(\alpha+\delta_t\bar{\delta}, \beta-\delta_t\bar{\delta})}{B(\alpha,\beta)} + \delta_t\bar{\delta}\varpi(\alpha,\beta) + \delta_t\varepsilon_t, \quad (4)$$

где $\varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2(\alpha,\beta,\bar{\delta},\bar{\mu})$, $\bar{\delta} = 1/\sqrt{l(\alpha,\beta)}$, $\bar{\mu} = -\varpi(\alpha,\beta)/\sqrt{l(\alpha,\beta)}$. Аналогично получаются риск-нейтральные коэффициенты для ARIMA-GARCH-модели, ошибки которой имеют нормальное распределение: $\mathrm{Y_t} = r - \frac{1}{2}\delta_t^2 + \delta_t\varepsilon_t$, где $\varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim N(0,1)$ [14].

3. Риск-нейтральная динамика портфеля активов

Описанный выше метод главных компонент позволяет существенно упростить процесс моделирования случайного вектора. Первым очевидным преимуществом является то, что полученные компоненты являются статистически независимыми случайными процессами, поэтому модель $ARIMA-GARCH$ может быть применена отдельно для каждой взятой компоненты, что позволяет свести задачу идентификации многомерной модели к ряду оптимизационных задач по поиску оптимальных параметров одномерных $ARIMA-GARCH$-моделей. Также можно существенно сократить размерность, используя лишь часть главных компонент, таким образом дополнительно упростив задачу. В данном разделе приводится объединение теорий, кратко изложенных в разделах 1 и 2, что позволяет описать риск-нейтральную динамику портфеля активов.

Как и ранее, рассматривается случайный процесс $Y_t^j = \ln\left(\frac{S_t^j}{S_{t-1}^j}\right)$, где $j = 1, \dots, n -$ номер базового актива S_t^j в общем портфеле активов. Используя метод главных компонент, можно получить компоненты X_t^i, которые при помощи матрицы коэффициентов $A = (\alpha_j^i)$ приближенно восстанавливают динамику исходного случайного процесса: $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, где $m -$ общее количество компонент X_t^i, в случае сокращения размерности исходного случайного вектора $m < n$. Каждая компонента (случайный процесс) описывается моделью $ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$:

$$\begin{cases} X_t^i = m_t^i + \epsilon_t^i \\ \epsilon_t^i = \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i, \quad \varepsilon_t^i \big| \sim iid(0,1) \\ m_t^i = \phi_0^i + \phi_1^i X_{t-1}^i + \dots + \phi_p^i X_{t-p}^i + \theta_1^i \epsilon_{t-1}^i + \dots + \theta_q^i \epsilon_{t-q}^i \\ h_t^i = \alpha_0^i + \alpha_1^i h_{t-1}^i + \dots + \alpha_P^i h_{t-P}^i + \beta_1^i {\epsilon_{t-1}^i}^2 + \dots + \beta_Q^i {\epsilon_{t-Q}^i}^2 \end{cases}, \quad (5)$$

Напомним, что переход от физической меры к риск-нейтральной производится при помощи производящей функции по формуле $M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)$, где $\Lambda_t^j = -r_j + \ln\left(M_{Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{P}}(1)\right)$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайного процесса Y_t^j относительно риск-нейтральной динамики $\mathbb{Q}$ с помощью производящей функции моментов:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \left.\frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc}\right|_{c=0} = \left.\left(-\Lambda_t^j e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c) + e^{-\Lambda_t^j c}\frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc}\right)\right|_{c=0} = \quad (6)$$
$$= -\Lambda_t^j + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$Var^{\mathbb{Q}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \left.\frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc}\right|_{c=0}\right)^2 = {\Lambda_t^j}^2 - 2\Lambda_t^j \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \left.\frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2}\right|_{c=0} -$$
$$\left(-\Lambda_t^j + \left.\frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc}\right|_{c=0}\right)^2 = \left.\frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2}\right|_{c=0} - \left.\frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc}\right|_{c=0}^2 = Var^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] \quad (7)$$

$$\left.\frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2}\right|_{c=0} = \left(-\Lambda_t^j e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c) + e^{-\Lambda_t^j c}\frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc}\right)_c' =$$
$$= {\Lambda_t^j}^2 - 2\Lambda_t^j \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] + \left.\frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2}\right|_{c=0} \quad (8)$$

Из $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$ и некоррелированности компонент следуют соотношения:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i \,|\mathcal{F}_{t-1}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^m \alpha_j^i \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X_t^i|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i$$
$$Var^{\mathbb{P}}\left[Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = Var^{\mathbb{P}}\left[\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i \,|\mathcal{F}_{t-1}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 Var^{\mathbb{P}}\left[X_t^i|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i \quad (9)$$

Из выражения (4) видно, что случайная ошибка ARIMA-GARCH-модели при преобразовании расширенного принципа Гирсанова не меняется. Таким образом можно получить закон линейного преобразования ошибки базового актива через ошибки компонент. Для этого заметим, что из того, что $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, следует, что базовый актив будет также описываться ARIMA-GARCH-процессом:

$$Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i + \alpha_j^i \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i =$$
$$= \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i + \sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}\, E_t^j = M_t^j + \Omega_t^j E_t^j. \quad (10)$$

Тогда из (10) получаем, что случайная ошибка модели динамики базового актива имеет вид:

$$E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}}. \quad (11)$$

Легко убедиться, что полученная ошибка имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию равную единице. Таким образом выполняется условие ошибок ARIMA-GARCH-модели (см. (5)). Объединяя выражения (6)–(11), получим риск-нейтральную $ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$ модель динамики базовых активов Y_t^j.

$$Y_t^j = -\Lambda_t^j + \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i + \sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}\, E_t^j,$$

$$E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}}\Bigg|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim iid(0,1)$$

Подставляя в выражение (12) $\Lambda_t^j = -r_j + \ln\left(M^{\mathbb{P}}_{Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}}(1)\right)$, можно получить динамику базового актива по динамикам компонент. Остается открытым вопрос нахождения $M^{\mathbb{P}}_{Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}}(1)$, получить аналитическое выражение можно было бы, если компоненты были независимыми случайными процессами, тогда производящая функция моментов Y_t^j сводилась бы к выражению:

$$M^{\mathbb{P}}_{Y_t^j|\mathcal{F}_{t-1}}(1) = \prod_{i=1}^m M^{\mathbb{P}}_{X_t^i|\mathcal{F}_{t-1}}(\alpha_j^i).$$

Однако компоненты являются лишь некоррелированными, что не дает возможности вывести аналитический вид производящей функции моментов Y_t^j, так требует знания совместной плотности распределения компонент. Первым способом решения данной проблемы является статистическая оценка производящей функции моментов по полученным реализациям Y_t^j относительно физической меры. Другим способом является использование полученных в статье [17] результатов модификации расширенного принципа Гирсанова, согласно которым уравнение перехода от физической меры к риск-нейтральной имеет следующий вид: $M^{\mathbb{Q}}_{\tilde{Y}_k}(c) = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\frac{c}{1+\mu_t}\right)$, $\mu_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t + 1|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n} - 1$, где n - количество начислений за год риск-нейтральной процентной ставки, $\tilde{Y}_t^j = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$. В статье, непрерывное начисление процентов $S_t e^{rT}$ заменено дискретным $S_t\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nT}$, которое в пределе ($n \to \infty$) стремится к непрерывному (далее будет подразумеваться дискретное начисление процентов). Проводя вычисления, аналогичные сделанным в (6)–(8), получим условные математическое ожидание и дисперсию в риск-нейтральной мере:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{Y}_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n - 1,$$

$$Var^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{Y}_t^j|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \left(\frac{\left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right)^2 \sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i.$$

Тогда уравнение динамики базового актива (12) примет следующий вид:

$$\tilde{Y}_t^j = \left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n - 1 + \left(\frac{\left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n}{1+\sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^m {\alpha_j^i}^2 h_t^i}\, E_t^j. \quad (13)$$

Выражение (13) уже не зависит от производящей функции моментов, что дает возможность, зная оценки параметров ARIMA-GARCH-моделей компонент, риск-нейтральные процентные ставки базовых активов, частоту их начисления и коэффициенты матрицы перехода от базовых активов к компонентам, получить динамику цен базовых активов.

4. Численный пример

В этом разделе рассматривается портфель из пяти опционных контрактов на следующие базовые активы: фондовые индексы DAX (Deutscher Aktienindex) и SMI (Swiss Market Index), курс британского фунта к американскому доллару (British Pound / US Dollar), фьючерсы, базовыми активами которых выступают нефть (Light Sweet Crude Oil) и природный газ (Natural Gas). Данные по всем опционным контрактам приведены в табл. 1.

Табл. 1

Портфель опционных контрактов

Базовый актив	Цена исполнения	Дата исполнения опционного контракта	Валюта	Тип опционного контракта
Индекс DAX	10750	19.06.2020	EUR	CALL
Индекс SMIM	2340	19.06.2020	CHF	PUT
GBP/USD	128	06.05.2020	USD	PUT
Natural Gas	2.25	25.06.2020	USD	CALL
Light Sweet Crude Oil	70	16.11.2022	USD	CALL

В представленных данных фигурируют три вида валют, соответственно, для применения формулы (13) были использованы три безрисковые процентные ставки, в качестве таковых взяты ставки LIBOR (London Interbank Offered Rate).

При реализации метода главных компонент были выбраны 3 компоненты, которые описывают 82,79% (более 70%) исходной дисперсии [11]. В качестве распределения ошибки модели ARIMA-GARCH было рассмотрено распределение SU

Джонсона [18,19], Данное распределение получено путем нелинейного преобразования нормального распределения и, в силу свойств данного преобразования, характеризуется асимметричностью и наличием «тяжелых хвостов», что позволяет достаточно хорошо приближать реальные цены базовых активов. Отсутствие у данного распределения производящей функции моментов делает невозможным его применение к классическому расширенному преобразованию Гирсанова как для одномерного, так и для многомерного случаев. Результаты статьи [17] и данной работы позволяют применить модификацию расширенного принципа Гирсанова и получить риск-нейтральные коэффициенты даже для распределений, не имеющих производящей функции моментов, как в одномерном, так и в многомерных случаях.

Как упоминалось выше, оценку риска опционов методом Монте-Карло предпочтительней проводить на основе риск-нейтральной меры, так как риск-метрики на основе физической меры являются ретроспективными, что затрудняет прогнозирование будущих рисков цен финансовых инструментов. Расчет справедливой стоимости опционов проводился методом Монте-Карло [20]. Европейские опционы CALL и PUT со страйком (ценой исполнения) X и стоимостью базового актива в момент экспирации S_T характеризуются функциями выплат

$$b_c(S_T, X) = max(S_T - X, 0)\,, b_p(S_T, X) = max(X - S_T, 0)$$

Тогда стоимость опционного CALL/PUT контракта на основе риск-нейтральной меры определяется как среднее значение функции выплаты относительно риск-нейтральной меры $\mathbb{Q}$ (на основе физической меры среднее значение функции выплаты берется относительно меры $\mathbb{P}$), дисконтированное к текущему моменту времени:

$$p_{call}/p_{put} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[b_{c/p}(S_T, X)]}{(1+r)^T} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]}{(1+r)^T}$$

где $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима риск-нейтральной меры [13], в рамках данной работы – это мера, полученная на основе модификации расширенного принципа Гирсанова [17]. Метод Монте-Карло позволяет оценивать математическое ожидание (31) по реализациям ARIMA-GARCH-процесса:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(m) \xrightarrow[M\to\infty]{P} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right].$$

Многократное моделирование траекторий цен базовых активов создает выборку размера N = 10000, необходимую для расчета VaR портфеля опционов. Данная выборка сортируется по возрастанию и в качестве значения VaR с уровнем значимости α выбирается значение с номером $N \times \alpha + 1$ [21].

В качестве критерия адекватности модели рассматривался тест Купика [22]. Суть его заключается в проведении расчетов меры риска VaR-портфеля для определенного исторического промежутка времени и сравнении полученных результатов с реальными данными стоимости портфеля. В качестве примера был рассмотрен временной промежуток с 19 августа 2019 года по 23 марта 2020 года (количество рабочих дней между ними составило 150). Тест Купика позволяет сравнить модельную и эмпирическую частоту событий, когда историческая стоимость портфеля активов опускалась ниже значения VaR (пробои). Если N – длина выборки, K – количество пробоев кривой VaR, $\alpha_0 = K/N -$ эмпирическая частота пробитий кривой VaR. Тогда нулевая гипотеза теста Купика: $\mathbb{H}_0{:}\,\alpha_0 = \alpha$, против $\mathbb{H}_1{:}\,\alpha_0 \neq \alpha$. Проверка осуществляется с помощью статистики $S_{Cup} = -2\ln((1-\alpha)^{N-K}\alpha^K) + 2\ln((1-\alpha_0)^{N-K}\alpha_0^K)$, которая, в случае истинности нулевой гипотезы имеет распределение $\chi^2(1)$. Так как проводится двусторонний тест, то статистика, для уровня значимости $\tilde{\alpha}$ должно принимать значения $\chi^2(\tilde{\alpha}/2, 1) < S_{Cup} < \chi^2(1-\tilde{\alpha}/2, 1)$.

Результаты теста Купика (см. табл. 2) показывают, что обе модели проходят бэк-тестирование

Табл. 2

Результаты теста Купика для уровня значимости $\tilde{\alpha}$ = 95%

VaR, %	**Мера**	**K**	**S_{cup}**	$\chi^2(\frac{\tilde{\alpha}}{2}, 1)$	$\chi^2\left(1-\frac{\tilde{\alpha}}{2}, 1\right)$	**P-Value**
95	Риск-нейтральная	7	0,0359	0,0010	5,0239	0,8498
	Физическая мера	8	0,0344			0,8529
99	Риск-нейтральная	2	0,1524			0,6962
	Физическая мера	4	2,8890			0,0892

(значение статистики находится между критическими значениями). Обе модели показывают высокие значения P-Value для VaR 95%, однако для VaR 99% модель с физической мерой показала результаты хуже, чем модель с риск-нейтральной мерой (рис. 1–4).

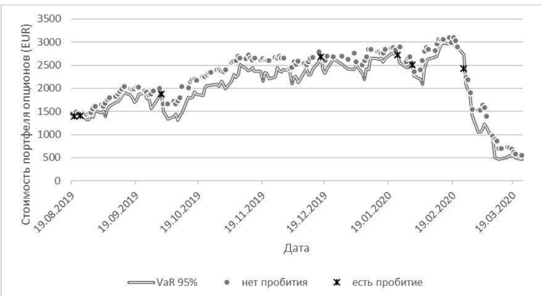

Рис. 1. Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (риск-нейтральная мера)

Рис. 2. Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (риск-нейтральная мера)

Рис. 3. Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (физическая мера)

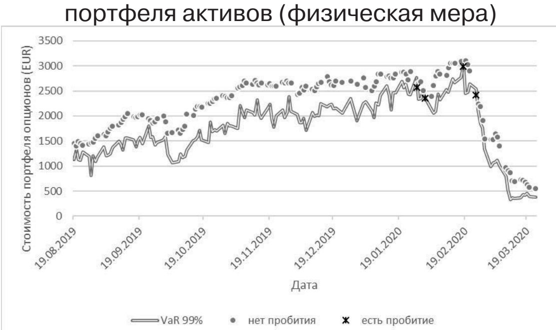

Рис. 4. Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (физическая мера)

Заключение

В работе представлен метод нахождения ARIMA-GARCH-моделей, описывающих риск-нейтральную динамику портфеля активов. Полученные результаты важны в том случае, когда для сокращения размерности применяется метод главных компонент. Используя математический аппарат метода главных компонент и расширенного принципа Гирсанова, были получены риск-нейтральные ARIMA-GARCH-модели динамики цен базовых активов (12). Расширенный принцип Гирсанова требует нахождения производящей функции моментов суммы случайных процессов (компонент), а так как, в общем случае, компоненты не являются независимыми, необходимо наличие их совместного распределения, которое неизвестно. Результаты статьи [17] позволяют решить данную проблему, получая на основе расширенного принципа Гирсанова риск-нейтральную меру, не требующую вычислений производящей функции моментов в заданной точке.

Полученный метод, с одной стороны, позволяет уменьшить размер оптимизационной задачи оценки параметров ARIMA-GARCH-моделей за счет представления цен активов статистически независимыми компонентами и уменьшения их количества, с другой – дает возможность получать риск-нейтральные цены для оценки рисков портфеля деривативов.

Оценка качества полученной модели была произведена на основе бэк-тестирования. Методом Монте-Карло была оценена стоимость портфеля опционов по различным реализациям базовых активов, полученных на основе физической и риск-нейтральной мер. Далее, на основе полученных стоимостей оценивались значения VaR портфеля для периода с 19 августа 2019 года по 23 марта 2020 года. Результаты теста Купика демонстрируют преимущества использования найденного метода перед классическим (без использования риск-нейтральной меры), что говорит о правильности полученных теоретических результатов.

Литература

1. *Hull J.* Options, Futures, and Other Derivatives. 10th Edition. Canada: Pearson. 2018.
2. *Rockafeller T., Uryasev S.* Optimization of conditional value - at – risk // The J. Risk. 2000. Vol. 3. P. 21-41.
3. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Economet-rics, 1986. Vol. 52. P. 5-59.

4. *Elie L., Jeantheau T.* Consistency in Heteroskedastic Models // Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1995. Vol. 320. P. 1255-1258.
5. *Duan J.* The GARCH Option Pricing Model // Mathematical Finance. 1995.
6. *Elliott Robert J., Madan Dilip B.* A Discrete Time Equivalent Martingale Measure // Mathematical Finance, 1998. Vol. 8, N 2. P. 127-152.
7. *Pearson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space // Phil, 1901. P. 559-572.
8. *Tilman L., Golub B.* Measuring yield curve risk using principal components analysis, value at risk, and key rate durations // The Journal of Portfolio Management, 1997. Vol. 23, N 4. P. 72-84.
9. *Specht K., Gohout W.* Portfolio selection using the principal components GARCH model // Financial Markets and Portfolio Management, 2003. Vol. 17, N 4. P. 450-458.
10. *Geng J.* Principal Component GARCH Model // SSRN Electronic Journal, 2007.
11. *Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И.* Многомерные статистические методы и основы эконометрики. М.: МЭСИ. 2002.
12. *Williams D.* Probability with Martingales. Cambridge: Cambridge University Press. 1991.
13. *Bell D.* Transformations of measures on an infinite-dimensional vector space. In: Cinlar. E., Fitzsimmons P.J., Williams R.J. Seminar on Stochastic Processes // Progress in Probability, 1990. Vol. 24. P. 15-25.
14. *Yi Xi.* Comparison of option pricing between ARMA-GARCH and GARCH-M models. USA: University of Western Ontario. 2013. MoS Thesis.
15. *Terasvirta, T.* An Introduction to Univariate GARCH Models // Handbook of Financial Time Series, 2009. Vol. 10. P. 17-42.
16. *Akgiray V.* Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts // The Journal of Business, 1989. Vol. 62, N 1. P. 55-80.
17. *Данилишин А.Р., Голембиовский Д.Ю.* Риск-нейтральная динамика для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Информатика и ее применения, 2020. Т. 14, 1. С. 48-55.
18. *Bollerslev T.* Conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // The Review of Economics and Statistics, 1987. Vol. 69, N 3. P. 542-547.
19. *Simonato J.* GARCH processes with skewed and leptokurtic innovations: Revisiting the Johnson SU case, 2012. Available at: https://ssrn.com/abstract=2060994.
20. *Phelim P.* Options: A Monte Carlo approach // Journal of Financial Economics, 1977. Vol. 4, N 3. P. 323–338.
21. *Lopez J.* Regulatory evaluation of value-at-risk models // Journal of Risk, 1998. Vol. 1, N 2. P. 37-63.
22. *Kupiec P.* Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models // The Journal of Derivatives, 1995. Vol. 3, N 2. P. 73-84.

Данилишин Артём Ростиславович. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, г. Москва, Россия. Аспирант. Количество печатных работ: 1. Область научных интересов: математическая статистика, финансовая математика. E-mail: danilishin-artem@mail.ru (Ответственный за переписку).

Risk-neutral dynamics of the asset portfolio by using the principal component method

A.R. Danilishin[I]

[I] Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics MSU, Moscow, Russia

Abstract. Assessing the risks of a portfolio of options on various underlying assets requires a modeling of the joint price dynamics of these assets. In the case of a large number of assets, the principal component method is often used to reduce the dimension, which allows to model prices of underlying assets by modeling relatively small number of uncorrelated components. The ARIMA-GARCH model is considered for modeling dynamics of main components of underlying asset's prices, because of it allows to take into account changes in the trend and volatility of random processes.

Monte Carlo option risk assessment is carried out on the basis of both physical and risk-neutral measures. This is due to the fact that risk metrics based on a physical measure are retrospective, which makes it difficult to predict future price risks of financial instruments. Method of transforming ARIMA-GARCH coefficients that provide risk-neutral dynamics of underlying asset's prices is produced in this article.

Keywords: *ARIMA, GARCH, risk-neutral measure, extended Girsanov principle, Johnson's S_U distribution, option pricing, principal component analysis*.

DOI: 10.14357/20790279200302

References

1. *Hull J.* Options, Futures, and Other Derivatives. 10th Edition. Canada: Pearson, 2018.
2. *Rockafeller T., Uryasev S.* Optimization of conditional value - at – risk // The J. Risk, 2000. Vol. 3. P. 21-41.
3. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Economet-rics, 1986. Vol. 52. P. 5-59.
4. *Elie L., Jeantheau T.* Consistency in Heteroskedastic Models // Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1995. Vol. 320. P. 1255-1258.
5. *Duan J.* The GARCH Option Pricing Model // Mathematical Finance, 1995.
6. *Elliott Robert J., Madan Dilip B.* A Discrete Time Equivalent Martingale Measure // Mathematical Finance, 1998. Vol. 8, N 2. P. 127-152. doi: 10.1111/1467-9965.00048.
7. *Pearson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space // Phil, 1901. P. 559-572. doi: 10.1080/14786440109462720.
8. *Tilman L., Golub B.* Measuring yield curve risk using principal components analysis, value at risk, and key rate durations // The Journal of Portfolio Management, 1997. Vol. 23, N 4. P. 72-84.
9. *Specht K., Gohout W.* Portfolio selection using the principal components GARCH model // Financial Markets and Portfolio Management, 2003. Vol. 17, N 4. P. 450-458. doi: 10.1007/s11408-003-0404-y.
10. *Geng J.* Principal Component GARCH Model // SSRN Electronic Journal, 2007. doi: 10.2139/ssrn.1068945.
11. *Dubrov A, Mhitaryan V, Troshin L.I.* Mnogomernye statisticheskie metody i osnovy ekonometriki [Multidimensional statistical methods and fundamentals of econometrics]. Moscow: MESI; 2002.
12. *Williams D.* Probability with Martingales. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
13. *Bell D.* Transformations of measures on an infinite-dimensional vector space. In: Cinlar. E., Fitzsimmons P.J., Williams R.J. Seminar on Stochastic Processes // Progress in Probability, 1990. Vol. 24. P. 15-25. doi:10.1007/978-1-4684-0562-0_3.
14. *Yi Xi.* Comparison of option pricing between ARMA-GARCH and GARCH-M models. USA: University of Western Ontario, 2013. MoS Thesis.
15. *Terasvirta, T.* An Introduction to Univariate GARCH Models // Handbook of Financial Time Series, 2009. Vol. 10. P. 17-42. doi:10.1007/978-3-540-71297-8_1.
16. *Akgiray V.* Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts // The Journal of Business, 1989. Vol. 62, N 1. P. 55-80. doi:10.1086/296451.
17. *Danilishin A, Golembiovsky D.Y.* Risk-neytral'naya dinamika dlya ARIMA-GARCH modeli s oshibkami, raspredelennymi po zakonu S_U Dzhonsona [Risk-neutral dynamics for ARIMA-GARCH random process with errors distributed according to the Johnson's S_U law]. Informatica I ee Primeneniya, 2020; V. 14, 1. P. 48-55. doi: 10.14357/19922264200107.
18. *Bollerslev T.* Conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // The Review of Economics and Statistics, 1987. Vol. 69, N 3. P. 542-547. doi:10.2307/1925546.
19. *Simonato J.* GARCH processes with skewed and leptokurtic innovations: Revisiting the Johnson

SU case, 2012. Available at: https://ssrn.com/abstract=2060994.
20. *Phelim P.* Options: A Monte Carlo approach // Journal of Financial Economics, 1977. Vol. 4, N 3. P. 323–338. doi: 10.1016/0304-405X(77)90005-8.
21. *Lopez J.* Regulatory evaluation of value-at-risk models // Journal of Risk, 1998. Vol. 1, N 2. P. 37-63. doi: 10.21314/JOR.1999.005.
22. *Kupiec P.* Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models // The Journal of Derivatives, 1995. Vol. 3, N 2. P. 73-84. doi: 10.3905/jod.1995.407942.

A.R. Danilishin. PhD student, Department of Operations Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation. E-mail: danilishin-artem@mail.ru