# Моделирование процесса биологической очистки сточных вод на основе шумпетеровской динамики*

А.Н. Кириллов[I], А.М. Сазонов[I]

[I] Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН», г. Петрозаводск, Россия

**Аннотация.** В работе представлена простая модель системы биологической очистки осадков сточных вод, состоящей из аэротенка идеального вытеснения, отстойника и звена рециркуляции, разработанная на основе модели шумпетеровской динамики. Ограниченность роста концентрации биомассы моделируется уравнениями логистического типа. Показана глобальная устойчивость равновесия данной динамической системы, что позволяет прогнозировать состояние системы биоочистки и управлять им, изменяя значение скорости возвратного потока.

**Ключевые слова:** *биологическая очистка, устойчивость, стабилизация, динамические системы.*

**DOI:** 10.14357/20790279200303

### Введение

Задача стабилизации процесса очистки сточных вод от промышленных сбросов играет важную роль в проблеме охраны окружающей среды. Математическому моделированию динамики процесса биологической очистки сточных вод, на основе применения активного ила, представляющего собой многокомпонентную биомассу микроорганизмов, посвящено большое количество исследований [1-3, 6-10].

Стремление учесть как можно большее число параметров и связей между ними приводит к невозможности аналитического и качественного исследования модели, что снижает ее практическую ценность. В связи с этим, в предлагаемой работе рассматривается простая, основанная на балансовых соотношениях, модель системы биологической очистки осадков сточных вод, состоящей из аэротенка, отстойника и звена рециркуляции. Аэротенк представлен в виде последовательности компартментов, имеющих номера $i$, $i = 1, \dots, n$, биомасса и субстрат переходят из $i$-го компартмента в $i+1$-й. При этом происходит процесс окисления субстрата биомассой, в результате чего концентрация субстрата уменьшается, а биомассы – растет с увеличением $i$.

Очевидно, возрастающая концентрация биомассы ограничена сверху, что моделируется уравнениями логистического типа. Каждому компартменту соответствуют свои параметры, задающие соответствующие ограничения. Представленная в работе модель аналогична модели шумпетеровской динамики распределения капитала по уровням эффективности, разработанной и исследованной авторами [4].

В этой модели рост капитала происходит за счет производства на текущем уровне эффективности, а также за счет перехода с предыдущего уровня вследствие инновационного и имитационного процессов. При этом ограниченность экономического роста моделируется посредством уравнений логистического типа.

В представленной модели системы биологической очистки компартмент аэротенка является аналогом уровня эффективности экономики отрасли. Следует отметить, что уравнения, описывающие шумпетеровской динамику и впервые полученные в [5], в своей основе имеют уравнение Бюргерса, описывающее связь между скоростью течения жидкости и ее кинематической вязкостью в гидродинамике. Таким образом предлагаемая модель динамики биоочистки имеет вполне логичную, твердую основу: одна и та же математическая модель способна описывать как гидродинамику, так и экономическую динамику и динамику биоочистки. В связи с этим можно вспомнить модель Лотки-Вольтерра, предложенную для описания взаимодействия хищник-жертва, и активно используемую для описания экономической динамики [11,12].

### 1. Инвариантное множество и его глобальная устойчивость

Рассмотрим систему очистки, в которую входят аэротенк, состоящий из $n$ компартментов, от-

* Работа поддержана РФФИ, грант № 18-01-00249.

стойник и звено рециркуляции. При этом скорость очистки описывается функцией Моно. Пусть интенсивность подачи активного ила равна $u$. Получим следующую динамическую систему, описывающую динамику концентрации микроорганизмов в каждом компартменте:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Q + \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b)x_1, \\ \dot{s}_1 = R - \frac{1}{Y}\gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b)s_1, \\ \dot{x}_i = \gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b)x_{i-1} - (u+b)x_i, \\ \dot{s}_i = -\frac{1}{Y}\gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b)s_{i-1} - (u+b)s_i, \\ i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

где $s_i$, $x_i$ – концентрация субстрата-загрязнителя и концентрация микроорганизмов в $i$-м компартменте, соответственно; $V_i$ – максимально возможная концентрация микроорганизмов в $i$-м компартменте; $Y$ –коэффициент утилизации субстрата-загрязнителя в биомассу микроорганизмов; $\gamma_i$ – максимальная удельная скорость роста микроорганизмов; $b$ – скорость субстрата на входе. При этом входной поток $Q = Q(u)$ пропорционален скорости возвратного потока $u$, входной поток субстратов $R$ полагается кусочно-постоянным. Будем считать параметры системы, если не оговорено особо, постоянными.

**Замечание.** Заметим, что система (1) разработана на основе модели шумпетеровской динамики распределения капитала по уровням эффективности, описанной в [4]. Аналогичные параметры $V_i$ в указанной модели используются для ограничения роста капитала на каждом уровне.

Поставим задачу нахождения постоянной скорости $u > 0$ возвратного потока активного ила такой, что

$$s_u(t) \le c_1,\ x_u(t) \le c_1, \quad (2)$$

при $t \ge t^*$, $c_1$, $c_2$, $t^*$ – положительные постоянные. Отметим, что по сути – это задача об устойчивости по Лагранжу с построением инвариантного множества, в которое входят все траектории.

**Предложение 1.** Множество $\mathbb{R}_+^{2n} = \{(x_1, s_1, \dots, x_n, s_n), x_i \ge 0, s_i \ge 0, i = 1, \dots, n\}$ инвариантно.

***Доказательство.*** Из (1) имеем, $\dot{x}_i \ge 0$ при $x_i = 0$, $\dot{s}_i \ge 0$ при $s_i = 0$, что означает, что траектории не выходят из множества $\mathbb{R}_+^{2n}$ через граничные гиперплоскости $x_i = 0$, $s_i = 0$. Следовательно, $\mathbb{R}_+^{2n}$ инвариантно.

Обозначим, $z_i = x_i + Ys_i$. Тогда (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Q + YR - (u+b)z_1, \\ \dot{z}_i = (u+b)z_{i-1} - (u+b)z_i, i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим, $D = Q + YR$. Система (3) – линейная неоднородная, имеет равновесие $z^* = \frac{D}{u+b}(1, \dots, 1)$. Перепишем (3) в виде:

$$\dot{z} = Az + B, \quad (4)$$

где $A = (\{A_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}), A_{ii} = -(u+b), A_{ii-1} = (u+b), A_{ij} = 0,$ $j \ne i, i-1, B = (D, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}_+^n$

**Теорема 1.** Равновесие $z^* = \frac{D}{u+b}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^n$ системы (3) асимптотически устойчиво.

***Доказательство.*** Собственные числа матрицы линейного приближения $\lambda_i = -(u+b) < 0$ следовательно, в силу линейности (3) равновесие $z^*$ асимптотически устойчиво.

Из теоремы 1 следует, что для любого $z^0 \in \mathbb{R}_+^n = \{(z_1, \dots, z_n), z_i \ge 0, i = 1, \dots, n\}$ решение $z(t, z^0)$ системы (3) стремится к $z^*$: $z(t, z^0) \longrightarrow z^*$ при $t \longrightarrow +\infty$, где $z(0, z^0) = z^0$.

Введем обозначение: $y = (x_1, s_1, \dots, x_n, s_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$.

***Следствие теоремы 1.*** Для любого $\varepsilon_i > 0, i = 1, \dots, n$ и любой начальной точки $y^0 = (x_1, s_1, \dots, x_n, s_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$ положительная полутраектория $\{y(t, y^0), y^0 \in \mathbb{R}_+^{2n}, t \ge 0\}$ входит в множество $E(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{y \in \mathbb{R}_+^{2n}: x_i + Ys_i \in [d - \varepsilon_i, d + \varepsilon_i]\}$ и остается в нем при $t \longrightarrow +\infty$.

Теорема 1 и следствие из нее позволяют строить управление, решающее поставленную задачу (2) стабилизации системы биоочистки. Действительно, поскольку $x_n + Ys_n \to z_n^*$, то для $\forall\, \delta > 0\ \exists\, t^* > 0$ такой, что

$$0 < x_n(t) + Ys_n(t) < z_n^* + \delta = \frac{D}{u+b} + \delta \equiv c.$$

Это значит, что $x_n(t) < c, s_n(t) < \frac{c}{Y}$ при $t > t^*$. Для решения задачи (2) достаточно взять $\delta$ настолько малым, а $u$ настолько большим, чтобы $c = \min(c_1, c_2)$, если $Y \ge 1$ или $\frac{c}{Y} = \min(c_1, c_2)$, если $Y < 1$.

## 2. Глобальная устойчивость равновесия системы (1)

Покажем теперь, что система (1) имеет единственное равновесие в $\mathbb{R}_+^{2n}$, являющееся глобально устойчивым в $\mathbb{R}_+^{2n}$. Последнее означает, что все траектории системы (1), начинающиеся в точках, принадлежащих $\mathbb{R}_+^{2n}$, стремятся к этому равновесию. Это обстоятельство позволяет прогнозировать состояние системы биоочистки и управлять им, изменяя значение скорости возвратного потока $u$.

**Теорема 2.** Система (1) имеет единственное равновесие $y^* \in \mathbb{R}_+^{2n}$.

***Доказательство.*** Равновесие является решением системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} Q + \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) x_1 = 0, \\ R - \dfrac{1}{Y} \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) s_1 = 0, \\ \gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b) x_{i-1} - (u+b) x_i = 0, \\ -\dfrac{1}{Y} \gamma_i s_i x_i (V_i - x_i) + (u+b) s_{i-1} - (u+b) s_i = 0, \\ i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогично тому, как была получена система (3) из (1), получаем:

$$x_i + Y s_i = \frac{D}{u+b}, i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Подставляя $s_i = \frac{1}{Y}(\frac{D}{u+b} - x_i)$ в уравнения системы (5), имеющие нечетные номера, получим:

$$\begin{cases} Q + \frac{\gamma_1}{Y}\Big(\frac{D}{(u+b)} - x_1\Big) x_1 (V_1 - x_1) - -(u+b) x_1 = 0, \\ \frac{\gamma_i}{Y}\Big(\frac{D}{(u+b)} - x_i\Big) x_i (V_i - x_i) + (u+b) x_{i-1} - (u+b) x_i = 0, \\ i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что первое уравнение системы (7) имеет единственное решение, удовлетворяющее (6). Пусть $d = \frac{D}{u+b}$, $g(x) = Q + \frac{\gamma_1}{Y}(d - x) x (V_1 - x) - (u+b)x$, т.е. $g(x_1)$ – левая часть первого уравнения системы (7). Тогда $g(-\infty) = -\infty$, $g(0) = Q > 0, g(d) = -YR < 0$, $g(+\infty) = +\infty$. Здесь $g(\pm\infty) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x)$. Следовательно, кубическое уравнение имеет по одному корню на промежутках $(-\infty, 0), (0, d), (d + \infty)$, из которых только $x_1^* \in (0, d)$ удовлетворяет (6). Подставляя $x_1^*$ во второе уравнение системы (7) и проводя аналогичные рассуждения, получаем, что единственный корень $x_2^* \in (0, d)$. Повторяя данную процедуру, получаем единственное решение системы (7) $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ такое, что $x_i^* \in (0, d), i = 1, \dots, n$. Учитывая (6), получаем единственное равновесие $y^* = (x_1^*, s_1^*, \dots, x_n^*, s_n^*) \in \mathbb{R}_+^{2n}$.

**Замечание.** Полученная в доказательстве теоремы 2 оценка $x_i^* \in (0, d)$, где $d = \frac{D}{u+b}$, позволяет прогнозировать состояние системы (1) и управлять им, изменяя величину $u$.

Покажем, что равновесие $y^* \in \mathbb{R}_+^{2n}$ глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^{2n}$, т.е. $y(t, y^0) \longrightarrow y^*$ при $t \longrightarrow +\infty$ $\forall y^0 \in \mathbb{R}_+^{2n}$.

**Теорема 3.** Равновесие $y^* \in \mathbb{R}_+^{2n}$ **с**истемы (1) глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+^{2n}$.

***Доказательство.*** Доказательство теоремы следует из лемм 1, 2.

Рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений системы (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Q + \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) x_1, \\ \dot{s}_1 = R - \dfrac{1}{Y} \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) s_1. \end{cases} \quad (8)$$

**Лемма 1.** Равновесие $P_1^* = (x_1^*, s_1^*)$ системы (8) глобально устойчиво $\mathbb{R}_+^2$.

***Доказательство.*** Пусть

$$M = \Big(0, \frac{d}{Y}\Big), N = (d, 0), P_1^* = (x_1^*, s_1^*).$$

Из теоремы 2 при $n = 1$ следует, что $(x_1^*, s_1^*) \in [MN] = \{(x_1, s_1) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + Y s_1 = d\}$ и положительно инвариантное множество – отрезок $MN$ – является объединением двух положительных полутраекторий – промежутков $[MP_1^*), (P_1^* N]$ и равновесия $P_1^*$:

$$[MN] = [MP_1^*) \cup \{P_1^*\} \cup (P_1^* N).$$

При этом в точке $M$: $\dot{x}_1 = Q > 0$, в точке $N$: $\dot{x}_1 = Q - D = -YR < 0$, т.е. фазовые точки стремятся к $P_1^*$ вдоль $[MP_1^*), (P_1^* N]$. Теперь утверждение леммы 1 следует из теоремы 1.

Рассмотрим теперь систему (1) при $n = 2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Q + \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) x_1, \\ \dot{s}_1 = R - \dfrac{1}{Y} \gamma_1 s_1 x_1 (V_1 - x_1) - (u+b) s_1. \\ \dot{x}_2 = \gamma_2 s_2 x_2 (V_2 - x_2) + (u+b) x_1 - (u+b) x_2, \\ \dot{s}_2 = -\dfrac{1}{Y} \gamma_2 s_2 x_2 (V_2 - x_2) + (u+b) s_1 - (u+b) s_2. \end{cases} \quad (9)$$

**Лемма 2.** Равновесие $P_2^* = (x_1^*, s_1^*, x_2^*, s_2^*)$ системы (9) глобально устойчиво $\mathbb{R}_+^4$.

***Доказательство.*** Пусть $\widetilde{M} = \Big(x_1^*, s_1^*, 0, \frac{d}{Y}\Big), \widetilde{N} = (x_1^*, s_1^*, d, 0)$. Очевидно, $P_2^* \in [\widetilde{M}\widetilde{N}]$ и отрезок $[\widetilde{M}\widetilde{N}]$ является положительно инвариантным одномерным множеством системы (9), состоящим из двух положительно инвариантных полутраекторий $[\widetilde{M}P_2^*), (P_2^*\widetilde{N}]$ и равновесия $P_2^*$. При этом в точке $\widetilde{M}$ $\dot{x}_2 = (u+b) x_1^* > 0$, в точке $\widetilde{N}$ $\dot{x}_2 = (u+b)(x_1^* - d) < 0$, фазовые точки стремятся к $P_2^*$ вдоль $[\widetilde{M}P_2^*), (P_2^*\widetilde{N}]$. Далее утверждение леммы 1 следует из теоремы 1.

Для доказательства теоремы 3 остается применить рассуждение по индукции, аналогичное рассуждению из доказательства леммы 2.

## Заключение

В работе представлена простая модель системы биологической очистки осадков сточных вод, состоящей из аэротенка идеального вытеснения, отстойника и звена рециркуляции, разработанная на основе модели шумпетеровской динамики. Ограниченность роста концентрации биомассы моделируется уравнениями логистического типа. Показана глобальная устойчивость равновесия данной динамической системы, что позволяет прогнозировать состояние системы биоочистки и управлять им, изменяя значение скорости возвратного потока $u$.

## Литература


1. *Вавилин В.А.* Время оборота биомассы и деструкция органического вещества в системах биологической очистки. М.: Наука. 1986. 144 с.
2. *Вавилин В.А.* Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука. 1983. 185 с.
3. *Кириллов А.Н., Сазонов А.М., Брыксенкова Н.К.* Стабилизация процесса биоочистки с переменным составом биомассы // Труды КарНЦ РАН. 2019. № 7. С. 15-20.
4. *Kirillov A.N., Sazonov A.M.*. Global schumpeterian dynamics with structural variations // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2019. Т. 12. № 3. С. 17-27. DOI: 10.14529/mmp190302
5. *Полтерович В.М., Хенкин Г.М.* Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и математические методы. 1988. № 24. С. 1071-1083.
6. *Кириллов А.Н.* Динамическое моделирование и стабилизация процесса биологической очистки сточных вод // Целлюлоза. Бумага. Картон. 2008. № 5. С. 66.
7. *Кириллов А.Н.* Некоторые методы кусочно-постоянной стабилизации нелинейных динамических систем // Материалы 5-й Научно-технической Конференции «Мехатроника, автоматизация, управление». СПб. 2008. № 5. С. 70-71.
8. *Кириллов А.Н.* Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2006. Вып. 4. С. 127-131.
9. *Henze M., Grady C.P.L.Jr., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems // Water Research. 1987. Vol. 21. P. 505-515.
10. *Brune D.* Optimal control of the complete-mix activated sludge process // Environmental Technology Letters. 1985. Vol. 6. P. 467-476.
11. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. / Пер. с англ. – Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 198 с. (Puu T. Nonlinear Economic Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1993. 222 p.)
12. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. / Пер. с англ. М.: Мир. 1999. 335 с. (Zhang W.-B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springer-Verlag, Berlin, 1991. 246 p.)



**Кириллов Александр Николаевич.** Институт прикладных математических исследований, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН», г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, д. 11. Ведущий научный сотрудник. Доктор физико-математических наук. Доцент. Количество печатных работ: 140. Область научных интересов: динамические системы, теория неподвижных точек, теория управления, гибридные системы, математическое моделирование экономических и экологических процессов. E-mail: krllv1812@yandex.ru

**Сазонов Александр Михайлович.** Институт прикладных математических исследований, Федеральный исследовательский центр «Карельский научный центр РАН», г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, д. 11. Аспирант. Количество печатных работ: 7. Область научных интересов: дифференциальные уравнения, динамические системы, математическое моделирование экономических и экологических процессов. E-mail: sazon-tb@mail.ru (Ответственный за переписку)

# The modeling of the biological wastewater treatment process on the base of the Schumpeterian dynamics

A.N. Kirillov[I], A.M. Sazonov[I]

[I] Federal Research Center “Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia

**Abstract.** In the paper the simple model of the biological wastewater sludges treatment system consisting of the aerotank with ideal displacement, the settler and return element developed on the base of the model of the Schumpeterian dynamics. The boundedness of the biomass concentration growth is modeled via the logistic differential equations. The global stability of the equilibrium of this dynamic system is proved, which allows for the prediction of the biological treatment system statement and for control of the system by changing of the return stream velocity.

**Keywords:** *biological treatment, stability, stabilization, dynamic systems.*

**DOI:** 10.14357/20790279200303

## References

1. *Vavilin V.A.* 1986. Vremya oborota biomassy i destrukciya organicheskogo veshchestva v sistemah biologicheskoj ochistki [Turnover time of the biomass and organic substance destruction in the biological treatment systems]. M.: Nauka. 144 p.
2. *Vavilin V.A.* 1983. Nelinejnye modeli biologicheskoj ochistki i processov samoochishcheniya v rekah [Nonlinear models of the biological wastewater treatment and the processes of the self-purification in rivers]. M.: Nauka. 185 p.
3. *Kirillov A.N., Sazonov A.M., Bryksenkova N.K.* 2019. Stabilizatsiya processa bioochistki s peremennym sostavom biomassy [Stabilization of the biological waste-water treatment process with variable biomass structure]. Trudy KarNC RAN [Transactions of KarRC RAS] 7:15-20. DOI: 10.17076/mat1065
4. *Kirillov A.N., Sazonov A.M.* 2019. Global schumpeterian dynamics with structural variations. Vestnik YUrGU. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie [Bulletin SUSU Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software] 12(3):17-27. DOI: 10.14529/mmp190302
5. *Polterovich V.M., Henkin G.M.* 1988. Evolucionnaya model vzaimodeystviya processov sozdaniya i zaimstvovamiya tehnologij [Evolutionary model of the interaction of creating and borrowing technologies processes]. Ekonomika I matematicheskie metody [Economics and Mathematical Methods] 24:1071-1083.
6. *Kirillov A.N.* Dinamicheskoe modelirovanie i stabilizaciya processa biologicheskoj ochistki stochnyh vod [Dynamical modeling and process stabilization of the biological wastewater treatment]. Cellyuloza. Bumaga. Karton [Cellulose. Paper. Carton] 2008. 5:66.
7. *Kirillov A.N.* 2008. Nekotorye metody kusochno-postoyannoj stabilizacii nelinejnyh dinamicheskih sistem [Some methods of the piecewise constant stabilization of the nonlinear dynamical systems]. Materialy 5-j Nauchno-tehnicheskoj Konferencii “Mehatronika, avtomatizaciya, upravlenie” [Proceedings of the 5th scientific and technical conference “Mechatronics, automation, control”]. SPb. 5:70-71.
8. *Kirillov A.N.* 2006. Upravlenie mnogostadijnymi tekhnologicheskimi processami [The multistage technological processes control]. Vestnik SPbGU. Prikladnaya matematika. Informatika. Processy upravleniya [Vestnik SPbSU. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes] 4:127-131.
9. *Henze M., Grady C.P.L.Jr., Gujer W., Marais G.v.R., Matsuo T.* 1987. A general model for single-sludge activated sludge wastewater treatment systems. Water Research. 21:505-515.
10. *Brune D.* 1985. Optimal control of the complete-mix activated sludge process. Environmental Technology Letters. 6:467-476.
11. *Pu T.* 1993. Nonlinear Economic Dynamics. Springer-Verlag, Berlin. 222 p. DOI: 10.1007/978-3-642-97450-2
12. *Zhang W.-B.* 1991. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springer-Verlag, Berlin. 246 p. DOI: 10.1007/978-3-642-75909-3

**A.N. Kirillov.** Doctor of Sciences. Institute of Applied Mathematical Research, Federal Research Center “Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences”, 11 Pushkinskaya str., Petrozavodsk, 185910, Russian Federation. E-mail: krllv1812@yandex.ru

**A.M. Sazonov.** Institute of Applied Mathematical Research, Federal Research Center “Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences”, 11 Pushkinskaya str., Petrozavodsk, 185910, Russian Federation. E-mail: sazon-tb@mail.ru