Дифференциальная игра в задаче управления нелинейным объектом с ограничениями на управляющие воздействия*

В.Н. Афанасьев[I], Н.А. Фролова[II]

[I] Московский институт электрики и математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» г. Москва, Россия
[II] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Проблема оптимального управления в задаче дифференциальной игры с ограничениями на управляющие воздействия формулируется для класса управляемых динамических систем, нелинейные объекты которых представимы в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния (SDC-модель). Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратический функционал качества специального вида позволяют при синтезе оптимального управления, т.е. отыскания параметров регулятора, перейти от необходимости поиска решений уравнения Беллмана-Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Синтезированные управления обеспечивают SDC-модели свойство асимптотической устойчивости и позволяют определить соотношение наложенных на управления ограничений, при котором обеспечивается условие существования дифференциальной игры с нулевой суммой. В качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками на бесконечном интервале (с открытым горизонтом) управления.

Ключевые слова: *метод расширенной линеаризации, неклассический функционал, уравнение Беллмана-Айзекса, уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния.*
DOI: 10.14357/20790279200307

Введение

Трудности синтеза оптимальных управлений нелинейными динамическими объектами обусловили появление функционалов качества специального типа, получивших условное название критериев или функционалов обобщенной работы (ФОР) [1-6]. Хотя в ряде случаев функционалы обобщенной работы являются полуопределенными, они могут играть фундаментальную роль в решении основной проблемы прикладной современной теории автоматического управления – синтеза оптимального управления в реальном масштабе времени. Полуопределенность функционала заключается в том, что он содержит неизвестное до выполнения синтеза положительно определенное слагаемое. Выбор функционала специального вида обоснован тем, что при синтезе регуляторов удается существенно упростить вычислительную процедуру. В отличие от известных публикаций, в которых используются неклассические функционалы, в предлагаемой статье рассматривается задача дифференциальной игры, оптимальные управления в которых синтезируются с использованием квадратических функционалов обобщенной работы. Объекты, рассматриваемые в статье, описываются системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Синтез управлений для таких систем производится с использованием математических моделей этих систем, которые имеют линейную структуру и параметрами, зависящими от состояния (*State Dependent Coefficient,* SDC). Этот метод линеаризации нелинейных динамических систем имеет условное название «расширенная линеаризация» (*extendend linearization*) [7–9]. Впервые проблема управления нелинейными объектами с их эквивалентным представлением в виде линейных моделей с параметрами, зависящими от состояния, и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована в начале 60-х

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Проект 19-8-00535).

годов XX столетия. С конца 90-х годов метод привлекает все большее внимание со стороны ученых и практиков. Следует отметить, что до настоящего времени остается ряд вопросов, связанных с неоднозначностью представления нелинейного объекта в виде математической модели с линейной структурой и с параметрами, зависящими от состояния.

Преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, и использование квадратичного функционала качества позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Беллмана-Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (*State Dependent Riccati Equation*, SDRE). Это и составляет основу SDRE-метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления. Синтезированные управления с использованием SDC-модели и квадратичным критерием качества обеспечивают устойчивость модели при любых начальных условиях. Но этого может не быть при приложении синтезированного управления с использованием SDC-модели к исходной нелинейной системе [9]. Таким образом, в общей постановке задачи синтеза не решена задача о глобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы с управлением, синтезированным с использованием ее модели с параметрами, зависящими от состояния.

Материал статьи размещен в следующем порядке. В первом разделе определяется класс рассматриваемых в статье непрерывных динамических систем. Обсуждаются вопросы представления таких систем в виде эквивалентных математических моделей, имеющих линейную структуру и параметрами, зависящими от состояния. Соответствие SDC- модели, т.е. эквивалентность ее решений, управляемой нелинейной динамической системы заключается в том, эта модель также должна быть управляема. Для установления факта управляемости SDC-модели в статье предлагается критерий «поточечной управляемости», основанный на некоторой модификации критерия управляемости Калмана.

Во втором разделе статьи рассматривается задача дифференциальной игры с заданным временем переходного процесса и ограничениями, накладываемыми на управляющие воздействия. Вводится функционал качества специального вида, позволяющий существенно упростить нахождение параметров регуляторов. Модифицированному уравнению Беллмана-Айзекса, решение которого необходимо получить для нахождения оптимальных управлений, ставится в соответствие дифференциальное уравнение от некоторой положительно определенной формы, содержащий положительно определенную симметрическую матрицу, которая присутствует в дополнительном слагаемом в интегральной части функционала качества. Дифференциальное уравнение, решение которого определяет эту матрицу, находится сравнением правых частей этих двух скалярных дифференциальных уравнений. Эта же матрица определяет параметры управляющих воздействий дифференциальной игры. Доказывается теорема о глобальной асимптотической устойчивости SDC-модели с синтезированными управлениями. Используя полученное условие асимптотической устойчивости, формулируется условие существования дифференциальной игры при заданных ограничениях на управляющие воздействия.

В третьем разделе статьи рассматривается задача с неопределенным временем окончания переходного процесса. Основные результаты, представленные в этом разделе, базируются на положениях, полученных во втором разделе.

В четвертом разделе статьи в качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы из двух игроков на бесконечном интервале управления. Показано, что синтезированные управления переводят начальные состояния системы в начало координат.

1. Метод «расширенной линеаризации» в задаче формирования математической модели системы

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) + \psi(x(t))v(t),\ \ x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

где $x(t) \in R^n$ состояние системы; $x \in \Omega_x$, $x_0 \in X_0 \subset \Omega_x$ − множество возможных начальных условий системы; $u(t) \in R^r$ − управление; $v(t) \in R^k$ − возмущение; вектор-столбец $f(x(t))$ и матрицы $g(x(t))$ и $\psi(x(t))$ − непрерывные функции соответствующих размеров.

Предположение 1.1. Вектор-функция $f(x(t))$ – непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(x(t)) \in C^1(\Omega_x)$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x(t))$, $g(x(t))$, $\psi(x(t))$ такие, что из любых начальных условий $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Omega_x$ исходит одно и только одно решение уравнения (1.1).

Для построения эквивалентной математической модели системы (1.1), которая будет использоваться для синтеза управлений, сделаем предположение относительно вектор-функции $f(x(t))$ и матриц $g(x(t))$ и $\psi(x(t))$.

Предположение 1.2. Положим, что при $x=0$ выполняются следующие условия: $f(0)=0$ и, кроме этого, $g(x(t))\neq 0,\ \psi(x(t))\neq 0,\ \forall x(t)\in\Omega_x$.

Учитывая сделанные предположения, представим исходную систему (1.1) с помощью метода «расширенной линеаризации» в виде системы с линейной структурой, параметры которой зависят от состояния объекта (SDC-представление, State Dependent Coefficient factorization [7,8]), для этого представим вектор $f(x(t))$ в виде:

$$f(x(t))=A(x(t))x(t)\,. \tag{1.2}$$

При таком представлении уравнение объекта (1.1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x(t))x(t)+g(x(t))u(t)+\psi(x(t))v(t),\ x(t_0)=x_0. \tag{1.3}$$

Такую запись нелинейной управляемой системы (1.1) в виде (1.3) называют SDC-представлением. Очевидно, что представление вида (1.3) для систем, порядок которых выше первого, не является единственным.

Отметим, что в настоящее время отсутствуют критерии для определения таких структурных свойств как управляемость и наблюдаемость моделей систем, полученных с использованием метода «расширенной линеаризации». Для полученных моделей вида (1.3) можно провести «поточечную» проверку на управляемость в некоторой области исследуемого состояния системы [9].

Предположение 1.3. Будем считать, что представление исходной нелинейной системы в виде системы с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния, является управляемым в области допустимых значений $x(t)$, $[t_0,t_f]\times\Omega_x$, то есть пары $\langle A(x(t)),g(x(t))\rangle$, $\langle A(x(t)),\psi(x(t))\rangle$ являются поточечно управляемыми для всех $(t,x)\in[t_0,t_f]\times\Omega_x$.

Дадим пояснение термину «поточечная управляемость» [9]. Рассмотрим множество $D(t)\in R^n$, состоящее из всех точек $A(x(t))x(t)+g(x(t))u(t)+\psi(x(t))v(t)$ пространства R^n, которые получаются, когда $u(t)$ и $v(t)$ пробегают все множество допустимых управлений. Таким образом, для всех t, при которых $x(t)$ существует, справедливо включение $dx(t)/dt\in D(t)$ и множество $D(t)$ содержит все точки $x(t_i)=x_i,\ i=0,1,2,.....$ траектории $x(t)$ при допустимых управлениях $u(t)$ и $v(t)$. Так как модель системы (1.3), в силу Предположения 1.3, является управляемой, то для всех точек $x(t_i)=x_i,\ i=0,1,2,.....$ множества $D(t)$ должны выполняться условия Калмана - условие управляемости линейных систем с постоянными параметрами:

$$rank\left[g(x_i)\middle|A(x_i)g(x_i)\middle|A^2(x_i)g(x_i)....\middle|A^{n-1}(x_i)g(x_i)\right]=n,$$

$$rank\left[\psi(x_i)\middle|A(x_i)\psi(x_i)\middle|A^2(x_i)\psi(x_i)....\middle|A^{n-1}(x_i)\psi(x_i)\right]=n,\ x(t_i)\in D(t).$$

Сделанные выше Предположения 1.2 и 1.3, позволят при использовании метода «расширенной линеаризации» получить представление исходной управляемой нелинейной системы (1.1) в виде эквивалентной управляемой модели (1.3), которая имеет линейную структуру с параметрами, зависящими от состояния.

2. Задача с заданным временем окончания переходного процесса

Пусть элемент $\xi=\left(x(t),u(t),v(t)\right)$ является допустимым управляемым процессом. Допустимыми элементами управляемого процесса в поставленной задаче считать будем функции класса $x(\cdot)\in C^1\left([t_0,t_f],R^n\right),\ u(\cdot)\in C^1\left([t_0,t_f],R^r\right)$, $v(\cdot)\in C^1\left([t_0,t_f],R^k\right)$.

Предположение 2.1. Управления $u(t)$ и $v(t)$ реализуются с использованием обратной связи по состоянию объекта, т.е.

$$v(t)=\phi(t,x(t)),\quad u(t)=K(t)x(t)\,. \tag{2.1}$$

На управляющие воздействия $u(t)$ и $v(t)$ наложены ограничения вида:

$$\int_{t_0}^{t_f}\|u(t)\|_R^2\,dt\le E_u,\quad \int_{t_0}^{t_f}\|v(t)\|_P^2\,dt\le E_v. \tag{2.2}$$

Рассматривая возмущение $v(t)$, как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_v. В статье задача дифференциальной игры рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. игра с нулевой суммой.

Для оценки действий игроков введем функционал обобщенной работы [1], который позволит при синтезе управлений нелинейной системы существенно упростить вычислительную процедуру:

$$J(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))=\frac{1}{2}\left\|x(t_f)\right\|_F^2+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left\|x(t)\right\|_Q^2+\left\|u(t)\right\|_R^2-\left\|v(t)\right\|_P^2-\left\|\psi^{\mathrm{T}}(\mathrm{x})S(x(t))x(t)\right\|_M^2\right\}dt, \tag{2.3}$$
$$F=F^{\mathrm{T}}, F\geq 0,\ Q=Q^{\mathrm{T}},\ Q\geq 0,\quad R\succ 0,\ P\succ 0,\ M\succ 0.$$

Здесь $S(x(t))$ – неизвестная матрица. Предполагается, что $S(x(t))=S^{\mathrm{T}}(x(t)),\ S(x(t))\succ 0$.

Предположение 2.2. Пусть вектор-функция $f(x(t))$ и матрицы $g(x(t)),\ \psi(x(t)),\ \ t\in\left[t_0,t_f\right]$ такие, что функция $V(t,x)$, определенная как

$$V(t,x(t))\triangleq\inf_u\sup_v J(x(t),u(t),v(t)), \tag{2.4}$$

дифференцируемая функция при любых допустимых управлениях: $u(\cdot)\in L_2\left[t_0,t_f\right]$, $v(\cdot)\in L_2\left[t_0,t_f\right]$.

В общем случае, значение назначаемой функции $V(t,x(t))$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Беллмана-Айзекса [10, 11]:

$$\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t}+\min_u\max_v H\left\{x(t),u(t),v(t),\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}=0, \tag{2.5}$$
$$V(t_f,x(t_f))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f),$$

где $H(\cdot)$ – гамильтониан

$$H\left(x(t),u(t),v(t),\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left\|x(t)\right\|_Q^2+\left\|u(t)\right\|_R^2-\left\|v(t)\right\|_P^2-\left\|\psi^{\mathrm{T}}(\mathrm{x})S(x(t))x(t)\right\|_M^2\right\}+ \tag{2.6}$$
$$+\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}\left\{f(x(t))+g(x(t))u(t)+\psi(x(t))v(t)\right\}.$$

Функция $H\left(x(t),u(t),v(t),\partial V(t,x(t))/\partial x\right)$ определена и непрерывна для $t\in\left[t_0,t_f\right]$.

В силу этого, оптимальные управления определяются соотношениями [12]:

$$H\left(x^0(t),u^0(t),v^0(t),\partial V(t,x^0(t))/\partial x\right)=$$
$$=\min_u\max_v H\left(x(t),u(t),v(t),\partial V(t,x(t))/\partial x\right),$$
$$\left\{\frac{\partial H}{\partial v}\right\}^{\mathrm{T}}=0,\ \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}=-P\succ 0,\ \left\{\frac{\partial H}{\partial u}\right\}^{\mathrm{T}}=0,\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=R\succ 0$$

Откуда

$$\tilde{u}(t)=-R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},\ v(t)=P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(\ (\ ))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{2.7}$$

Уравнение для объекта (1.1) с управлениями (2.7) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}x(t)=$$
$$=f(x(t))-\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))-\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{2.8}$$
$$x(0)=x_0.$$

Лемма 2.1 [13]**.** Если существуют оптимальные управления в задаче дифференциальной игры (1.1), (1.3), то они единственны и определяются уравнениями (2.7)*, где вектор* $\left\{\partial V(t,x(t))/\partial x\right\}^{\mathrm{T}}$ является решением уравнения Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t}+\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}f(x(t))+$$
$$+\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}-$$
$$-\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}- \tag{2.9}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}-$$
$$-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))M\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)=0,$$
$$V(t_f,x(t_f))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f).$$

Перепишем уравнение (2.9) в виде модифицированного уравнения Беллмана-Айзекса:

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt}=-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}+ \tag{2.10}$$
$$+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))M\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)=0$$

с краевым условием:

$$V(t_f,x(t_f))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f). \tag{2.11}$$

Будем искать решение модифицированного уравнения Беллмана-Айзекса (2.10), применив к исходной нелинейной модели управляемого объекта метод «расширенной линеаризации» – уравнение (1.3).

Определим функцию $V(t,x(t))$ с точностью, до введенной ранее матрицы $S(x)$, в виде:

$$V(t,x(t))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x)x(t). \tag{2.12}$$

С учетом (2.12) модифицированное уравнение Беллмана-Айзекса (2.10) принимает вид:

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt}=-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))M\psi^{\mathrm{T}}(x(t))-$$
$$-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t). \tag{2.13}$$

Продифференцировав (2.12) по времени, будем иметь:

$$\frac{dV(t,x(t))}{dt}=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}S(x(t))\right\}x(t)+$$

$$+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\frac{d}{dt}x(t)+\frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dt}x^{\mathrm{T}}(t)\right\}S(x(t))x(t), \quad (2.14)$$

где $\frac{d}{dt}S(x(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x(t))}{\partial x_i}\frac{d}{dt}x_i(t)$.

Откуда, с учетом (2.13) и (2.14):

$$x^{\mathrm{T}}(t)\left[\frac{d}{dt}S(x(t))+S(x(t))A(x(t))+A^{\mathrm{T}}(x(t))-\right.$$

$$\left.-S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)+Q\right]x(t)+$$

$$+x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)x(t)-$$

$$-x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))M\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)x(t)=0.$$

Назначим матрицу M в виде $M=P^{-1}$. Тогда, учитывая, что $x(t)$ есть решение уравнения (2.8) с ненулевым начальным условием, имеем:

$$\frac{d}{dt}S(x(t))+S(x(t))A(x(t))+A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))-$$

$$-S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)+Q=0. \quad (2.15)$$

Сравнивая выражения (2.11) и (2.12) при $t=t_f$, получаем краевое условие для уравнения (2.15):

$$S(x(t_f))=F. \quad (2.16)$$

Из двух возможных решений уравнения (2.15) с краевым условием (2.16) выбираем решение, в соответствии с условиями, определенными при постановке задачи, при котором матрица $S(x(t))$ является положительно определенной.

Управления (2.7) с учетом полученных результатов, имеют вид:

$$u(t)=-R^{-1}g^{\mathrm{T}}x(t)S(x(t))x(t),$$

$$v(t)=P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t). \quad (2.17)$$

Теорема 2.1. Пусть матрица

$$\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))-\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]$$

системы

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x(t))x(t)-$$

$$-\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))-\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]S(x(t))x(t), \quad (2.18)$$

$$x(0)=x_0,$$

по крайней мере, положительно полуопределенная для всех $x(t),\ t\in\left[t_0,t_f\right]$. Тогда при условии, что матрица $S(x(t))$ является симметрической положительно определенной и находится решением уравнения типа Риккати (2.15) с краевым условием (2.16), система (2.18) асимптотически устойчива.

Доказательство этого и последующих утверждений содержится в Приложении.

Используя полученное условие асимптотической устойчивости, можно сформулировать условия существования дифференциальной игры.

Теорема 2.2. Дифференциальная игра (1.1), (2.3) имеет цену, если соотношение ограничений (2.2), наложенных на действия игроков G_u и G_v таково, что выполняется условие:

$$E_u-RP^{-1}E_v\geq 0. \quad (2.19)$$

Теорема 2.3. Даны управляемая модель (2.18) системы (1.1) и функционал (2.3). Обозначим через $J^*(t,x)$ минимальную величину, достигаемою функционалом $J(x(\cdot),u(\cdot))$ при оптимальных управлениях $J^*(t,x)$, реализованным с использовании обратной связи. Эта величина равна:

$$J^*(t,x(t))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t),\ t_0\leq t\leq t_f.$$

3. Задача с неопределенным временем окончания переходного процесса

Рассмотрим задачу дифференциальной игры с неопределенным временем окончания переходного процесса (задача с «открытым горизонтом»). Детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (1.1). В этом уравнении $x(\cdot)=\left\{x(t)\in R^n,\ t\in\left[t_0,t_f\right)\right\}$ состояние системы; $x\in\Omega_x$, $x_0\in X_0\subset\Omega_x$ − множество возможных начальных условий системы; $u(\cdot)=\left\{u(t)\in R^r, t\in\left[t_0,t_f\right)\right\}$ − управление; $v(\cdot)=\left\{v(t)\in R^k,\ t\in\left[t_0,t_f\right)\right\}$ − возмущение; вектор-столбец $f(x(t))$ и матрицы $g(x(t))$ и $\psi(x(t))$ − непрерывные функции соответствующих размеров. В данном разделе работы сохраняются все предположения, сделанные выше относительно этой системы.

Введем функционал качества дифференциальной игры для задачи стабилизации:

$$J(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot)) = \\ = \lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{\|x(t)\|_Q^2+\|u(t)\|_R^2-\|v(t)\|_P^2-\left[\psi^{\mathrm{T}}(x)\widehat{S}(x(t))x(t)\right]_M^2\right\}dt, \quad (3.1)$$

$$Q=Q^{\mathrm{T}},\ Q\succ 0,\quad R>0,\ P>0,\ M=P^{-1}.$$

Здесь матрица $\widehat{S}(x(t))$ – неизвестная, но предполагается, что $\widehat{S}(x(t))\succ 0$, $\widehat{S}(x(t))=\widehat{S}^{\mathrm{T}}(x(t))$.

Для рассматриваемого случая управления $u(t)$ и $v(t)$ определяются соотношениями вида (2.17)

$$u(t)=-R^{-1}g^{\mathrm{T}}x(t)\hat{S}(x(t))x(t),$$

$$v(t)=P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\hat{S}(x(t))x(t), \quad (3.2)$$

в которых матрица $\hat{S}(x(t))$ определяется решением матричного алгебраического уравнения [7]:

$$\hat{S}(x(t))A(x(t))+A^{\mathrm{T}}(x(t))\hat{S}(x(t))-$$

$$-\hat{S}(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\hat{S}(x(t)+Q=0. \quad (3.3)$$

Модель системы (1.1) с управлениями (3.2) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x(t))x(t)- \\ -\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))-\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]\hat{S}(x(t)x(t), \quad (3.4)$$

$$x(0)=x_0.$$

Теорема 3.1. Пусть матрица

$$\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))-\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]$$

модели системы (3.4) по крайней мере, положительно полуопределенная для всех $x(t)$, $t\in\left[t_0,t_f\right]$. Тогда при условии, что матрица $\hat{S}(x(t))$ является симметрической положительно определенной и находится решением алгебраического матричного уравнения типа Риккати (3.3) с параметрами, зависящими от состояния, модель системы (3.4) асимптотически устойчива.

4. Пример

Продемонстрируем полученные выше результаты математическим моделированием управляемой нелинейной системы второго порядка. Пусть система описывается следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt}x_1(t)=x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t)=x_1^3(t)+u(t)+(x_1(t)+x_2(t))v(t) \quad (4.1)$$

$$x_1(t_0)=2,\ x_2(t_0)=-2.$$

Отметим, что система (4.1) без управляющих воздействий не устойчивая.

Функционал для случая, когда $M=P^{-1}$ имеет вид

$$J(x,u,v)=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\Big(x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)-v^{\mathrm{T}}(t)Pv(t)- \\ -x^{\mathrm{T}}(t)\widehat{S}(x(t))\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t))x(t)\Big)dt. \quad (4.2)$$

Таким образом, сравнивая уравнения (1.1) и (2.1), можно записать:

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2(t)\\x_1^3(t)\end{bmatrix}=A(x)x(t)=\begin{bmatrix}0&1\\x_1^2(t)&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix},$$

$$g=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \psi(x(t))=\begin{pmatrix}0\\x_1(t)+x_2(t)\end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Назначим матрицы штрафа:

$$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ R=1.$$

Матрицу P назначим, исходя из условия существования дифференциальной игры (2.19), а именно: $P\ge\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2$. Примем $P=\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2+1$.

Не трудно видеть, что пары $\langle A(x(t)),g(t)\rangle$ и $\langle A(x(t)),\psi(x(t))\rangle$ управляемы. Действительно, применяя поточечный критерий управляемости:

$$rang\left[g(t)\quad A(x(t))g(t)\right]=rang\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2,$$

$$rang\left[\psi(x(t))\quad A(x(t))\psi(x(t))\right]= \\ =rang\begin{bmatrix}0&x_1(t)+x_2(t)\\x_1(t)+x_2(t)&0\end{bmatrix}=2,$$

для $x_1(t)\ne -x_2(t)$.

Таким образом, модель системы (4.1) с матрицами (4.3) управляема, т.к. $x(t)\in\mathbb{R}^2$.

Запишем уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния:

$$\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\x_1^2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x_1^2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}&s_{21}\\s_{12}&s_{22}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0$$

Решением уравнения Риккати является положительно определенная матрица:

$$S(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{\left(2x_1^2+2\sqrt{x_1^4+1}+1\right)\left(x_1^4+1\right)}&x_1^2+\sqrt{x_1^4+1}\\x_1^2+\sqrt{x_1^4+1}&\sqrt{2x_1^2+2\sqrt{x_1^4+1}+1}\end{pmatrix}$$

Откуда оптимальные управления принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&u(t) = -R^{-1}g(t)^{\mathrm{T}}S(x(t))x(t) = \\
&= -\left(x_1^2(t) + \sqrt{x_1^4(t)+1}\right)x_1(t) - \left(\sqrt{2x_1^2(t) + 2\sqrt{x_1^4(t)+1}+1}\right)x_2(t), \\
&v(t) = P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t) = \\
&= \frac{1}{\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2+1}\left(x_1(t)+x_2(t)\right)\times \\
&\times\left[\left(x_1^2(t)+\sqrt{x_1^4(t)+2}\right)x_1(t) + \left(\sqrt{2x_1^2(t)+2\sqrt{x_1^4(t)+2}+1}\right)x_2(t)\right].
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Запишем исходную систему (4.1) с оптимальными управлениями (4.4):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t), \\
&\frac{d}{dt}x_2(t) = x_1^3(t) - \left(x_1^2(t)+\sqrt{x_1^4(t)+1}\right)x_1(t) - \left(\sqrt{2x_1^2(t)+2\sqrt{x_1^4(t)+1}+1}\right)x_2(t) + \\
&+\frac{\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2}{\left(x_1(t)+x_2(t)\right)^2+1}\left[\left(x_1^2(t)+\sqrt{x_1^4(t)+2}\right)x_1(t) + \left(\sqrt{2x_1^2(t)+2\sqrt{x_1^4(t)+2}+1}\right)x_2(t)\right] \\
&x_1(t_0) = 2,\ x_2(t_0) = -2
\end{aligned}
$$

На рис. 1 приведены переходные процессы для состояний системы (4.1) с управляющими воздействиями $u(t)$ и $v(t)$.

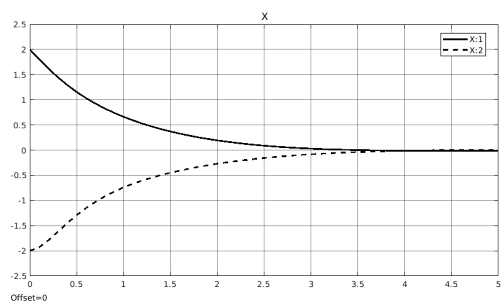

Рис. 1. Переходные процессы в системе $x_1(t)$ и $x_2(t)$

На рис. 2 приведены графики управляющих процессов $u(t)$ и $v(t)$.

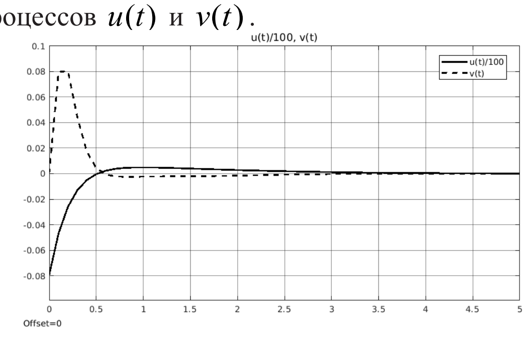

Рис. 2. Управляющие воздействия $u(t)$ и $v(t)$

Как видно из приведенных графиков, управления (4.4) обеспечивают исходной нелинейной системе (4.1) асимптотическую устойчивость.

Приложение

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Введем функцию Ляпунова $V_L(x(t))$ в виде [14]:

$$V_L(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)S(t)x(t) \tag{П.1}$$

Используя вторую теорему Ляпунова, запишем:

$$\frac{dV_L(x(t))}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t)\right\} \le -x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t), \tag{П.2}$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&x^{\mathrm{T}}(t)\Big[\frac{d}{dt}S(x(t)) + S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t)) - \\
&-S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)+Q\ \Big]x(t) + \\
&+x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\left[\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\right]S(x(t)x(t) \le 0.
\end{aligned}
$$

Учитывая, что первое слагаемое в этом выражении равно нулю, т.к.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}S(x(t)) + S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t)) - \\
&-S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)+Q = 0,
\end{aligned}
$$

получаем

$$x^{\mathrm{T}}(t)S(t)\left\{g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) - \psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right\}S(t)x(t) \ge 0 \tag{П.3}$$

Таким образом, условие асимптотической устойчивости SDC-модели системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = \left\{A(x(t)) - \left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) - \psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]S(x(t))\right\}x(t), \\
&x(0) = x_0,
\end{aligned}
$$

обеспечивается назначением матриц штрафа R и P функционала качества так, чтобы выполнялось матричное неравенство

$$g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) - \psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t)) \ge 0 \tag{П.4}$$

или, что то же самое, матрица

$$\left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) - \psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right],$$

$$\forall x(t),\ t \in \left[t_0, t_f\right]$$

должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенной.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. Проинтегрируем условие (П.3) и, учитывая (П.4), будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)\right\}dt - \\
&-\int_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))\psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)\right\}dt \ge 0
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание, что $\int_{t_0}^{t_f}\left\|v(t)\right\|_P^2 dt \le E_v$, $\int_{t_0}^{t_f}\left\|u(t)\right\|_R^2 dt \le E_u$, получаем:

условие существования дифференциальной игры $E_u - RP^{-1}E_v \geq 0$.

Доказательство теоремы 2.3. Подставим в подынтегральную часть функционала

$$J(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{\|x(t)\|_Q^2 - \|v(t)\|_P^2 - \|\psi^{\mathrm{T}}(\mathrm{x})S(x(t))x(t)\|_M^2 + \|u(t)\|_R^2\right\}dt$$

выражение $d\left[x^{\mathrm{T}}(t)\,S(x(t))x(t)\right]/\,dt$, компенсировав вне интеграла следующим соотношением: $0,5\left[x^{\mathrm{T}}(t)\,S(x(t))x(t) - x^{\mathrm{T}}(t_f)\,S(x(t_f))x(t_f)\right]$, т.е.

$$J(x(\cdot), v(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)\,Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{d\left[x^{\mathrm{T}}(t)\,S(x(t))x(t)\right]/\,dt\right\}dt$$

$$+\frac{1}{2}\left[x^{\mathrm{T}}(t_0)\,S(x(t_0))x(t_0) - x^{\mathrm{T}}(t_f)\,S(x(t_f))x(t_f)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{\|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 - \|v(t)\|_P^2 - \|\psi^{\mathrm{T}}(\mathrm{x})S(x(t))x(t)\|_M^2\right\}dt.$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left\{A(x(t)) - \left[g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t)) - \psi(x(t))P^{-1}\psi^{\mathrm{T}}(x(t))\right]S(x(t))\right\}x(t),$$

$$x(0) = x_0,$$

и что $S(x(t_f)) = F$, имеем:

$$J^*(t, x(t)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t),\ \ t_0 \leq t \leq t_f.$$

Доказательство Теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству Теоремы 2.2.

Заключение

В отличие от известных работ в настоящей статье рассматривается задача синтеза оптимальных управлений для нелинейного объекта в постановке дифференциальной игры с неклассическим функционалом. Использование функционала такого вида позволяет с одной стороны использовать стандартную методику синтеза оптимального управления для систем с квадратическим функционалом качества, с другой – учесть наложенные ограничения на управляющие воздействия и найти условия существования седловой точки функционала. Доказана асимптотическая устойчивость нелинейной системы управления с синтезированными управлениями. Теоретические результаты подтверждены математическим моделированием.

Литература

1. *Красовский А.А.* Интегральные оценки моментов и синтез нелинейных регуляторов // АиТ. – 1976. − №10. – С. 53-71.
2. *Krasovsky A.A.* New Solution to the Problem of a Control System Analytical Design // Automatica. – 1971. − № 1. − P. 45-50.
3. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. Красовского А.А. М.: − Наука. 1987. 712 с.
4. *Красовский А.А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы теории оптимального управления (обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. №1.С.3-41
5. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. − М.: Наука. 1977. 274 с.
6. *Белоглазов И.Н.* Новый подход к оптимизации непрерывных нелинейных динамических систем на основе неклассических целевых функционалов. *Автомат. и телемех*. 2001, №7, 37–49.
7. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proc. 17th World Conf. IFAC, Seoul, Korea, July 6-11. 2008. 3771-3775 P.
8. *Cloutier J.R.* State dependent Riccati equation techniques: An overview. In Proc. American Control Conf., 1997.
9. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. − М.: ЛЕНАРД. 2015. − 224с
10. Б*еллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – М.: Изд-во Мир, 1974. − 207 с.
11. *Isaacs R.* Differential Games. – New York: John &Wiley, 1971. – 480 p.
12. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление / Под ред. Ю.И. Топчеева. М.: Изд. МАШИНОСТРОЕНИЕ. 1968. − 764 с.
13. *Галеев Э.М., Зеликин М.Ю., Конягин С.В. и др.* Оптимальное управление / Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. − М.: МЦНМО, 2008. − 320 с.
14. *Малкин И.Г.* Теория устойчивого движения. Изд.2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС. 2004. – 432 с.

Афанасьев Валерий Николаевич. Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Профессор, доктор технических наук. Количество печатных работ: более 100 (в т.ч. 5 монографий). Область научных интересов: управление оптимальными нелинейными системами. E-mail: afanval@mail.ru (ответственный за переписку)

Фролова Наталия Алексеевна. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет. Аспирант. Количество печатных работ: 5. Область научных интересов: управление оптимальными нелинейными системами. E-mail: matveeva.nataljja@physics.msu.ru

Differential game in the problem of controlling a nonlinear object with restrictions on control actions

Valery N. Afanas'ev[I], Nataly A. Frolova[II]

[I] Moscow Institute of Electricians and Mathematics, National Research University Higher School of Economics Moscow, Russia

[II] Moscow State University M.V. Lomonosov, Moscow, Russia

Abstract. The optimal control problem in the differential game problem with restrictions on the control actions for a class of controlled dynamic systems whose nonlinear objects which can be represented as objects with a linear structure and state-dependent parameters (SDC-model) is formulated. The linearity of the structure of the transformed nonlinear system and the quadratic functional quality of a special kind allow for the synthesis of optimal control, i.e. finding the parameters of the controller, go from the need to search for solutions of the Bellman-Isaacs equation to the equation of Riccati type with state-dependent parameters. The synthesized controls provide the SDC-model with the property of asymptotic stability and allow one to determine the ratio of constraints imposed on the controls under which the condition for the existence of a differential game with zero sum. As an illustration of the results obtained, a simulation of the behavior of a nonlinear system with two players on an infinite control interval (with an open horizon) is given.

Keywords: *extended linearization method, non-classical functional, Bellman-Isaacs equation, Riccati equation with state-dependent parameters*.

DOI: 10.14357/20790279200307

References

1. *Krasovsky A.A.* Integral estimates of moments and synthesis of nonlinear regulators // Automation and Remote Control - 1976. - No. 10. - P. 53-71.
2. *Krasovsky A.A.* New Solution to the Problem of a Control System Analytical Design // Automatica. - 1971. - No. 1. - P. 45-50.
3. Reference on the theory of automatic control. Ed. Krasovsky A.A. M .: - Science.1987. 712 p.
4. *Krasovsky A.A.* Nonclassical objective functionals and problems of the theory of optimal control (review) // Izv. USSR Academy of Sciences. Tech. cybernetics. 1992. No1. P. 3-41
5. *Krasovsky A.A., Bukov V.N., Shendrik V.S.* Universal algorithms for optimal control of continuous processes. - M .: Science. 1977. 274 p.
6. *Beloglazov I.N.* A new approach to the optimization of continuous nonlinear dynamic systems based on non-classical objective functional. Automation and Remote Control. 2001, No. 7, P. 37–49.
7. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proc. 17th World Conf. IFAC, Seoul, Korea, July 6-11. 2008. 3771-3775 P.
8. *Cloutier J.R.* State dependent Riccati equation techniques: An overview. In Proc. American Control Conf., 1997.
9. *Afanasyev V.N.* Control of non-linear uncertain dynamic objects. - M .: LENARD. 2015.- 224 p.
10. *Bellman R., Angel E.* Dynamic programming and partial differential equations. - M.: Mir Publishing House, 1974. - 207 p.
11. *Isaacs R.* Differential Games. – New York: John &Wiley, 1971. – 480 p.
12. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control. McGraw-Hill Book Comp. 1964. 764 p.
13. *Galeev E.M., Zelikin M.Yu., Konyagin S.V. and others.* Optimal control / Ed. N.P. Osmolovsky and V.M. Tikhomirov. - M.: MCCNMO, 2008 . 320 p.
14. *Malkin I.G.* Theory of sustainable motion. Vol. 2. M .: URSS editorial. 2004 . 432 p.

V.N. Afanas'ev. PhD, Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the National Research University Higher School of Economics. Moscow, 123458, Tallinskaja, 34. E-mail: afanval@mail.ru (responsible for correspondence)

N.A. Frolova. Graduate student, Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia. E-mail: matveeva.nataljja@physics.msu.ru