Динамика макросистем

Динамический хаос в гамильтоновых и консервативных системах уравнений Матье*

Н.А. Магницкий[I,II]

[I] Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия
[II] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе на примере проведенного численного анализа бифуркаций эллиптических циклов консервативного обобщенного уравнения Матье и порожденной им гамильтоновой системы уравнений показано, что переход к хаосу в консервативных системах происходит не в результате разрушения некоторых торов невозмущенной системы в соответствии с теорией Колмогорова-Арнольда-Мозера, а в результате рождения новых сложных многооборотных торов вокруг эллиптических циклов, рождающихся в соответствии с неполным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, характерным для диссипативных систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *консервативные, гамильтоновы и диссипативные системы, бифуркации, динамический хаос, теория ФШМ.*

DOI: 10.14357/20790279210201

Введение

Дивергенция правой части консервативной системы обыкновенных дифференциальных уравнений равна нулю. Следовательно, консервативная система обыкновенных дифференциальных уравнений не может иметь аттракторов, так как сохраняет объем при движении вдоль своих траекторий. Поэтому изучение динамического хаоса в консервативных системах является более сложной задачей по сравнению с анализом хаотической динамики в диссипативных системах, аттракторы которых могут быть описаны универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого (ФШМ) [2,3]. Частным случаем консервативной системы является гамильтонова система с n степенями свободы, то есть $2n$ – мерная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial q_i}, \; i = 1, \dots, n.$$

Функция $H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ называется гамильтонианом системы, переменные q_i называются обобщенными координатами, а переменные p_i – обобщенными импульсами.

Движение в такой системе происходит по $2n$-1 мерной энергетической поверхности, задаваемой условием $H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) = \varepsilon = const$. Типичный вид картин, возникающих в сечениях фазового пространства гамильтоновой системы при малых и достаточно больших значениях параметра ε, представлен на рис. 1, взятом из работы [1], описывающей переход к хаосу в знаменитой системе уравнений Хенона-Хейлеса с двумя степенями свободы и с гамильтонианом:

$$H(x,y,z,r) = (x^2 + y^2 + z^2 + r^2)/2 + x^2 z - z^3/3 = \varepsilon.$$

* Работа поддержана грантами РФФИ № 18-029-10008мк и № 20-07-00066а.

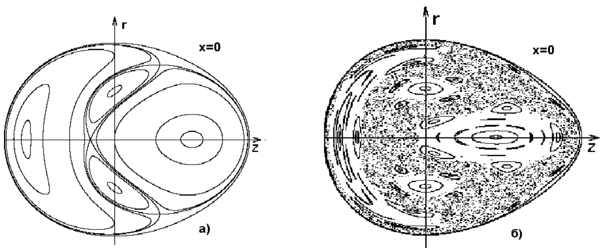

Рис. 1. Проекции сечений Пуанкаре системы Хенона-Хейлеса при *ε = 1/24* (а) и *ε = 1/8* (б)

При малых значениях параметра ε хаос в системе отсутствует, а энергетическая поверхность разбита на области, заполненные двумерными торами вокруг двух пар эллиптических циклов системы. Границами областей являются сепаратрисные поверхности (многообразия), проходящие через гиперболические циклы. При достаточно больших значениях параметра ε в системе наблюдается хаотическая динамика. В работах [1-3] на многочисленных примерах показано, что развитие хаоса в консервативных и, в частности, гамильтоновых системах происходит не в соответствии с теорией Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ) в результате разрушения торов невозмущенной системы, а наоборот, через каскады бифуркаций рождения сложных торов вокруг циклов, бифуркации рождения которых происходят в расширенных диссипативных системах в соответствии с теорией ФШМ. При стремлении параметра диссипации к нулю области устойчивости устойчивых циклов расширенной диссипативной системы превращаются в торы консервативной (гамильтоновой) системы вокруг ее эллиптических циклов, в которые переходят устойчивые циклы. Торы консервативной (гамильтоновой) системы соприкасаются через гиперболические циклы, в которые переходят седловые циклы расширенной диссипативной системы. В связи с этим ясно, что только небольшое число циклов каскада ФШМ расширенной диссипативной системы с большими областями устойчивости могут порождать эллиптические циклы и торы консервативной системы.

Целью настоящей работы является непосредственное численное обнаружение бифуркаций таких циклов из каскада ФШМ в консервативной обобщенной системе уравнений Матье и в порожденной ею гамильтоновой системе уравнений при увеличении значений параметра ε. Дополнительная сложность в решении поставленной задачи заключается в том, что в отличие от диссипативных систем, начальные условия играют существенную роль при численном нахождении эллиптических циклов консервативных систем. Необходимо попасть в малую окрестность цикла, лежащую внутри образованного циклом тора, витки узких трубок которого могут достаточно плотно заполнять фазовое пространство.

1. Консервативная обобщенная система уравнений Матье

Рассмотрим нелинейное консервативное обобщенное уравнение Матье:

$$\ddot{x} + \left(\delta + \sqrt{\varepsilon}\cos t\right)x + x^3 = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) эквивалентно не гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, как принято считать в современной литературе, а консервативной автономной четырехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3, \\ \dot{z} = r, \qquad \dot{r} = -z \qquad (2)$$

с интегралом движения $H(z,r) = z^2 + r^2 = \varepsilon$.

Расширенная диссипативная система уравнений (2):

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \\ \dot{z} = r, \qquad \dot{r} = -z\ . \qquad (3)$$

В соответствии с развитым в работах автора методом, бифуркации циклов в консервативной системе уравнений (2) при росте значений параметра ε могут быть найдены предельным переходом в расширенной диссипативной системе (3) при $\mu \to 0$. Те устойчивые циклы диссипативной системы уравнений (3), которые сохраняются в системе вместе со своими областями устойчивости при всех $\mu > 0$, переходят в циклы консервативной системы (2) при $\mu = 0$. Приближенные значения координат точки (начального условия), принадлежащей циклу консервативной системы (2), находятся как координаты близкой к ней точки, принадлежащей устойчивому циклу расширенной диссипативной системы уравнений (3) при $\mu = 0.0001$. На рис. 2 изображены проекции на плоскость (x,y) циклов периодов 1 и 2 из каскада бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума для консервативной системы (2) при $\delta = 1$, $\varepsilon = 2.8$ (а) и $\varepsilon = 2.84$ (б). Начальные условия для численного нахождения циклов имеют следующие значения: $x = 0.551763$, $y = -0.229425$, $z = 1.65772$, $r < 0$; и $x = 0.516577$, $y = -0.077651$, $z = 1.683033$, $r < 0$.

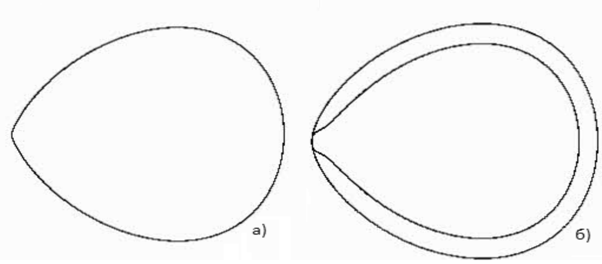

Рис.2. Проекции циклов периодов 1 и 2 консервативной системы (2) на плоскость (x,y) при δ = 1, ε = 2.8 (а) и ε = 2.84 (б)

На рис.3 изображены проекции на плоскость (x,y) циклов периодов 1 и 3 из субгармонического каскада бифуркаций Шарковского для консервативной системы (2) при δ = 1, ε = 5 (а) и ε = 5.6 (б). Начальные условия для численного нахождения циклов имеют следующие значения: x = - 1.382716, y = - 1.329522, z = - 1.945525, r < 0; и x = - 0.333648, y = 1.854751, z = - 1.042057, r > 0.

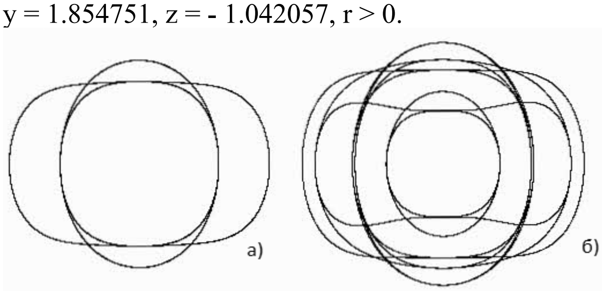

Рис.3. Проекции циклов периодов 1 и 3 консервативной системы (2) на плоскость (x,y) при δ = 1, ε = 5 (а) и ε = 5.6 (б)

2. Гамильтонова система уравнений

В работе [1] консервативная система уравнений (2), эквивалентная консервативному обобщенному уравнению Матье, добавлением в четвертое уравнение слагаемого – $x^2/2$ была сведена к гамильтоновой системе уравнений с двумя степенями свободы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3,$$
$$\dot{z} = r, \qquad \dot{r} = -z - \frac{x^2}{2} \qquad (4)$$

с гамильтонианом $H(x,y,z,r) = (\delta x^2 + y^2 + z^2 + r^2)/2 + x^2 z/2 + x^4/4 = \varepsilon$,

Расширенной диссипативной системой уравнений для системы (4) является система:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(\delta + z)x - x^3 - \mu y, \ \ \dot{z} = r,$$
$$\dot{r} = -z - \frac{x^2}{2} + (\varepsilon - H(x,y,z,r))r\,. \quad (5)$$

В работе [1] автором подробно рассмотрен случай перехода к хаосу в диссипативной системе (5) при μ → 0 и δ = 1. При этом значении δ и при любом ε > 0 гамильтонова система (4) имеет неустойчивый гиперболический цикл: x = y = 0. При малых значениях ε > 0 система (4) имеет также два эллиптических цикла, порожденных гиперболическим циклом x = y = 0 в результате бифуркации типа вилки, и один эллиптический цикл, лежащий в окрестности плоскости (x,y). В работе [4] гамильтонова система уравнений (4) была названа системой уравнений Матье-Магницкого и изучалась методом, предложенным автором в работе [1] и заключающемся в численном нахождении каскадов бифуркаций решений диссипативной расширенной системы уравнений (5) при стремлении значений параметра бифуркации μ к нулю. Этим методом были найдены бифуркации удвоения периодов эллиптических циклов гамильтоновой системы (4), порожденных гиперболическим циклом x = y = 0, происходящие при ε ≈ 1.25. Однако при значениях параметра ε ≈ 1.47 происходит обратная бифуркация вырождения цикла удвоенного периода в цикл периода один. Покажем, что существует область значений параметра ε, в которой в системе (4) происходят бифуркации рождения не только цикла периода два, но также и циклов периодов четыре и восемь из каскада бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума. На рис.4 изображены проекции на плоскость (*x,r*) циклов периодов 1 и 2 из каскада бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума для гамильтоновой системы (4) при δ = 1, ε = 3.21 (а) и ε = 3.468 (б). Начальные условия для численного нахождения циклов имеют следующие значения: x = - 1.227165, y = 0.03197, z = - 1.185424, r > 0; и x = - 1.195985, y = 0.188115, z = - 2.83582, r < 0.

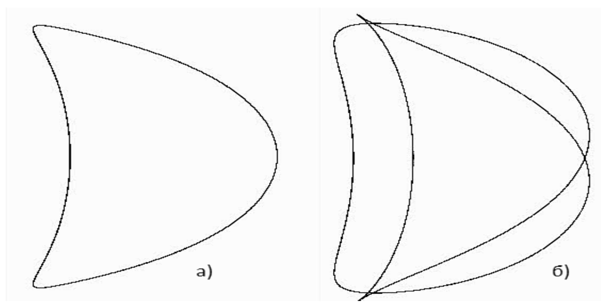

Рис.4. Проекции циклов периодов 1 и 2 гамильтоновой системы (4) на плоскость (x,r) при δ = 1, ε = 3.21 (а) и ε = 3.468 (б)

На рис.5 изображены проекции на плоскость (*x,r*) циклов периодов 4 и 8 из каскада бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума для гамильтоновой системы (4) при δ = 1, ε = 3.666 (а) и ε = 3.48 (б). Начальные условия для численного нахождения циклов имеют следующие значения: $x = -1.015865$, $y = 1.066611$, $z = -0.640718$, $r > 0$ и $x = -1.137135$, $y = 0.124789$, $z = -0.513497$, $r > 0$.

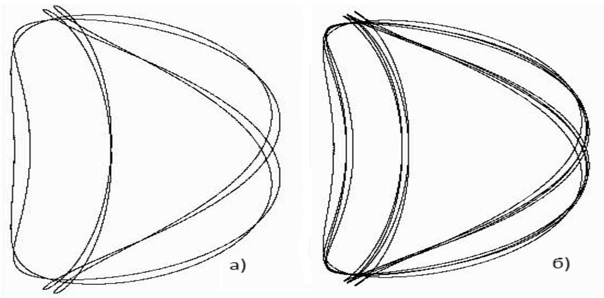

Рис.4. Проекции циклов периодов 4 и 8 гамильтоновой системы (4) на плоскость (x,r) при $\delta = 1$, $\varepsilon = 3.666$ (а) и $\varepsilon = 3.48$ (б)

Таким образом, численно установлено, что в просто консервативной системе (2) и в гамильтоновой системе (4) при изменении значений параметра ε реализуется не только начальная стадия каскада бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода эллиптических предельных циклов, но и заключительная стадия каскада Шарковского рождения эллиптического цикла периода три. То есть при непрерывном увеличении значений параметра ε в обеих системах происходит скачкообразный переход от области фазового пространства, заполненной двумерными торами вокруг эллиптического цикла к области фазового пространства, заполненной двумерными торами вокруг эллиптического цикла удвоенного периода и т.д. В каскадах бифуркаций эллиптических циклов в консервативных и гамильтоновых системах принимают участие только те устойчивые циклы субгармонического каскада Шарковского расширенных диссипативных систем, которые имеют наибольшие области устойчивости, не исчезающие вместе с циклами при стремлении параметра диссипации к нулю.

Заключение

В работе на примере проведенного численного анализа бифуркаций эллиптических циклов нелинейного консервативного обобщенного уравнения Матье и гамильтоновой системы уравнений Матье-Магницкого непосредственно продемонстрировано, что переход к хаосу в консервативных системах происходит в результате рождения новых сложных многооборотных торов вокруг эллиптических циклов, рождающихся в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, а не в результате разрушения некоторых мифических торов невозмущенных систем в соответствии с теорией Колмогорова-Арнольда-Мозера, как принято считать в современной гамильтоновой механике.

Литература

1. *Магницкий Н.А.* Новый подход к анализу гамильтоновых и консервативных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44. № 12. С. 1618-1627.
2. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд. 2011. 320 с.
3. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
4. *Королькова М.А.* Бифуркационная диаграмма гамильтоновой системы Матье-Магницкого // Труды ИСА РАН. 2012. Т. 62. № 1. С. 69-71.

Магницкий Николай Александрович. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор физико-математических наук, профессор. Количество печатных работ: более 250. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети. E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

Dynamic chaos in Hamiltonian and conservative systems*

N.A. Magnitskii[I,II]

[I] Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[II] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. Using the numerical analysis of the bifurcations of elliptic cycles of the conservative generalized Mathieu equation and the Hamiltonian system of equations generated by it, it is shown that the transition to chaos in conservative systems does not occur as a result of the destruction of some mythical tori of the unperturbed system in accordance with the Kolmogorov-Arnold-Moser theory, but as a result of the birth of new complex multi-turn tori around elliptic cycles, which are born in accordance with the incomplete Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii bifurcation scenario, which is characteristic for dissipative systems of differential equations.

Key words: conservative, Hamiltonian and dissipative systems, bifurcations, dynamical chaos, FShM theory.

DOI: 10.14357/20790279210201

References

1. Magnitskii N.A. Novyy podkhod k analizu gamil'tonovykh i konservativnykh sistem // Differentsial'nyye uravneniya. 20008. T.44. № 12. P. 1618-1627.
2. Magnitskii N.A. Teoriya dinamicheskogo khaosa. M.: Lenand, 2011. 320 p.
3. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
4. Korol'kova M.A. Bifurkatsionnaya diagramma gamil'tonovoy sistemy Mat'ye-Magnitskogo // Trudy ISA RAN. 2012. T. 62. № 1. P. 69-71.1.

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks. E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

* Research is partially supported by RFBR projects №18-029-10008mk and № 20-07-00066a.