

Построение функции полезности методом разделения переменных

А.Ф. МИРОНЫЧЕВ^{I,II}

^I Проект Школы математики университета РАЙС, Хьюстон, США

^{II} Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. В представленной работе исследуется проблема построения функции полезности для данной функции спроса Маршалла. Используется метод разделения переменных. Рассматриваются малоразмерные модели потребительского спроса с двумя и тремя товарами и ценами на них. Разделение переменных применяется как для функции полезности, так и для функции спроса. Оказывается, можно найти дифференциальное уравнение для специальной производящей функции, которая затем позволяет выписать выражение неявной функции полезности для данной функции спроса Маршалла при определенных начальных условиях. После этого также можно найти явную функцию полезности и функции спроса Хикса. В работе приводятся примеры применения такого подхода. Используется минимальный алгебраический формализм, чтобы материал мог быть доступен для учебных целей.

Ключевые слова: функция полезности, функция спроса, разделение переменных, производящая функция.

DOI: 10.14357/20790279220106

Введение

Полезность является центральным понятием теории потребительского спроса [1]. Она позволяет сделать численную оценку некоторому набору товаров или услуг потребителя и, следовательно, ранжировать такие наборы. Полезность является функцией от количеств потребляемых товаров или услуг:

$$U = u(x_1, x_2).$$

Здесь переменная U – полезность; x_1 и x_2 – количество товаров или услуг; $u(\cdot)$ – функция полезности. Переменные U , x_1 и x_2 являются неотрицательными действительными числами. Функция полезности $u(\cdot)$ обычно рассматривается как действительная, неотрицательная, гладкая, выпуклая функция, неубывающая по каждому аргументу. Другими словами – это непрерывная функция с неотрицательными первыми частными производными и неположительными вторыми частными производными по каждому аргументу.

Важной проблемой потребительского спроса является построение функции полезности для выбранного потребителя. Зачастую выбор функции

полезности происходит по усмотрению исследователя. В этом случае построение функции полезности означает оценку параметров такой функции на основе некоторых гипотез или статистических данных [2,3].

В данной работе описывается метод *построения* функции полезности для заданной функции спроса Маршалла [4], которая описывает предпочтения потребителя на основе цен и величины потребительского бюджета. Функция полезности, полученная таким образом, будет сопряженной с функцией спроса и, следовательно, более объективной для описания предпочтений потребителя.

1. Основные соотношения функций полезности и спроса

Прежде чем изложить метод получения функции полезности методом разделения переменных, отметим основные свойства функции полезности и спроса.

В теории потребительского спроса рассматривается задача максимизации функции полезности

сти при условии постоянства величины бюджета потребителя:

$$u(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

при ограничении

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0 = \text{const},$$

где $u(x_1, x_2)$ – функция полезности; x_1 и x_2 – величины товаров или услуг; p_1 и p_2 – цены на эти товары или услуги; y_0 – величина бюджета потребителя. Все эти переменные – неотрицательные действительные числа.

Решением такой задачи являются функции спроса Маршалла:

$$x_i^* = x_i^*(x_1, x_2, y_0), \quad i = 1, 2$$

и неявная функция полезности:

$$u^* = u^*(p_1, p_2, y_0),$$

которые зависят от цен и величины потребительского бюджета.

В теории полезности также рассматривается обратная задача минимизации бюджета y при заданной величине функции полезности u_0 и потребительских ценах p_1 и p_2 :

$$y = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 \rightarrow \min$$

при ограничении

$$u(h_1, h_2) = u_0.$$

Здесь h_1 и h_2 – это величины товаров или услуг, а переменная u_0 – величина полезности.

Решением такой задачи являются функции спроса Хикса:

$$h_i^* = h_i^*(p_1, p_2, u_0), \quad i = 1, 2,$$

и функция расходов:

$$y^* = y^*(p_1, p_2, u_0),$$

которая описывает величину бюджета, позволяющего приобрести набор товаров или услуг по имеющимся ценам и заданной величине полезности.

Производная функции расходов по ценам является функцией спроса Хикса (лемма Хотеллинга):

$$\frac{\partial y^*}{\partial p_i} = h_i^*(p_1, p_2, u_0) \quad (1)$$

Если $u_0 = u^*$ или $y_0 = y^*$, тогда функции спроса Маршалла и Хикса будут численно равными:

$$x_i^*(p_1, p_2, y_0) = h_i^*(p_1, p_2, u_0). \quad (2)$$

Вопрос данной работы состоит в следующем – возможно ли построить (восстановить) функцию полезности $u^* = u^*(p_1, p_2, y_0)$, если функция спроса Маршалла $x_i^* = x_i^*(x_1, x_2, y_0)$ задана? Ниже излагается метод, позволяющий положительно ответить на этот вопрос.

2. Разделение переменных для функции полезности

Основной идеей метода разделения переменных является предположение, что функции спроса Маршалла x_i^* и полезности u^* можно представить как произведение функций, зависящих только от цен (p_1, p_2) и от величины бюджета y :

$$x_i^* = f_i(p_1, p_2)y; \quad u^* = v(p_1, p_2) \cdot y^\alpha. \quad (3)$$

Функции $f_i(p_1, p_2)$, которые назовем функциями цен, являются некоторыми изначально заданными. Функция $v = v(p_1, p_2)$ – это некая неизвестная производящая функция для функции полезности. Параметр α может рассматриваться как эластичность полезности u по отношению к бюджету y .

Из уравнений (2) можно получить выражения для y и производящей функции v :

$$y = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{и} \quad v = \frac{u}{y^\alpha}. \quad (4)$$

Поскольку частные производные функции расходов $y^*(\cdot)$ являются функциями спроса Хикса h_i^* , как в уравнении (1), то можно получить следующее выражение для функции спроса Хикса:

$$h_i^* = \frac{\partial y}{\partial p_i} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{v}, \quad i=1, 2. \quad (5)$$

После подстановки (3), (4), и (5) в (2) следует следующее уравнение:

$$f_i(p_1, p_2) \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = -\alpha \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_i}.$$

Из него получается уравнение в частных производных:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_i} = -\alpha \cdot f_i(p_1, p_2). \quad (6)$$

Так как мы имеем два товара, то будет иметь место система из двух уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_1} &= -\alpha \cdot f_1(p_1, p_2) \\ \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_2} &= -\alpha \cdot f_2(p_1, p_2) .\end{aligned}\quad (7)$$

Если условия интегрируемости [5,6] выполняются:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_2} = \frac{\partial f_2}{\partial p_1} ,$$

то система (7) может быть представлена, как полный дифференциал логарифма производящей функции v :

$$d\ln(v) = -\alpha [f_1 \cdot dp_1 + f_2 \cdot dp_2].$$

В этом случае решение получается интегрированием по некоторой траектории между точками $A(p_{10}, p_{20})$ и $B(p_1, p_2)$ – криволинейный интеграл второго рода. Такой интеграл не будет зависеть от пути интегрирования. Поэтому интегрирование можно осуществить по ортогональным линиям $A(p_{10}, p_{20})C(p_1, p_{20})$ и $C(p_1, p_{20})B(p_1, p_2)$ – рис. 1.

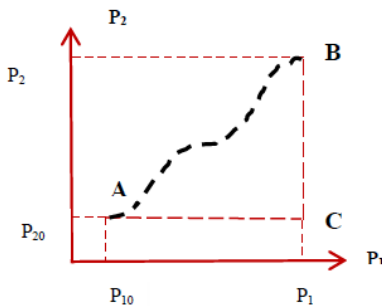


Рис. 1. Интегрирование порождающей функции между **A** и **B**. Интервал не зависит от пути интегрирования

В результате интегрирования будет получено следующее выражение:

$$\begin{aligned}\ln \frac{v}{v_0} &= -\alpha \left[(AB) \int_A^B f_1 dp_1 + f_2 dp_2 \right] = \\ &= -\alpha \left[\int_A^C f_1 dp_1 + \int_C^B f_2 dp_2 \right].\end{aligned}$$

Производящая функция получается после потенцирования:

$$v = v_0 \cdot \exp \left[-\alpha \left(\int_A^C f_1 dp_1 + \int_C^B f_2 dp_2 \right) \right]. \quad (8)$$

Начальное условие v_0 может быть взято из мультипликативной формы для функции расходов из (4):

$$v_0 = \frac{u_0}{y_0^\alpha} \quad (9)$$

Здесь y_0 и u_0 являются значениями бюджета и полезности при некоторых ценах p_{10} и p_{20} . Они считаются известными.

После подстановки (8) и (9) в (3) получается выражение для неявной функции полезности:

$$u^* = \frac{u_0}{y_0^\alpha} \cdot y^\alpha \cdot \exp \{ (-\alpha) \cdot [\int_A^C f_1 dp_1 + \int_C^B f_2 dp_2] \}.$$

Это выражение для неявной функции полезности позволяет затем найти явную функцию полезности $u = u(x_1, x_2)$ и функции спроса Хикса $h_i^* = h_i^*(p_1, p_2, u_0)$.

Необходимо отметить, что в случае двух товаров достаточно знать лишь одну функцию спроса Маршалла, например первую:

$$x_1^* = f_1(p_1, p_2) \cdot y_0.$$

Вторая функция получается из балансового соотношения:

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0.$$

Другими словами, вторая функция спроса получается через первую:

$$x_2 = \frac{1}{p_2} (y_0 - p_1 \cdot x_1).$$

Такое балансовое соотношение может быть применимо и для случая с более, чем двумя товарами. Это позволяет снизить число начальных заданных функций спроса Маршалла.

3. Применение метода разделения переменных

Рассмотрим несколько примеров применения метода разделения переменных для некоторых функций спроса Маршалла и различных значений эластичности.

Пример А. Рассмотрим функцию Маршалла $x_1 = \frac{y_0}{2p_1}$. Будем искать функцию полезности в мультипликативном виде с разделяющимися переменными $u = v(p_1, p_2) \cdot y^\alpha$ при следующих начальных условиях. Величина бюджета потребителя $y_0 = 100$, начальные цены товаров или услуг суть $p_{10} = 2$ и $p_{20} = 4$ и соответствующее значение полезности $u_0 = \frac{25\sqrt{2}}{2}$. Значение

эластичности полезности по бюджету примем равным единице $\alpha = 1$. Шаги решения будут следующими.

1. Вторая функция спроса получается из балансового соотношения:

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0,$$

которое дает выражение $x_2 = \frac{y_0}{2p_2}$.

2. Выражения для функций цен f_1 и f_2 :

$$f_1 = \frac{1}{2p_1} \text{ и } f_2 = \frac{1}{2p_2}.$$

Ясно, что условия интегрируемости выполняются:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_2} = \frac{\partial f_2}{\partial p_1} = 0.$$

3. Уравнение для дифференциала логарифма производящей функции будет следующим:

$$d \ln v = -[f_1 \cdot dp_1 + f_2 \cdot dp_2] = -\left[\frac{dp_1}{2p_1} + \frac{dp_2}{2p_2}\right].$$

4. Интегрирование между точками A и B вдоль ортогональных траекторий AC и CB дает:

$$\ln \frac{v}{v_0} = -(AB) \int \frac{dp_1}{2p_1} + \frac{dp_2}{2p_2} = -\left[(AC) \int_{(p_{10}, p_{20})}^{(p_1, p_2)} \frac{dp_1}{2p_1} + (CB) \int_{(p_1, p_2)}^{(p_{10}, p_{20})} \frac{dp_2}{2p_2}\right].$$

Отсюда следует:

$$\ln \frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{p_{10} \cdot p_{20}}{p_1 \cdot p_2} \right) \text{ или } v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{p_{10} \cdot p_{20}}{p_1 \cdot p_2}}.$$

Поскольку $v_0 = \frac{y_0}{y_0}$, то окончательное выражение для производящей функции будет:

$$v = \frac{25\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{p_1 \cdot p_2}} = \frac{1}{2\sqrt{p_1 \cdot p_2}}.$$

5. Теперь можно получить неявную функцию полезности в виде:

$$u^* = v(p_1 \cdot p_2) \cdot y = \frac{y}{2\sqrt{p_1 \cdot p_2}} \text{ или } u^* = \frac{y}{2\sqrt{p_1 \cdot p_2}}.$$

6. После подстановки в функцию полезности u^* выражений цен из функций Маршалла:

$$p_1 = \frac{y_0}{2x_1} \text{ и } p_2 = \frac{y_0}{2x_2}.$$

Получается явная функция полезности:

$$u = \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Это решение для функции полезности соответствует решению прямой задачи оптимизации Примера 1 из Приложения I.

Пример В. Теперь рассмотрим, как и в предыдущем Примере А, функцию спроса Маршалла $x_1 = \frac{y_0}{2p_1}$. Будем искать функцию полезности в прежнем¹ виде $u = v(p_1, p_2) \cdot y^\alpha$. Но возьмем значение эластичности равным двум, $\alpha = 2$, а

начальное значение полезности $u_0 = \frac{25^2}{2}$ при прежней величине бюджета $y_0 = 100$ и цен товаров $p_{10} = 2$ и $p_{20} = 4$.

Решение будет следующим. Первые три шага решения останутся прежними. Продолжим с четвертого шага.

1. Поскольку условия интегрируемости выполняются и эластичность α равна двум, то уравнение для производящей функции будет:

$$d \ln v = -2[f_1 \cdot dp_1 + f_2 \cdot dp_2] = -\left[\frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2}\right].$$

2. Интегрирование между точками A и B вдоль ортогональных отрезков AC и CB дает:

$$\ln \frac{v}{v_0} = (AB) \int \frac{dp_1}{p_1} + \frac{dp_2}{p_2} = -(AC) \int_{(p_{10}, p_{20})}^{(p_1, p_2)} \frac{dp_1}{p_1} - (CB) \int_{(p_1, p_2)}^{(p_{10}, p_{20})} \frac{dp_2}{p_2}.$$

Отсюда получается производящая функция:

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\ln \left(\frac{p_1 \cdot p_2}{p_{10} \cdot p_{20}} \right) = \ln \left(\frac{p_{10} \cdot p_{20}}{p_1 \cdot p_2} \right) \text{ или } v = v_0 \cdot \frac{p_{10} \cdot p_{20}}{p_1 \cdot p_2}.$$

Поскольку $v_0 = \frac{u_0}{y_0^2}$, то окончательное выражение для производящей функции будет:

$$v = \frac{25^2 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 100^2} = \frac{1}{4p_1 \cdot p_2}.$$

3. Теперь можно найти неявную функцию полезности:

$$u^* = v(p_1 \cdot p_2) \cdot y^2 = \frac{y^2}{4p_1 \cdot p_2} \text{ или } u^* = \frac{y^2}{4p_1 \cdot p_2}.$$

4. После подстановки сюда выражений для цен из функций спроса:

$$p_1 = \frac{y_0}{2x_1} \text{ и } p_2 = \frac{y_0}{2x_2}.$$

Получаем выражение для явной функции спроса

$$u = x_1 \cdot x_2.$$

Это выражение то же самое как и в Примере 2 из Приложения I.

Пример С. Рассмотрим функцию спроса Маршалла следующего вида:

$$x_1^* = \frac{p_2 \cdot y}{p_1(p_1 + p_2)}$$

и при начальных условиях: величина бюджета потребителя $y_0 = 100$, значение полезности $u_0 = 5\sqrt{3}$ и начальные цены $p_{10} = 2$ и $p_{20} = 4$. Возьмем эластичность полезности равную одной второй $\alpha = \frac{1}{2}$. Чтобы найти функцию полезности, будем следовать прежнему методу.

1. Вторая функция спроса получается из балансового соотношения:

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0,$$

которое дает:

$$x_2 = \frac{p_1 \cdot y}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

2. Выражения для производящих функций f_1 и f_2 будут:

$$f_1 = \frac{p_2}{p_1(p_1 + p_2)} \text{ и } f_2 = \frac{p_1}{p_2(p_1 + p_2)}.$$

Легко видеть, что условия интегрируемости выполняются:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_2} = \frac{\partial f_2}{\partial p_1} = \frac{1}{(p_1 + p_2)^2}.$$

3. Уравнение для полного дифференциала будет:

$$\begin{aligned} d(\ln v) &= -\frac{1}{2} [f_1 \cdot dp_1 + f_2 \cdot dp_2] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{p_2 \cdot dp_1}{p_1(p_1 + p_2)} + \frac{p_1 \cdot dp_2}{p_2(p_1 + p_2)} \right]. \end{aligned}$$

4. Интегрирование между точками A и B вдоль ортогональных сегментов:

$$\begin{aligned} \ln \frac{v}{v_0} &= -\frac{1}{2} (AB) \int \frac{p_2 \cdot dp_1}{p_1(p_1 + p_2)} + \frac{p_1 \cdot dp_2}{p_2(p_1 + p_2)} = \\ &= -\frac{1}{2} \left[(AC) \int \frac{p_2 \cdot dp_1}{p_1(p_1 + p_2)} + (CB) \int \frac{p_1 \cdot dp_2}{p_2(p_1 + p_2)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_{(p_{10}, p_{20})}^{(p_1, p_2)} \frac{p_2 \cdot dp_1}{p_1(p_1 + p_2)} + \int_{(p_1, p_{20})}^{(p_1, p_2)} \frac{p_1 \cdot dp_2}{p_2(p_1 + p_2)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln \frac{p_1}{p_1 + p_2} \Big|_{(p_{10}, p_{20})}^{(p_1, p_2)} + \ln \frac{p_2}{p_1 + p_2} \Big|_{(p_1, p_{20})}^{(p_1, p_2)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{p_1 p_2 (p_{10} + p_{20})}{(p_1 + p_2) p_{10} p_{20}}. \end{aligned}$$

После экспоненцирования получается выражение для производящей функции:

$$v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{(p_1 + p_2) p_{10} p_{20}}{p_1 p_2 (p_{10} + p_{20})}}.$$

Принимая во внимание, что $v_0 = \frac{u_0}{y^\alpha}$, подстановка начальных значений в производящую функцию v дает окончательный вид производящей функции:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4 (p_1 + p_2)}{(2 + 4) p_1 p_2}} = \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}}.$$

Отсюда получается неявная функция полезности:

$$u^* = \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{y}.$$

Разрешим системы функций спроса Маршалла:

$$x_1^* = \frac{p_2 \cdot y}{p_1(p_1 + p_2)} \text{ и } x_2 = \frac{p_1 \cdot y}{p_2(p_1 + p_2)}$$

относительно цен p_1 и p_2 :

$$p_1 = \frac{y}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}, \quad p_2 = \frac{y}{\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}.$$

После их подстановки в неявную функцию полезности получается явная функция полезности:

$$u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

Это выражение совпадает с решением прямой задачи оптимизации Примера 3 из Приложения 1.

Заключение

Приведенные примеры показывают правоту и эффективность метода разделения переменных для нахождения функции полезности. Можно привести больше примеров с другими функциями спроса и разными значениями эластичности.

С математической точки зрения изложенный метод является обратным к задаче максимизации явной функции полезности при ограничениях – задачей условного экстремума.

Чтобы получить решение, функции спроса $x_i = f_i(p_1, p_2) y_0$ должны удовлетворять определенным условиям. Им следует быть монотонными, непрерывными, с положительными первыми и отрицательными вторыми частными производными. Имеют смысл только их положительные значения. Кроме этого необходимо, чтобы функции спроса удовлетворяли соотношению:

$$\left| \frac{p_i x_i}{y} \right| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Это условие означает, что стоимость приобретения любого товара не может превышать величины бюджета. Тем не менее, все эти условия не гарантируют, что математическое решение будет разумным с содержательной точки зрения.

Известно, что функции полезности определяются с точностью до монотонного преобразования и аддитивной постоянной. Смысл имеют только изменения значений функции полезности.

Монотонное преобразование функции полезности производит новую функцию, которую также можно считать функцией полезности. Введение эластичности полезности по бюджету α может рассматриваться, как одно из таких преобразований. Из этого следует, что для одной и той же функции спроса существуют разные функции полезности. Эти функции полезности отражают различные типы потребителя. Для этих потребителей увеличение бюджета имеет разную ценность, которую и описывает эта эластичность. Например, увеличение бюджета (дохода, зарплаты или пенсии) на одну и ту же величину может вызывать субъективно различные уровни удовлетворения потребителя. Если эластичность потребителя равна 1 ($\alpha = 1$), то увеличение дохода на 10% будет вызывать и удовлетворение от этого увеличения на 10%. Если эластичность потребителя равна 0.5 ($\alpha = 0.5$), то увеличение дохода на 10% вызовет увеличение удовлетворения лишь на 5% и т.д. Величину эластичности для разных групп потребителей можно получить различными статистическими методами или на основании специальных анкет [7].

В табл. 1 Приложения 2 приводятся результаты применения этого метода для некоторых функций спроса Маршалла с числом товаров, равным 2, и разными эластичностями. Там же приводятся соответствующие функции спроса Хикса и функции расходов.

Представляется, что метод разделения переменных может быть распространен на модели потребления с числом товаров больше, чем 2. В табл. 2 Приложения 2 приводятся результаты применения метода разделения переменных для некоторых функций спроса в моделях с тремя товарами.

* * *

Автор благодарен проф. Й. Груберу из университета г. Хаген, Германия (Fern Universitaet Hagen, Germany) и проф. А. Тангяну из университета Народной экономики, Германия (Institute fuer Volkswirtschaftstheorie, Germany) за поддержку интереса к теории функций спроса и функций полезности. Полезные советы и консультации были получены от проф. А. Сарычева из университета Флоренции, Италия (University of Florence, Italy). Также ценная помощь в подготовке рукописи была получена от м-ра Коллинза из Начального колледжа, г. Хьюстон, США (Challenge Early College, Houston). Финансовая помощь была оказана Национальным научным фондом США (National Science Foundation, USA) по гранту № 1556006. Все рассуждения, гипотезы и выводы, выраженные в настоящей статье, являются точкой зрения автора и не отражают позицию этого фонда.

Литература

1. *Varian H.* Microeconomic Analysis, Univ. of Michigan, NY. 1992.
2. *Afriat S.* "The Construction of Utility Functions From Expenditure Data", Int. Economic Review, 1967. 8. №1. P. 66-77.
3. *Eberhard A.* Construction of the Utility Function Using a Non-linear Best Fit Optimization, In Proceedings of the International Congress on Modelling and Simulation MODSIM07, Christchurch. 2007.
4. *Friedman M.* The Marshallian Demand Curves, The Journal of Political Economy. 1949. V. LVII, No.6.
5. *Hurwicz I., Uzawa H.* "On the Integrability of Demand Function", In Preferences, Utility, and Demand, ed. J. Chapman et al. New York: Harcourt, Brace. Jovanovich. 1971.
6. *Arrow K., Intriligator M.* Handbook of Mathematical Economics, Amsterdam: North/Holland. 1982.
7. *Tangian A., Gruber J. A.* Constructing and Applying Objective Functions, Berlin: Springer-Verlag. 2002. XII. 585 p.

Миронычев Александр Федорович. Проект Школы математики университета РАЙС (Rice University School Mathematics Project, RUSMP), Хьюстон, США. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Старший научный сотрудник. Кандидат физико-математических наук. Количество печатных работ: 35. Область научных интересов: математическая экономика, математические модели в экономике. E-mail: amironit@yahoo.com

Separation of variables for utility functions

F. Mironychev^{I,II}

^I School of Mathematics Project (RUSMP), Houston, Texas, TX

^{II} Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The current paper investigates the problem of construction of the utility function for a given demand function in small dimensional consumer models. The method of separation of variables is used for the utility function and for the demand function. It turns out it is possible to find a differential equation for the special generating function which allows to construct the indirect utility function for the given Marshallian demand function for the given initial conditions. Afterwards it is also possible to find the direct utility function and the Hicksian demand functions. Some examples demonstrate the application of this method. The mathematical model for only two consumer goods is considered. Author intentionally minimized the use of algebraic symbols and formalism to describe the matter of the article in order to make it usable as practice for college students.

Keywords: *utility function, generating function, mathematical model, separation of variables.*

DOI: 10.14357/20790279220106

References

1. *Varian H.* “Microeconomic Analysis”, Univ. of Michigan, NY, 1992.
2. *Afriat S.* “The Construction of Utility Functions From Expenditure Data”, *Int. Economic Review*, 1967, 8, №1, pp. 66-77.
3. *Eberhard A.* “Construction of the Utility Function Using a Non-linear Best Fit Optimization”, In *Proceedings of the International Congress on Modelling and Simulation MODSIM07*, Christchurch, 2007.
4. *Friedman M.* “The Marshallian Demand Curves”, *The Journal of Political Economy*, v. LVII, No.6, 1949.
5. *Hurwicz I., Uzawa H.* “On the Integrability of Demand Function”, In *Preferences, Utility, and Demand*, ed. J. Chapman et al. New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971.
6. *K. Arrow, M. Intriligator*, *Handbook of Mathematical Economics*, Amsterdam: North/Holland, 1982.
7. *Tangian A., Gruber J. A.* (eds). “Constructing and Applying Objective Functions”, Berlin: Springer-Verlag, 2002, xii, 585 pp.

Mironychev A.F. Ph.D. Rice School of Mathematics Project (RUSMP), Houston, Texas, TX. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: amironit@yahoo.com

Приложение 1

В этом разделе приводятся решения задачи оптимизации для функции полезности

$$u(x_1, x_2) \xrightarrow{(x_1, x_2)} \max$$

при ограничении $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0$ для разных функций полезности $u(x_1, x_2)$. Здесь x_1 и x_2 являются количествами товаров или услуг; p_1 и p_2 – цены на эти товары-услуги; y_0 – величина бюджета потребителя. Все эти величины являются неотрицательными действительными числами.

Пример 1. Функция полезности $u = \sqrt{x_1 \cdot x_2} \xrightarrow{(x_1, x_2)} \max$, ограничения $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0$.

1. Функция Лагранжа: $L = \sqrt{x_1 \cdot x_2} + \lambda(y_0 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2)$.

2. Условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \lambda p_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \lambda p_2 = 0.$$

3. Соотношения между переменными:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

4. Решение (функции спроса Маршалла):

$$x_1^* = \frac{y_0}{2p_1} \quad \text{и} \quad x_2^* = \frac{y_0}{2p_2}.$$

5. Неявная функция полезности:

$$u^* = \frac{y_0}{2 \cdot \sqrt{p_1 \cdot p_2}}.$$

6. Из этого выражения следует, что эластичность полезности данного потребителя по бюджету равна единице ($\alpha = 1$).

7. Функция расходов:

$$y^* = 2 \cdot \sqrt{p_1 \cdot p_2} \cdot u^*.$$

8. Функции спроса Хикса:

$$h_1^* = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \cdot u^* \quad \text{и} \quad h_2^* = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot u^*.$$

9. Численный пример: если $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $y_0 = 100$, то $x_1^* = h_1^* = 25$; $x_2^* = h_2^* = \frac{25}{2}$.

10. Величина полезности в точке экстремума: $u^* = \frac{25\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2. Функция полезности: $u = x_1 \cdot x_2 \xrightarrow{(x_1, x_2)} \max$. Ограничение: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0$

1. Функция Лагранжа:

$$L = x_1 \cdot x_2 + \lambda(y_0 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2).$$

2. Условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0.$$

3. Соотношения между переменными:

$$x_2 = \lambda p_1, \quad x_1 = \lambda p_2, \quad \lambda = \frac{y_0}{2p_1 p_2}.$$

4. Решение (функции спроса Маршалла):

$$x_1^* = \frac{y_0}{2p_1} \text{ и } x_2^* = \frac{y_0}{2p_2}$$

5. Неявная функция полезности:

$$u^* = \frac{y_0^2}{4p_1 p_2}.$$

6. Отсюда следует, что эластичность: $\alpha = 2$.

7. Функция расходов:

$$y^* = 2 \cdot \sqrt{p_1 \cdot p_2} \cdot \sqrt{u_0}.$$

8. Функции спроса Хикса:

$$h_1^* = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \sqrt{u_0} \text{ и } h_2^* = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \sqrt{u_0}.$$

9. Численный пример: если $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $y_0 = 100$, то $x_1^* = h_1^* = 25$; $x_2^* = h_2^* = \frac{25}{2} = 12.5$.

10. Значение полезности в точке экстремума:

$$u^* = \frac{25^2}{2}.$$

Пример 3. Функция полезности: $u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$. Ограничение: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = y_0$.

1. Функция Лагранжа:

$$L = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \lambda(y_0 - p_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot x_2).$$

2. Условия экстремума первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0.$$

3. Соотношения между переменными:

$$\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{или} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1^2}{p_2^2}.$$

4. Решение (функции спроса Маршалла):

$$x_1^* = \frac{p_2 \cdot y_0}{p_1 \cdot (p_1 + p_2)} \quad \text{и} \quad x_2^* = \frac{p_1 \cdot y_0}{p_2 \cdot (p_1 + p_2)}.$$

5. Неявная функция полезности:

$$u^* = \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{p_1 \cdot p_2}} \cdot \sqrt{y_0}.$$

6. Отсюда следует, что эластичность, $\alpha = \frac{1}{2}$.

7. Функция расходов:

$$y^* = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 + p_2} \cdot u_0^2.$$

8. Функции спроса Хикса:

$$h_1^* = \frac{p_2^2 \cdot u_0^2}{(p_1 + p_2)^2} \quad \text{и} \quad h_2^* = \frac{p_1^2 \cdot u_0^2}{(p_1 + p_2)^2}.$$

9. Численный пример: если $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $y_0 = 100$, тогда $x_1^* = h_1^* = \frac{100}{3}$; $x_2^* = h_2^* = \frac{25}{3}$.

10. Значение полезности в точке экстремума $u^* = 5\sqrt{3}$.

Приложение 2

Табл. 1

Функции спроса и полезности при различных эластичностях для двух товаров, $n = 2$

Эластичность	Функция полезности	Функции спроса Маршалла	Неявная функция полезности	Функция расходов	Функции спроса Хикса
α	$u = \frac{u_0}{y_0^\alpha} (2 \cdot \sqrt{p_1 p_2})^\alpha x_1 x_2$ или $u = C (\sqrt{x_1 x_2})^\alpha$, $C = \frac{u_0}{y_0^\alpha} (2 \cdot \sqrt{p_1 p_2})^\alpha$	$x_1 = \frac{y}{2p_1}$ $x_2 = \frac{y}{2p_2}$	$u = \frac{u_0}{y_0^\alpha} \left(\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_1 p_2}} \right)^\alpha y^\alpha$ или $u = A \left(\frac{y}{\sqrt{p_1 p_2}} \right)^\alpha$	$y = B (\sqrt{p_1 p_2})^{\frac{1}{\alpha}}$ $B = \frac{1}{A}$	$h_1 = \frac{B}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $h_2 = \frac{B}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{p_1 p_2}{p_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$
$\alpha = 1$	$u = \sqrt{x_1 x_2}$		$u = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{p_1 p_2}}$	$y = 2 \cdot \sqrt{p_1 p_2} \cdot u$	$h_1 = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \cdot u$ $h_2 = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot u$
$\alpha = 2$	$u = x_1 x_2$		$u = \frac{y^2}{4p_1 p_2}$	$y = 2 \cdot \sqrt{p_1 p_2} u$	$h_1 = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \sqrt{u}$ $h_2 = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \sqrt{u}$

Табл. 1 (продолжение)

Функции спроса и функции полезности для двух товаров, n = 2

Эластичность	Функция полезности	Функции спроса Маршалла	Неявная функция полезности	Функция расходов	Функции спроса Хикса
α	$u = (\sqrt[\alpha]{x_1} + \sqrt[\alpha]{x_2})^{2\alpha}$	$x_1 = \frac{p_2 \cdot y}{p_1(p_1 + p_2)}$ $x_2 = \frac{p_1 \cdot y}{p_1(p_1 + p_2)}$	$u = \frac{u_0}{y_0^\alpha} \left(\frac{p_{10} + p_{20}}{p_{10} p_{20}} \cdot \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \right)^\alpha \cdot y^\alpha$ или $u = A \left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \right)^\alpha \cdot y^\alpha$	$y = B \cdot \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \cdot u^{\frac{1}{2\alpha}}$	$h_1 = \frac{p_2^2 u^{\frac{1}{2\alpha}}}{(p_1 + p_2)^2}$ $h_2 = \frac{p_1^2 u^{\frac{1}{2\alpha}}}{(p_1 + p_2)^2}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$u = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$		$u = \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{y}$	$y = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \cdot u^2$	$h_1 = \frac{p_2^2 u^2}{(p_1 + p_2)^2}$ $h_2 = \frac{p_1^2 u^2}{(p_1 + p_2)^2}$
$\alpha = 1$	$u = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$		$u = \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \cdot y$	$y = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} \cdot u$	$h_1 = \frac{p_2^2 u}{(p_1 + p_2)^2}$ $h_2 = \frac{p_1^2 u}{(p_1 + p_2)^2}$
α	$u = \left[\sqrt[\alpha]{x_1} + \sqrt[\alpha]{x_2} \right]^{3\alpha}$	$x_1 = \frac{\sqrt{p_2} \cdot y}{p_1(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}$ $x_2 = \frac{\sqrt{p_1} \cdot y}{p_2(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})}$	$u = A \left[\frac{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1 \cdot p_2}} \right]^{2\alpha} y^\alpha$ $A = \frac{u_0}{y_0^\alpha} \left[\frac{\sqrt{p_{10} \cdot p_{20}}}{\sqrt{p_{10}} + \sqrt{p_{20}}} \right]^{2\alpha}$	$y = \frac{p_1 p_2 u^{\frac{1}{3\alpha}}}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}$	$h_1 = \frac{p_2^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{3\alpha}}}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$ $h_2 = \frac{p_1^{\frac{3}{2}} u^{\frac{1}{3\alpha}}}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$
$\alpha = 1$	$u = \left[\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \right]^3$		$u = \frac{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}{p_1 \cdot p_2} y$	$y = \frac{p_1 p_2 u}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}$	$h_1 = \frac{p_2^2 u}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$ $h_2 = \frac{p_1^2 u}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$u = \left[\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \right]^{\frac{3}{2}}$		$u = \frac{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1 p_2}} \sqrt{y}$	$y = \frac{p_1 p_2 u^2}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^2}$	$h_1 = \frac{p_2^2 u^2}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$ $h_2 = \frac{p_1^2 u^2}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})^3}$

Приложение 2

Табл. 2

Примеры функций спроса и функций полезности при различных эластичностях для трех товаров, $n = 3$

Эластичность	Функция полезности (явная)	Функции спроса Маршалла	Неявная функция полезности	Функция затрат	Функции спроса Хикса
α	$u = \left(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \right)^\alpha$	$x_1 = \frac{y}{3p_1}$ $x_2 = \frac{y}{3p_2}$ $x_3 = \frac{y}{3p_3}$	$u = A \left(\frac{y}{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}} \right)^\alpha$ $A = \frac{u_0}{y_0^\alpha} (p_{10} p_{20} p_{30})^{\frac{\alpha}{3}}$	$y = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}}}{A}$	$h_1 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}}}{3Ap_1}$ $h_2 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}}}{3Ap_2}$ $h_3 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} \cdot u^{\frac{1}{\alpha}}}{3Ap_3}$
$\alpha = 1$	$u = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$		$u = \frac{y}{3 \cdot \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}}$	$y = 3 \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} \cdot u$	$h_1 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}}{p_1} u$ $h_2 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}}{p_2} u$ $h_3 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}}{p_3} u$
$\alpha = \frac{3}{2}$	$u = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$		$u = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{p_1 p_2 p_3}}$	$y = \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} u^2$	$h_1 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} u^2}{p_1}$ $h_2 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} u^2}{p_2}$ $h_3 = \frac{\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3} u^2}{p_3}$