Управление устойчивым развитием

Системный подход в оценке динамических состояний технических объектов на основе методов структурного математического моделирования

А.В. Елисеев[I,II], Н.К. Кузнецов[II], А.С. Миронов[I]

[I] Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия
[II] Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия

Аннотация. Рассматриваются приложения системного анализа к решению задач оценки, контроля и формирования динамических состояний технических объектов, находящихся под вибрационным нагружением силовой или кинематической природы с учетом связности. В рамках методов структурного математического моделирования механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Разработана методология моделирования на основе расчетных схем в виде механических колебательных систем с одной степенью свободы, рассматриваемых в качестве обобщенных схем приведения. Предложена интерпретация совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов с помощью ориентированных графов.

Ключевые слова: *методы структурного математического моделирования, механические колебательные системы, связные внешние возмущения, динамические состояния, формы динамических взаимодействий, граф динамических состояний, граф динамических форм взаимодействий.*

DOI: 10.14357/20790279220109

Введение

Проблема безопасности транспортного комплекса предполагает учет динамических характеристик технических объектов, принимая во внимание растущие требования к пропускной способности инфраструктурных объектов [1–3]. В качестве технических объектов, работающих в условиях высоких динамических нагрузок, могут быть рассмотрены подвижной состав железнодорожного или автомобильного транспорта, вибрационные технологические машины, применяемые в строительстве, машиностроении и других отраслях промышленности [4-6].

Проявления динамических состояний в формировании специальных эффектов, определяющих результативность производственных и транспортировочных процессов, предопределяют интерес к разработке методологии и аналитического инструментария в рамках системного подхода [7].

Требование к динамическому качеству технологических и транспортировочных процессов инициирует развитие научно-методологического базиса современной динамики машин на основе использования методов системного анализа, аналитического аппарата теории систем, теории автоматического управления, в основе которых лежат представления о состояниях технических объектов.

Особое значение в формировании динамических состояний имеет понятие связи между движениями, в общем случае имеющей неудерживающий характер. Учет связей, отображающих особенности динамических взаимодействий, позволяет реализовать возможности настройки вибрационных полей рабочих органов технологических машин.

Во многих случаях существенные особенности динамических взаимодействий элементов технических объектов транспортного и технологического назначения могут быть отображены механическими колебательными системами, реализующими поступательные или вращательные формы движений. На начальных этапах исследований рассматриваются механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами, совершающие малые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия. Возможность исключения координат позволяет рассматривать систему с одной степенью свободы как обобщенную расчетную схему технического объекта для исследования динамических взаимодействий элементов на основе обобщенных представлений о формах движений и динамических состояниях в виде резонанса и динамического гашения колебаний.

Для оценки динамических состояний технических объектов известен ряд подходов к формированию методологического базиса, использующих понятия об обратных связях, передаточных функциях, парциальных системах, частотных энергетических функциях, функциях демпфирования и др.

Можно предположить, что расширение методологического базиса в рамках методов структурного математического моделирования происходит на основе развития понятий о дополнительных связях, реализуемых за счет введения в структуру устройств для преобразования движений, представленных зубчатыми, рычажными или несамотормозящимися винтовыми механизмами.

Внимание к дополнительным связям определено потенциальными возможностями проявления новых эффектов на основе управления динамическими состояниями и формами динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем.

Вместе с тем, существующий методологический базис требует детализации представлений о совокупности взаимосвязей между динамическими состояниями и формами динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под действием внешних возмущений.

Предлагаемая статья посвящена развитию методов структурного математического моделирования в рамках системного подхода к разработке методологического базиса для решения задач оценки, контроля и формирования динамических состояний механической колебательной системы с одной степенью свободы, рассматриваемой в качестве обобщенной схемы приведения для систем с несколькими степенями свободы, на основе учета динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов системы, как факторов самоорганизации движений системы, находящейся под воздействием внешних возмущений кинематической или силовой природы.

1. Основные положения

Рассматривается механическая колебательная система с одной степенью свободы, находящаяся под воздействием нагрузок силовой и кинематической природы с учетом связности в виде функциональной зависимости (рис.1). Механическая колебательная система образована массоинерционным элементом с массой m_1, соединенным с опорными поверхностями *I* и *II* посредством упругих элементов с жесткостями k_1 и k_2, а так же с помощью устройств для преобразования движений с массоинерционными коэффициентами L_1 и L_2, рассматриваемыми в качестве настроечных параметров. Опорные поверхности *I* и *II* представляют собой внешние кинематические возмущения z_1, z_2, наравне с которыми, к массоинерционному элементу m_1 приложено силовое возмущение Q_1.

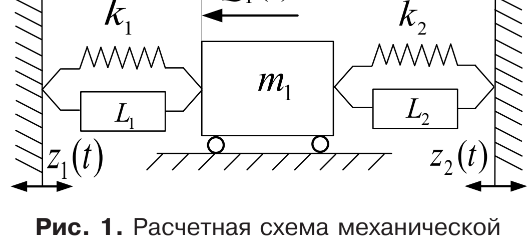

Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы с одной степенью свободы

Предполагается, что кинематические возмущения z_1, z_2 и силовое воздействие Q_1 представляют собой синфазные гармонические колебания с частотой ω. В неподвижной системе координат положение элемента с массой m_1 отображается величиной y_1, равной смещению элемента m_1 относительно положения статического равновесия. Предполагается, что система совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положения статического равновесия с учетом нулевых начальных условий.

Совокупность внешних воздействий силовой и кинематической природы фиксированных частот определяет разнообразие динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов механической колебательной системы в отображении упругих и массоинерционных свойств на основе передаточных отношений в виде дроби. В знаменателе дроби указана амплитуда колебаний внешних возмущений, рассматриваемых в качестве входных воздействий, а в числителе амплитуда установившихся колебаний массинерционного элемента, рассматриваемых в качестве выходных движений. Учет связности внешних кинематических возмущений предполагает возможности проявления новых динамических эффектов в виде специфических динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов механической колебательной системы.

Задача заключается в разработке методов детализации представлений о возможностях оценки, контроля и формирования динамических состояний и динамических форм вынужденных взаимодействий элементов механических колебательных систем с одной степенью свободы, находящихся под воздействием силовых или связных возмущений кинематической природы.

2. Структурная математическая модель

В общем случае на основе расчетной схемы (рис.1) механической колебательной системы может быть составлена математическая модель в виде дифференциальных уравнений, построенных на основе формализма уравнений Лагранжа 2-го рода, использующих выражения кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} L_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_1)^2 + \frac{1}{2} L_1 (\dot{y}_1 - \dot{z}_2)^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_1 - z_2)^2. \quad (2)$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода для одной обобщенной координаты имеет вид дифференциального уравнения вынужденных движений с нулевыми начальными условиями:

$$(m_1 + L_1 + L_2)\ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 = \\ = Q_1 + k_1 z_1 + L_1 \ddot{z}_1 + k_2 z_2 + L_2 \ddot{z}_2 . \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) приводится к алгебраическому уравнению с помощью интегрального преобразования Лапласа:

$$(m_1 + L_1 + L_2) p^2 \bar{y}_1 + (k_1 + k_2)\bar{y}_1 = \\ = \overline{Q}_1 + k_1 \bar{z}_1 + L_1 p^2 \bar{z}_1 + k_2 \bar{z}_2 + L_2 \bar{z}_2 p^2 , \quad (4)$$

где $p=j\omega$ - комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$, значок «-» над функцией означает изображение Лапласа.

В рамках структурного подхода на основе уравнения (4) механической колебательной системе сопоставляется структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления.

Особенности учета характера внешних воздействий и выбор объекта, динамическое состояние которого оценивается, определяют вариант цепи обратной отрицательной связи и, в целом, структурную схему.

На рис.2 представлены различные варианты структурных схем, соответствующих приложению силового воздействия к массоинерционному элементу m_1(рис. 2,а), кинематическому возмущению со стороны опорных поверхностей I(рис. 2,б), II (рис. 2,в) и связанных через коэффициент γ одновременно действующих кинематических возмущений $\bar{z}_2=\gamma\bar{z}_1$ (рис. 2,г).

На основе структурных схем сроятся передаточные функции системы:

$$\overline{Q}_1 \neq 0, \quad W_Q(p) = \left.\frac{\bar{y}_1}{\overline{Q}_1}\right|_{\substack{z_1=0\\ z_2=0}} = \frac{1}{(m_1 + L_1 + L_2) p^2 + k_1 + k_2}, \quad (5)$$

$$\bar{z}_1 \neq 0, \quad W_{z_1}(p) = \left.\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1}\right|_{\substack{Q_1=0\\ z_2=0}} = \frac{L_1 p^2 + k_1}{(m_1 + L_1 + L_2) p^2 + k_1 + k_2}, \quad (6)$$

$$\bar{z}_2 \neq 0, \quad W_{z_2}(p) = \left.\frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_2}\right|_{\substack{Q_1=0\\ z_1=0}} = \frac{L_2 p^2 + k_2}{(m_1 + L_1 + L_2) p^2 + k_1 + k_2}. \quad (7)$$

Физический смысл передаточной функции $W_{Q1}(p)$ (5) заключается в отображении с помощью отношения $\bar{y}_1/\overline{Q}_1$ динамической податливости, зависящей от чистоты внешнего возмущения. Передаточные функции $W_{z1}(p)$, $W_{z2}(p)$ (6),(7) отображают свойства механической колебательной системы в рамках представлений о рычажных связях между амплитудами входного кинематического возмущения и выходного колебания.

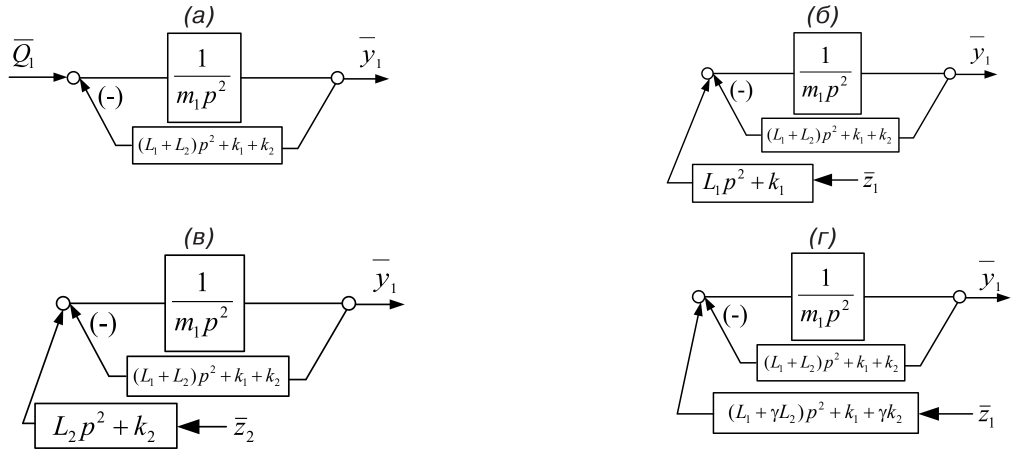

Рис.2. Структурные схемы механической колебательной системы с одной степенью свободы для различных вариантов внешних возмущений: (а) $\overline{Q}_1$ – внешнее силовое воздействие; (б) $\overline{z}_1$ – внешнее кинематическое возмущение; (в) $\overline{z}_2$ – внешнее кинематическое возмущение; (г) $\overline{z}_1$ – внешнее возмущение с учетом коэффициента связности γ

Вместе с тем, интерес представляют варианты внешних возмущений, учитывающих характер взаимного движения опорных поверхностей, определяющих кинематическое воздействие на объект.

В случае кинематических воздействий $\overline{z}_1$, $\overline{z}_2$, на которые наложены условия связности $\overline{z}_2=\gamma\ \overline{z}_1$, уравнение (4) в изображениях Лапласа принимает вид:

$$(m_1 + L_1 + L_2)p^2\overline{y}_1 + (k_1 + k_2)\overline{y}_1 =$$
$$= k_1\overline{z}_1 + L_1p^2\overline{z}_1 + k_2\gamma\overline{z}_1 + L_2\gamma p^2\overline{z}_1, \qquad (8)$$

где γ – коэффициент связности.

На основе представленного уравнения (8) строится семейство структурных схем, эквивалентных в динамическом отношении, систем автоматического управления, зависящее от коэффициента связности γ.

Для фиксированного параметра γ на основе структурной схемы (рис. 2,г) может быть определено передаточное отношение:

$$W_\gamma(p) = \left.\frac{\overline{y}_1}{\overline{z}_1}\right|_{\substack{Q_1=0 \\ z_2=\gamma z_1}} = \frac{L_1p^2 + k_1 + \gamma(L_2p^2 + k_2)}{(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + k_1 + k_2}. \quad (9)$$

Представленное отношение $\overline{y}_1/\overline{z}_1(\gamma)$ отображает варианты динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы, включая характерные динамические состояния. В частности, к характерным состояниям можно отнести динамическое гашение колебаний, резонанс и состояние покоя.

3. Динамические состояния механической колебательной системы с одной степенью свободы

Особенности динамических состояний механических колебательных систем отображаются соответствующими амплитудно-частотными характеристиками (рис.3,а-в) передаточных функций (5)-(7) и передаточного отношения (8) с учетом связности внешних кинематических возмущений.

Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3,а) передаточной функции системы $\overline{y}_1/\overline{Q}_1$ (5) отображает податливость, представляющую в физическом смысле величину, обратную к динамической, т.е. зависящей от частоты, жесткости системы. На частоте собственных колебаний реализуется резонанс, интерпретируемый как состояние системы с нулевой жесткостью или бесконечной податливостью.

Амплитудно-частотные характеристики (рис. 3,б-в) передаточных функций $\overline{y}_1/\overline{z}_1$ (6), $\overline{y}_1/\overline{z}_2$ (7) отображают рычажные свойства между амплитудами внешних кинематических воздействий, рассматриваемых как входные возмущения, и амплитудами колебаний массоинерционного элемента m_1, рассматриваемыми как выводные движения.

Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций $\overline{y}_1/\overline{z}_1$, $\overline{y}_1/\overline{z}_2$, $\overline{y}_1/\overline{Q}_1$ (5)-(7) отражают принципиальное отличие механических колебательных систем с кинематическим возмущением от системы с силовым возмущением, заключающееся в возможности реализации динамического гашения колебаний на частотах:

$$\omega_{\mathrm{dyn1}} = \sqrt{k_1/L_1}\,, \qquad (10)$$

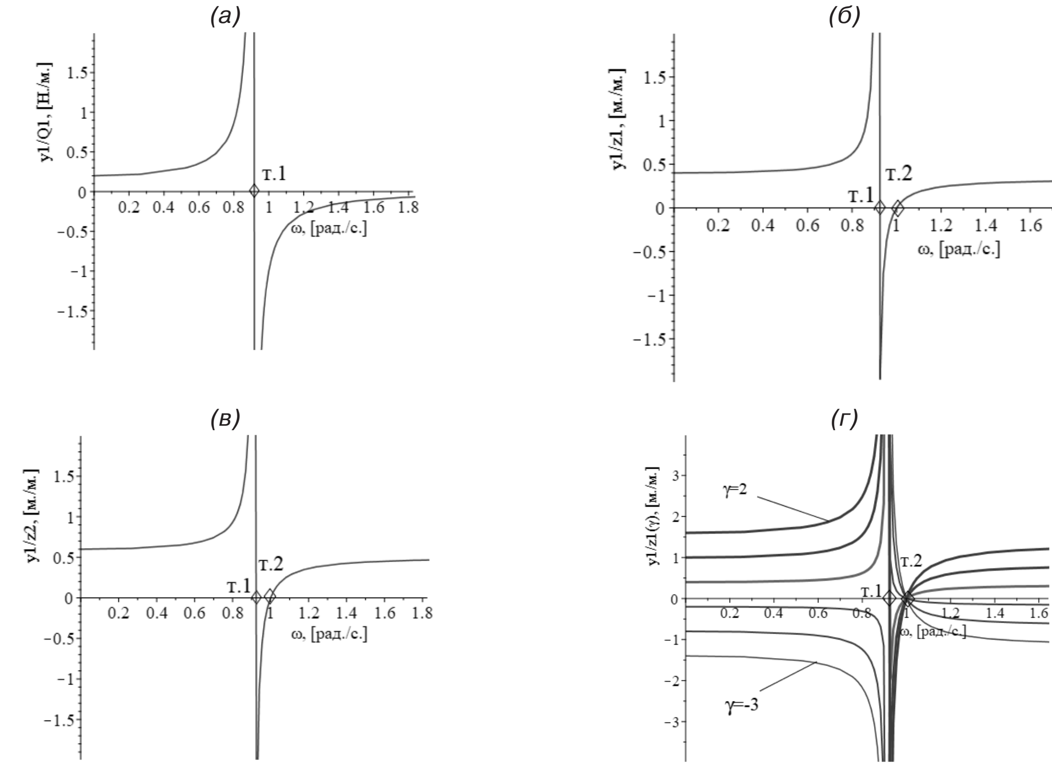

Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики: (а) - $\overline{y}_1/\overline{Q}_1$; (б) -$y_1/\overline{z}_1$; (в) -$\overline{y}_1/\overline{z}_2$; (г) семейство $\overline{y}_1/\overline{z}_1$, γ=-3,-2,-1,0,1,2 ($m_1$=1кг, L_1=2кг, L_2=4 кг., k_1=2 Н/м., k_2=3 Н/м.)

$$\omega_{\text{dyn2}} = \sqrt{k_2/L_2}\,. \tag{11}$$

Вместе с тем, необходимо отметить, что согласно структурным схемам (рис. 2,б-в) режимы динамического гашения колебаний реализуются в системе за счет обнуления усилительного звена с передаточными функциями $L_1p^2+k_1$ и $L_2p^2+k_2$.

В свою очередь, обнуление отрицательной обратной связи, отражающей роль динамической жесткости, в предположении, что объектом для оценки динамического состояния выбран массоинерционный элемент, реализуется на частоте:

$$\omega_{\text{inv}} = \sqrt{(k_1+k_2)/(L_1+L_2)}\,. \tag{12}$$

Можно показать, что движение механической колебательной системы на частоте ω_{inv} обладает рядом специфических свойств.

4. Оценка динамических состояний с учетом связности внешних кинематических возмущений

1. Динамические состояния системы, находящейся под воздействием двух одновременно действующих связных кинематических возмущений определяются собственной частотой ω_{nat} системы и частой $\omega_{\text{dyn}}(\gamma)$, зависящей от параметра связности γ, на которой реализуется обнуление координаты $\overline{y}_1$:

$$\omega^2{}_{\text{nat}} = \frac{k_1+k_2}{m_1+L_1+L_2}\,, \tag{13}$$

$$\omega^2{}_{\text{dyn}} = \frac{k_1+\gamma k_2}{L_1+\gamma L_2}\,. \tag{14}$$

Значения величины k_1L_2-k_2L_2 задает область определения функции $\omega_{\text{dyn}}(\gamma)$, сопоставляющей каждому коэффициенту связности γ фиксированное значение частоты внешнего возмущения, обнуляющего амплитуду колебания $\overline{y}_1$.

2. График функции $\omega_{\text{dyn}}(\gamma)$ (рис.4, линия 1), заданной в области $\Gamma=\{-\infty,-k_1/k_2\}\cup\{-L_1/L_2,\infty\}$, при условии k_1L_2-$k_2L_2\neq0$ образован двумя ветвями с вертикальной γ= -L_1/L_2 и горизонтальной $\omega=\sqrt{k_2}/\sqrt{L_2}$ асимптотами (рис. 4, линии 5,2).

Критические значения коэффициента связности γ=-k_1/k_2 и γ=-L_1/L_2 определяют интервал, для внутренних точек которого частота обнуления амплитуды колебания координаты $\overline{y}_1$ не определена (рис. 4, т.1,2). Для γ=0 частота $\omega_{\text{dyn}}(\gamma)$ принимает значение $\sqrt{k_1}/\sqrt{L_1}$ (рис. 4, т.3). Предельное значение функции $\omega_{\text{dyn}}(\gamma)$ при стремлении γ к бесконечности составляет $\sqrt{k_2}/\sqrt{L_2}$(рис.4, т.4).

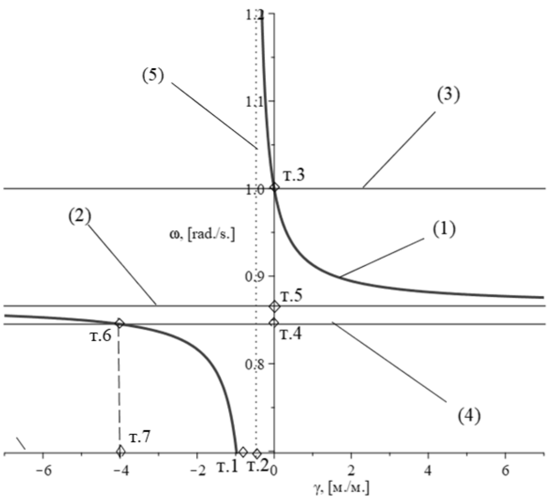

Рис. 4. График зависимости частоты обнуления координаты $\overline{y}_1$ от коэффициента связности γ

В предположении, что собственная частота ω_{nat} (13) системы не совпадает с частотой $\sqrt{k_2}/\sqrt{L_2}$, а это выполняется при условии k_1L_2-k_2L_1+k_2m_1≠0, может быть найден такой особенный коэффициент связности γ_0(рис. 4, т.7), что частота обнуления ω_{dyn} (14) координаты y_1 совпадет с собственной частотой системы ω_{nat} (рис. 4,т.4):

$$\gamma_0 = \frac{k_2L_1 - k_1L_2 - k_1m_1}{k_2L_1 - k_1L_2 + k_2m_1}. \qquad (15)$$

При выборе в качестве коэффициента связности кинематических возмущений значения $\gamma=\gamma_0$ алгебраическое уравнение (8) в изображениях Лапласа принимает вид:

$$(k_2L_1 - k_1L_2 + k_2m_1)[(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + (k_1 + k_2)]\overline{y}_1 =$$
$$= (k_2L_1 - k_1L_2)[(m_1 + L_1 + L_2)p^2 + (k_1 + k_2)]\overline{z}_1 \qquad (16)$$

Алгебраическому уравнению (16) в рамках структурного подхода сопоставляется структурная схема, эквивалентная в динамическом отношении системы автоматического управления (рис. 5).

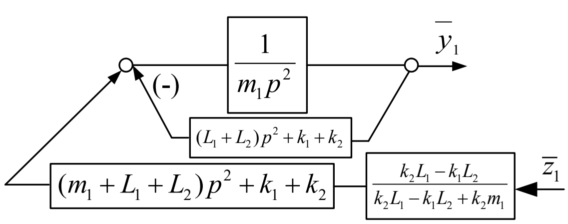

Рис.5. Структурная схема для параметра связности $\gamma=\gamma_0$

Передаточное отношение (9) для (16) принимает вид:

$$W_{\gamma_0}(p) = \left.\frac{\overline{y}_1}{\overline{z}_1}\right|_{z_2=\gamma z_1} = \frac{k_2L_1 - k_1L_2}{k_2L_1 - k_1L_2 + k_2m_1}. \qquad (17)$$

Таким образом, для особенного значения коэффициента связности $\gamma=\gamma_0$ динамические свойства системы могут быть рассмотрены как независящие от частоты внешнего возмущения. Вместе с тем, в зависимости от конкретных значений параметров системы, передаточное отношение (17) может принимать положительные, отрицательные или нулевые значения.

3. В случае если выполнено условие k_1L_2-k_2L_1=0, то уравнение в изображениях Лапласа (8) принимает вид:

$$[(m_1 + L_1(1+\frac{k_2}{k_1}))p^2 + k_1 + k_2]\overline{y}_1 =$$
$$= (k_1 + L_1p^2)(1+\gamma\frac{k_2}{k_1})\overline{z}_1 \qquad (18)$$

Для различных коэффициентов связности может быть рассмотрено семейство структурных схем, особенностью которых является звено с передаточной функцией $1+\gamma k_2/k_1$ (рис. 6).

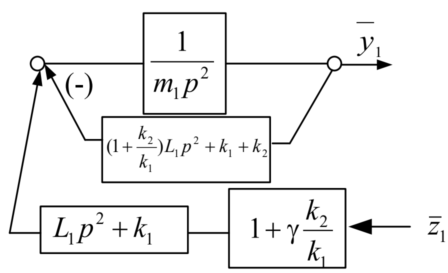

Рис.6. Семейство структурных схем при условии k_1L_2-k_2L_1=0

Передаточная функция систем (рис.6) имеет вид:

$$W'_{\gamma}(p) = \left.\frac{\overline{y}_1}{\overline{z}_1}\right|_{z_2=\gamma z_1} = \frac{(1+\gamma\frac{k_2}{k_1})(L_1p^2 + k_1)}{(m_1 + (1+\frac{k_2}{k_1})L_1)p^2 + k_1 + k_2}. \qquad (19)$$

Семейство амплитудно-частотных характеристик передаточных функций (19) имеет графики трех характерных видов в зависимости от γ (рис.7, линии 1-3).

Таким образом, усилительное звено с передаточным коэффициентом $1+\gamma k_2/k_1$ обнуляется при выборе γ= - k_1/k_2. Это означает, что выбор коэффициента связности γ внешних кинематических

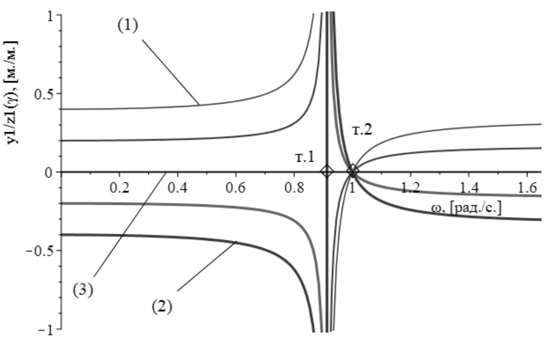

Рис.7. Семейство амплитудно-частотных характеристик системы для различных коэффициентов связности: линия 1 – γ=0, линия 2 – γ=-4/3; линия 3 – γ=-2/3 отображает «блокирующее» значение коэффициента связности

возмущений и учет системных параметров в виде условия k_1L_2-k_2L_1=0 определяет совокупность динамических особенностей механической колебательной системы.

5. Формы динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы

1. В качестве характерных движений элементов механической колебательной системы можно выделить состояние покоя, динамическое гашение колебаний, резонанс, движение на особых частотах, отображающих специальные динамические состояния.

   Графики амплитудно-частотных характеристик могут быть интерпретированы как совокупность динамических состояний и форм взаимодействия элементов механических колебательных систем. Если с динамическим состоянием связывается характерная частота, обладающая определенной особенностью, то под формой динамических взаимодействий понимается направленность движения массоинерционного элемента механической колебательной системы относительно некоторой фиксированной направленности внешнего возмущения силовой или кинематической природы. В случае совпадения направленностей движения форма взаимодействия условно принимается «положительной» (рис. 8,а), в случае противоположных направленностей форма взаимодействия считается «отрицательной» (рис. 8,б).

   Таким образом, формы динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы отображают направленности движении массоинерционного элемента по отношению к некоторому возмущающему воздействию. В частности, участок знакопостоянства амплитудно-частотной характеристики может быть интерпретирован как форма движения условно «положительной» направленности, если график амплитудно-частотной характеристики больше нуля, или условно «отрицательной», если меньше нуля.
2. Детализация представлений о совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов механической колебательной системы, находящейся под вибрационным нагружением определенной природы (к примеру, сила Q_1 приложена к массоинерционному элементу m_1, а кинематические воздействия z_1 и z_2 равны нулю), может быть представлена графом, в котором характерные динамические состояния представлены вершинами, а частотные интервалы знакопостоянства амплитудно-частотных характеристик отображаются направленными дугами от вершин с меньшими частотами к большим с весами равными длинам соответствующих частотных интервалов.

   На рис. 9 представлен граф динамических состояний механической колебательной системы (рис. 2,а), построенный на основе амплитудно-частотной характеристики (рис. 3,а) передаточной функции (5).

   Вершинами графа (рис. 9,а) обозначены два динамических состояний, а именно, вершина v_1

(а) (б)

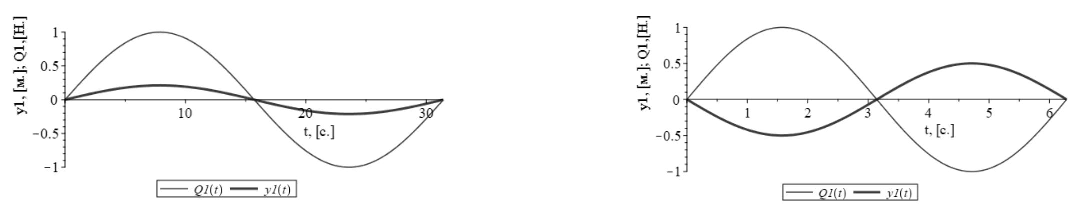

Рис.8. Формы динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних возмущений силовой природы:(а) – «положительная» форма или однонаправленные движения, (б) – «отрицательная» форма или движение в противоположных направлениях

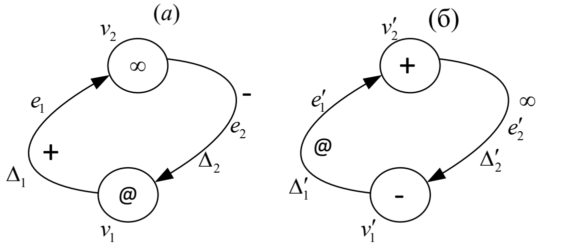

Рис. 9. Граф динамических состояний (а) и динамических форм (б) взаимодействий элементов механических колебательной системы (рис. 3) для силового внешнего возмущения($Q_1 \neq 0$, $z_1=0$,$z_2=0$)

обозначает «начальное» состояние или состояние покоя системы, когда внешнее возмущение отсутствует или частота внешнего возмущения равна нулю, т.е. $\omega_1=0$. Вершина v_2 обозначает состояние резонанса, когда частота внешнего возмущения равна собственной частоте системы, т.е. $\omega_2= \omega_{sob}$.

Ветвь графика амплитудно-частотной характеристики (рис. 3,а), принимающая положительные значения на частотном интервале $(\omega_1,\ \omega_2)$, отображает динамическую форму положительной направленности в виде ориентированной дуги графа $e_1(v_1,v_2)$, идущей из вершины v_1 в вершину v_2 и имеющей вес $\Delta_1= \omega_2 - \omega_1$.

Динамическая форма отрицательной направленности, соответствующая ветви графика амплитудно-частотной характеристики с отрицательными значениями (рис. 3,а, линия 2) на частотном интервале (ω_2,∞), отображается в виде ориентированной дуги графа $e_2(v_2,v_1)$, идущей из вершины v_2 в вершину v_1 и имеющей бесконечный вес $\Delta_2=\infty$.

В рамках развиваемых представлений динамическое состояние, соответствующее нулевой частоте, и предельное состояние, соответствующее неограниченному росту частоты внешнего возмущения, считаются тождественными и обозначаются одной вершиной графа.

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика (рис. 3,а) задает ориентированный граф (рис. 9,а) динамических состояний $G_1=\{V_1,E_1\}$, где $V_1=\{v_1,v_2\}$ – множество вершин, соответствующих множеству динамических состояний механической колебательной системы; $E_1=\{e_1,e_2\}$ – множество дуг, сопоставленных динамическим формам взаимодействий элементов механической колебательной системы, характеризуемым положительными и отрицательными направленностями.

3. Наравне с графом динамических состояний механической колебательной системы может быть построен граф $G'_1=\{V'_1,E'_1\}$ (рис. 9,б), динамических форм взаимодействий элементов механической колебательной системой, находящейся под воздействием внешних возмущений кинематической или силовой природы, образованный вершинами $V'_1=\{v'_1,v'_2\}$, которые отображают динамические формы взаимодействия элементов, и ориентированными дугами $E'_1=\{e'_1,e'_2\}$, которые отображают динамические состояния механической колебательной системы, реализующиеся на характерных частотах, разделяющих интервалы знакопостоянства ветвей графиков амплитудно-частотных характеристик. Весами Δ'_1, Δ'_2 дуг e'_1,e'_2 графа служат характерные частоты, а именно – нулевая и собственная частота, т.е. $\Delta'_1=\omega_1$, $\Delta'_2=\omega_2$.

Амплитудно-частотные характеристики, представленные на рис. 3,б,в, могут быть отображены соответствующими графами динамических состояний (рис. 10,а,*в*) и динамических форм (рис. 10,б,г) взаимодействий элементов механических колебательных систем.

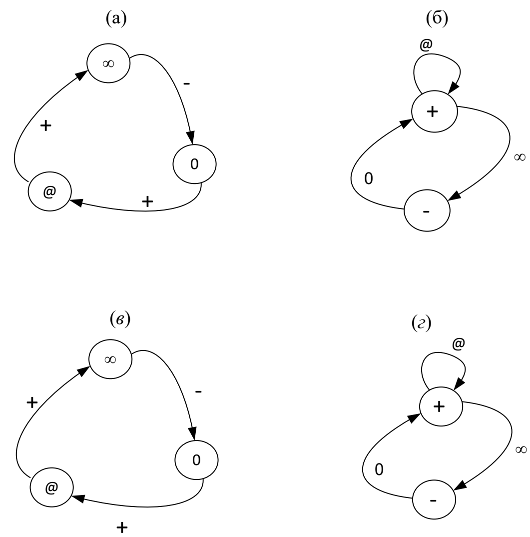

Рис. 10. Динамические характеристики механических колебательных систем: (а) граф динамических состояний и (б) динамических форм для системы на рис. 2,б; (в) граф динамических состояний и (г) динамических форм для системы на рис. 2,в

4. При условии $k_1L_2 \neq k_2L_1$ наравне с графами (рис.10), построенными на основе амплитудно-частотных характеристик передаточных функций (5)-(7) систем (рис. 2,а,в), могут быть построены графы динамических состояний и форм для амплитудно-частотной характеристики передаточного отношения (9) механической колебательной системы, находящейся под воздействием связных кинематических возмущений.

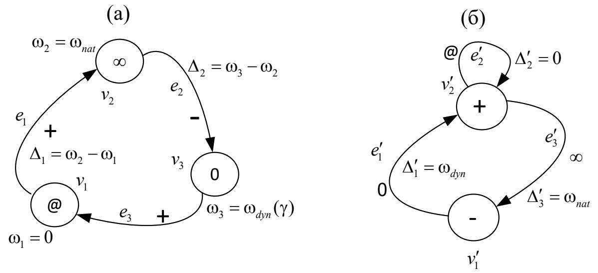

Рис. 11. Графы динамических состояний и форм для механической колебательной системы с учетом связности кинематических возмущений

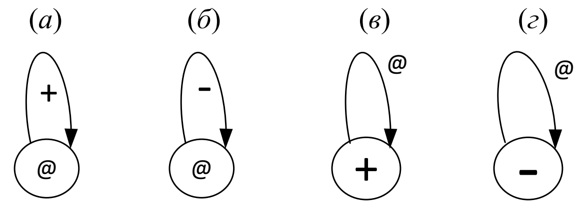

Рис.12. Графы динамических состояний и форм динамических взаимодействий для особенных параметров

На рис. 11 представлен граф динамических состояний, в котором дугам сопоставлены аналитические выражения весов как функций коэффициента связности кинематических возмущений, сопоставляющие независимой переменной γ значения длин частотных интервалов знакопостоянства амплитудно-частотных характеристик между частотами характерных динамических состояний.

Веса дуг e_1, e_2 составляют:

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + L_1 + L_2}}\,, \tag{20}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{\frac{k_1 + \gamma k_2}{L_1 + \gamma L_2}} - \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + L_1 + L_2}}\,, \tag{21}$$

Вес дуги e_3 принимается за бесконечность, т.е. $\Delta_3=\infty$.

Наравне с графом динамических состояний (рис. 11,а) представлен граф динамических форм колебаний (рис. 11,б), в котором вершинами v'_1 и v'_2 служат положительные и отрицательные формы динамических взаимодействий, дугами – динамические состояния, а весами Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 дуг e'_1, e'_2, e'_3 служат частоты соответствующих динамических состояний:

$$\Delta'_1 = \sqrt{\frac{k_2\gamma + k_1}{L_2\gamma + L_1}} \qquad (22),$$

$$\Delta'_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + L_1 + L_2}} \qquad (23),$$

$$\Delta'_3 = 0\,. \tag{24}$$

5. Семейство механических колебательных систем, определяемое значениями коэффициента связности γ, включает особый вариант, соответствующий коэффициенту связности γ_0, при котором частота обнуления координаты $\overline{y}_1$ совпадает с частотой собственных колебаний системы (предполагается, что k_2m_1-k_1L_2-$k_2L_1\neq0$). Соответствующая амплитудно-частотная характеристика принимает положительные, отрицательные и нулевое значения. Такой амплитудно-частотной характеристике могут быть сопоставлены «атомарные» графы динамических состояний и форм взаимодействий (рис.12).

   Вместе с тем, если k_2m_1-k_1L_2-$k_2L_1=0$, то совпадение частоты обнуления амплитуды колебания координаты $\overline{y}_1$ с частотой собственных колебаний реализуется только в пределе, т.е. при $\gamma\rightarrow\infty$.
6. Если при выполнении условия k_1L_2-$k_2L_1=0$ коэффициент γ составляет критическое значение γ=-k_1/k_2, то совокупность динамических состояний определяется тремя динамическими состояниями и двумя формами динамических взаимодействий (рис. 11,а). Если же выбран коэффициент связности γ=-k_1/k_2, то система вырождается в состояние покоя, не обладающее формами взаимодействий.
7. Представленные графы (рис. 10–12) динамических состояний и форм взаимодействий являются новыми структурными математическими моделями, отображающими существенные динамические особенности механических колебательных систем в виде, чувствительных к внешним воздействиям, «динамических совокупностей», минимальный набор характеристик которых определяется числом динамических состояний и форм взаимодействий. Графы динамических состояний и форм взаимодействий по сути являются аппаратом исследования в дополнение к амплитудно-частотным характеристикам передаточных отношений для отображения динамических особенностей механических колебательных систем в обобщенном виде. Для механических колебательных систем с двумя степенями свободы цепного типа или включающих в свой состав твердое тело реализованы программные разработки построения графа динамических состояний и форм [8]. В общем случае вычислительная трудоемкость по-

строения графа динамических состояний и форм взаимодействий количественно выражается сложностью определения корней (собственные частоты, частоты динамического гашения колебаний) многочленов соответствующей задаче степени с учетом кратности и близости расположения.

Заключение

Предложен метод исследования динамических особенностей механических колебательных систем в рамках структурного математического моделирования, опирающийся на интерпретацию амплитудно-частотных характеристик передаточных функций в качестве графов, отображающих совокупность динамических состояний и динамических форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних возмущений силовой или кинематической природы с учетом связанности.

Разработан подход к оценке, контролю и формированию динамических особенностей взаимодействий элементов механических колебательных систем с одной степенью свободы, рассматриваемых в качестве обобщенных систем, к которым могут быть приведены механические колебательные системы с несколькими степенями свободы.

В рамках единого системного подхода, основанного на методах структурного математического моделирования, предложенная расширенная методологическая база решения задач динамики технических объектов, находящихся под вибрационным нагружением с учетом связанности внешних воздействий, на основе рассмотрения особенностей динамических состояний и динамических форм взаимодействия элементов механических колебательных систем.

Показано, что характер приложения внешних возмущающих воздействий существенным образом влияет на формирования совокупности вынужденных движений механической колебательной системы.

Рассмотрена модельная механическая колебательная система с одной степенью свободы. Показано, что в рассмотренном модельном варианте в зависимости от выбора параметров системы и коэффициента связности семейство систем обладает совокупностью специфических состояний. В частности, показано, что выбор параметров коэффициентов жесткостей, масс и массоинерционных коэффициентов устройств для преобразований движений может влиять на существование у системы режимов динамического гашения колебаний и «блокировать» движение для внешнего воздействия всего спектра частот. Вместе с тем, показано, что сближение частоты динамического гашения с собственной частотой, уменьшает количество степеней свободы, что проявляется в уменьшении форм динамических взаимодействий.

Показано, что количество степеней свободы механической колебательной системы проявляется в разнообразии форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы.

Авторами предложено представление о динамическом состоянии как «переключателе» форм динамических взаимодействий; с другой стороны, формы динамических взаимодействий реализуются при «прохождении» системой различных динамических состояний.

Показано, что управление динамическими режимами с учетом форм взаимодействий элементов создает предпосылки к разработке эффектов самоорганизации движения механических колебательных систем.

Таким образом, для решения задач динамики технических объектов транспортного и технологического назначения, разработана расширенная методологическая база для решения задач оценки, контроля и формирования динамических состояний и динамических форм взаимодействий, учитывающих особенности выбора объекта, динамическое состояние которого оценивается.

Литература

1. *Махутов Н.А.* Безопасность и риски: системные исследования и разработки / Н.А. Махутов. – Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
2. *Лапидус Б.М.* О формировании актуальных направлений фундаментальных научных исследований в интересах опережающего развития ОАО «РЖД» / Б. М. Лапидус // Железнодорожный транспорт. 2019. № 6. С. 26-30.
3. *Стиславский А.Б.* Формальная постановка задачи обеспечения безопасности транспортного комплекса / А Б. Стиславский, В. Н. Цыгичко / Труды ИСА РАН. 2009. Т. 41. С. 26-42
4. *Clarence W. de Silva.* Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 2000. 957 p.
5. *Karnovsky I.A., Lebed E.* Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 2016. 708 p.
6. *Harris C.M.* Shock and Vibration Handbook / C. M. Harris,C. E. Crede.- New York: McGraw – Hill Book Co. 2002. 1457 p.
7. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of

Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham. 2020. 521 p.
8. *Елисеев А.В.* Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022610619, 13.01.2022. Заявка № 2021682457 от 27.12.2021.

Елисеев Андрей Владимирович. Иркутский государственный университет путей сообщения. Доцент кафедры математики. Иркутский национальный исследовательский технический университет. Доцент кафедры конструирования и стандартизации в машиностроении. Кандидат технических наук. Количество печатных работ: 328 (в т.ч. 4 монографии). Область научных интересов: методы структурного математического моделирования на основе использования методологии системного анализа для решения задач динамики технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения. E-mail: eavsh@ya.ru (Ответственный за переписку).

Кузнецов Николай Константинович. Иркутский национальный исследовательский технический университет. Заведующий кафедрой конструирования и стандартизации в машиностроении. Доктор технических наук. Профессор. Количество печатных работ: 197 (в т.ч. 6 монографий). Область научных интересов: динамика машин различного назначения, работающих в условиях вибрационного нагружения. E-mail: knik@istu.edu

Миронов Артем Сергеевич. Иркутский государственный университет путей сообщения. Соискатель. Количество печатных работ: 69. Область научных интересов: методы структурного математического моделирования. E-mail: art.s.mironov@mail.ru

A systematic approach to assessing the dynamic states of technical objects based on structural mathematical modeling methods

A.V. Eliseev[I,II], N. K. Kuznetsov[II], A. S. Mironov[I]

[I] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

[II] Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

Abstract. The applications of system analysis to solving problems of assessment, control and formation of dynamic states of technical objects under vibrational loading of a power or kinematic nature, taking into account connectivity, are considered. Within the framework of structural mathematical modeling methods, schemes of dynamically equivalent automatic control systems are compared to mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects. A modeling methodology based on computational schemes in the form of mechanical oscillatory systems with one degree of freedom, considered as generalized reduction schemes, has been developed. The interpretation of a set of dynamic states and forms of dynamic interactions of elements using oriented graphics is proposed.

Keywords: *methods of structural mathematical modeling, mechanical oscillatory systems, connected external disturbances, dynamic states, forms of dynamic interactions, graph of dynamic states, graph of dynamic forms of interactions*

DOI: 10.14357/20790279220109

References

1. *Mahutov N.A.* 2017. Bezopasnost' i riski: sistemnye issledovaniya i razrabotki [Safety and risks: system research and development]. Novosibirsk: Nauka Publ. 724 p.
2. *Lapidus B.M.* 2019. O formirovanii aktual'nyh napravlenij fundamental'nyh nauchnyh issledovanij v interesah operezhayushchego razvitiya OAO «RZHD» [On the formation of current directions of fundamental scientific research in the interests of advanced development of JSC «Russian Railways»] ZHeleznodorozhnyj transport [Rail Transport]. 2019. 6. P. 26-30.
3. *Stislavskij A.B.* Formal'naya postanovka zadachi obespecheniya bezopasnosti transportnogo kompleksa [Formal statement of the task of ensuring the safety of the transport comple] / A B. Stislavskij, V. N. Cygichko / Trudy ISA RAN [Proceedings of the ISA RAS], 2009. T. 41. P. 26-42
4. *Clarence W. de Silva.* 2000. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press. 957 p.
5. *Karnovsky I.A., Lebed E.* 2016. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland. 708 p.
6. *Harris, C.M.* 2002. Shock and Vibration Handbook / C. M. Harris, C. E. Crede.- New York: McGraw – Hill Book Co. 1457 p.

7. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* 2020. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham. 521 p.
8. *Eliseev A.V.* Certificate of registration of a computer program 2022610619, 01/13/2022. Application No. 2021682457 dated 12/27/2021.

Eliseev Andrey Vladimirovich. Irkutsk State Transport University, Associate Professor of the Department of Mathematics; Irkutsk National Research Technical University, Associate Professor of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering. Candidate of Technical Sciences. Number of printed works: 328 (including 4 monographs). Research interests: methods of structural mathematical modeling. E-mail: eavsh@ya.ru (Responsible for correspondence).

Kuznetsov Nikolai Konstantinovich. Irkutsk National Research Technical University, Head of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering. Doctor of Technical Sciences. Professor. Number of printed works: 197 (including 6 monographs). Research interests: dynamics of machines for various purposes operating under conditions of vibration loading. E-mail: knik@istu.edu

Mironov Artem Sergeevich. Irkutsk State Transport University. The applicant. Number of publications: 69. Research interests: methods of structural mathematical modeling. E-mail: art.s.mironov@mail.ru