Динамика макросистем

О природе гиперхаоса в нелинейных системах дифференциальных уравнений

Н.А. Магницкий

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. В работе на примере проведенного аналитического и численного анализа бифуркаций циклов обобщенной четырехмерной системы уравнений Лоренца показано, что переход к гиперхаосу в нелинейных системах дифференциальных уравнений происходит, как и в других нелинейных хаотических системах, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом вследствие наличия дополнительного четвертого измерения происходит расщепление бесконечно листной поверхности двумерного гетероклиничнеского сепаратрисного многообразия (сепаратрисного зигзага), содержащего как все сингулярные аттракторы, так и все циклы системы, родившиеся в результате всех бесконечных каскадов бифуркаций.

Ключевые слова: *диссипативные системы, бифуркации, динамический хаос, гиперхаос, теория ФШМ.*

DOI: 10.14357/20790279220205

Введение

В современной литературе по нелинейной и хаотической динамике широко используется понятие гиперхаотической системы дифференциальных уравнений (см. [1-3] и др.), имеющей размерность не ниже четырех и обладающей более сложными, чем трехмерные системы, нерегулярными аттракторами. Считается, что гиперхаотическая система уравнений имеет более чем один положительный показатель Ляпунова. Однако, как следует из результатов автора и как продемонстрировано на многочисленных примерах в работах [4-7], существует один универсальный бифуркационный сценарий перехода к хаосу в нелинейных системах дифференциальных уравнений: автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом. Это сценарий Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, начинающийся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода цикла или тора и продолжающийся субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского и гомоклиническим (или гетероклиническим) каскадом бифуркаций Магницкого. Все рождающиеся в ходе реализации такого сценария нерегулярные аттракторы являются исключительно сингулярными аттракторами, то есть непериодическими ограниченными почти устойчивыми траекториями в конечномерном или бесконечномерном фазовом пространстве, в любой окрестности которых содержится бесконечное число неустойчивых периодических траекторий. При этом доказано, что любой сингулярный циклический аттрактор, порожденный ФШМ - каскадом

* Работа частично поддержана грантом РФФИ № 20-07-00066а.

бифуркаций сингулярного цикла, принадлежит замыканию его неустойчивого двумерного инвариантного многообразия (сепаратрисной поверхности), являющегося бесконечно листным складчатым гетероклиническим сепаратрисным зигзагом, натянутым на сепаратрисное дерево (листы Мебиуса) каскада Фейгенбаума и следующих за ним каскадов бифуркаций [4,5]. Следовательно, на любом сингулярном аттракторе (почти устойчивой непериодической траектории) старший характеристический показатель Ляпунова равен нулю. Эффект положительности показателя Ляпунова является исключительно следствием ошибок вычислений, так как из-за наличия всюду плотного множества непериодических траекторий численное движение возможно только по всей области, в которой расположена траектория сингулярного аттрактора, а не по самой его траектории. По той же причине численно найденный старший показатель Ляпунова может оказаться положительным и при движении по устойчивой периодической траектории большого периода, находящейся в окрестности какого-либо сингулярного аттрактора, хотя теоретически он должен равняться нулю и характеризовать движение в касательном к траектории направлении, а остальные показатели Ляпунова должны быть отрицательными. Таким образом, найденные численно положительные показатели Ляпунова не являются характеристикой ни хаотического, ни тем более гиперхаотического движения.

Целью настоящей работы является выяснение истинной природы гиперхаотического поведения траекторий нелинейных систем дифференциальных уравнений на примере системы

$$\dot{x} = \sigma(y-x) - pw, \dot{y} = x(r-z) - qy,$$
$$\dot{z} = xy - bz, \ \dot{w} = xz - kw, \qquad (1)$$

взятой из работы [1] и являющейся обобщением широко известной трехмерной системы уравнений Лоренца, в которую система (1) переходит при $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, q = 1, p = w = 0$ и $r > 0$.

1. Аналитическое исследование

Чтобы наглядно продемонстрировать, в чем на самом деле состоит отличие так называемого гиперхаоса, возникающего в системе (1), от просто хаоса системы Лоренца, положим в (1) $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, $q = 1$; $p = k = 1$, $r > 0$. Исследуем область диссипативности системы (1), вычислив дивергенцию ее правой части

$$divF = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial w}\right) = -(\sigma + 1 + b + 1) < 0,$$

то есть система (1) диссипативна во всем фазовом пространстве. Найдем особые точки системы (1), приравняв к нулю правые части ее уравнений:

$$\sigma(y-x) - w = 0, \ x(r-z) - y = 0,$$
$$xy - bz = 0, \ xz - w = 0. \qquad (2)$$

Решая последнюю систему алгебраических уравнений, найдем, что при $r < 1$ система (1) имеет единственную особую точку $O(0,0,0,0)$, а при $r > 1$ – три особые точки: $O(0,0,0,0)$ и

$$O_{\pm}\left(\pm\sqrt{\frac{b\sigma(r-1)}{\sigma+r}}, \quad \pm\frac{\sigma+r}{\sigma+1}\sqrt{\frac{b\sigma(r-1)}{\sigma+r}}, \quad \frac{\sigma(r-1)}{\sigma+1}, \quad \pm\frac{\sigma(r-1)}{\sigma+1}\sqrt{\frac{b\sigma(r-1)}{\sigma+r}}\right).$$

Теорема. При $r < 1$ особая точка O системы (1) является устойчивым узлом. При $r > 1$ особая точка O является седло - узлом с одномерным неустойчивым многообразием W^u, а особые точки $O_{\pm}$ – устойчивыми узлами.

Доказательство. Вычислим матрицу линеаризации системы (1) в особых точках:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & -1 \\ r & -1 & -x & 0 \\ y & x & -b & 0 \\ z & 0 & x & -1 \end{pmatrix}$$

Вычисляя характеристический многочлен в особой точке O, найдем:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda+1)(\lambda+b)\big(\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r)\big).$$

Приравнивая характеристический многочлен нулю, найдем, что матрица линеаризации имеет в особой точке O следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -b,$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{(\sigma+1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 - \sigma(1-r)}\,.$$

Следовательно, при $r < 1$ матрица линеаризации A в особой точке O имеет четыре отрицательных вещественных собственных значения, то есть особая точка O является устойчивым узлом. При $r > 1$ матрица линеаризации имеет, очевидно, три отрицательных и одно положительное вещественных собственных значений, то есть особая точка O в этом случае является седло – узлом с одномерным неустойчивым многообразием W^u.

Докажем, что в этом случае аттракторами становятся особые точки $O_{\pm}$. При $r \geq 1$ характеристический многочлен матрицы линеаризации системы (1), вычисленный в особых точках $O_{\pm}(x_*,\ y_*,\ z_*,\ w_*)$, принимает вид:

$$\det(A-\lambda I) \\ = (\lambda+1)(\lambda+b)\big(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-r)\big) \\ +(\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma)x_*^2+(\lambda^2+(b+1)\lambda+b)z_*^2 \\ +(\lambda+1)(\sigma+1)x_*y_*+(r+z_*)x_*^2.$$

Так как $x_* = y_* = z_* = 0$ при $r = 1$, то характеристический многочлен принимает вид: $\lambda(\lambda+1)(\lambda+b)(\lambda+\sigma+1)$. Его корнями являются одно нулевое и три вещественных отрицательных значения. Поэтому существует $r_* > 1$ такое, что при всех $1 < r < r_*$ отрицательные вещественные корни характеристического полинома остаются вещественными и отрицательными. А так как свободный член характеристического полинома положителен и равен произведению всех четырех его корней, то четвертый корень при $1 < r < r_*$ является также вещественным и отрицательным. Следовательно, особые точки $O_{\pm}$ системы (1) при $1 < r < r_*$ являются устойчивыми узлами.

Теорема доказана.

2. Численный анализ

Дальнейшее исследование динамики решений системы (1) проведем численными методами. Численный анализ показывает, что при росте значений параметра $r > r_*$ особые точки $O_{\pm}$ системы (1) сначала становятся устойчивыми фокусами, а затем теряют устойчивость при $r \approx 15$. При этом аттрактором в системе становится устойчивый цикл, который сохраняет устойчивость до $r \approx 19.1$. При больших значениях параметра r в системе (1) присутствует так называемый гиперхаос, представленный на рис. 1. Основное видимое отличие хаоса от гиперхаоса состоит в том, что сечение плоскостью аттрактора просто хаотической трехмерной диссипативной системы имеет вид одномерной кривой, то есть листы гетероклинического сепаратрисного зигзага бесконечно близко прижаты друг к другу. Но это не является их специфическим отличием, так как в четырехмерных диссипативных системах с хаотической динамикой, как доказано автором в [4,5], может происходить расщепление бесконечно листного сепаратрисного зигзага на множество одномерных в проекции кривых, что мы и видим на рис. 1,а,в.

Покажем, что не цикл, найденный в системе (1) при $15 < r < 19.1$, порождает гиперхаос в системе (1) при больших значениях параметра r, а что так называемый гиперхаос в четырехмерной диссипативной системе (1) является следствием бесконечного каскада бифуркаций в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого при уменьшении значений бифуркационного параметра r. То есть гиперхаос и хаос в любых трехмерных и многомерных нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений имеют одну природу. Действительно, нетрудно численно убедиться в том, что при r = 67.9 система (1) имеет два устойчивых цикла, изображенных на рис. 2.

Рис. 1. Проекция на плоскость (*x, z*) аттрактора системы (1) при $r = 25$ (б), проекция на плоскость (*y, z*) сечения аттрактора плоскостью $x = 0$ (а), проекция на плоскость (*x, z*) сечения аттрактора плоскостью $y = 0$ (в)

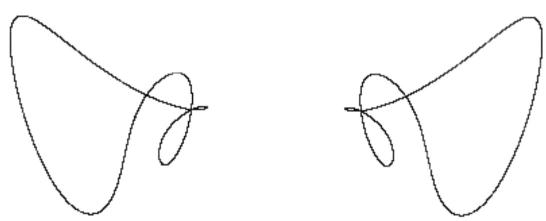

Рис. 2. Проекции устойчивых циклов периода 1 системы (1) на плоскость (*x, z*) при $r = 67.9$

При уменьшении значений бифуркационного параметра r в системе (1) происходят каскады бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума обоих циклов, а затем полные субгармонические каскады бифуркаций в соответствии с порядком Шарковского. Так при $r = 65$ в системе (1) найдены устойчивые циклы периода 2, при $r = 64.5$ – устойчивые циклы периода 4, а при $r = 63.76$ – два сингулярных аттрактора Фейгенбаума. При дальнейшем уменьшении значений параметра r в системе (1) реализуются два полных субгармонических каскада бифуркаций Шарковского, завершающиеся двумя устойчивыми циклами периода 3 при $r = 55.5$, проекции которых на плоскость (x,z) изображены на рис. 3.

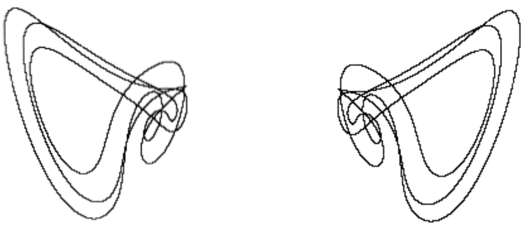

Рис. 3. Проекции устойчивых циклов периода 3 системы (1) на плоскость (x,z) при r = 55.5

При дальнейшем уменьшении значений параметра r в системе (1), как и в трехмерной системе уравнений Лоренца, происходит слияние двух сепаратрисных гомоклинических многообразий двух циклов с образованием единого сепаратрисного гетероклинического многообразия, на котором происходит рождение новых более сложных как гомоклинических, так и гетероклинических циклов. При наличии дополнительного четвертого измерения в системе (1) имеется возможность расщепления бесконечно листной поверхности данного двумерного гетероклиничнеского сепаратрисного многообразия, что хорошо видно из рис.1,а,в.

Заключение

В работе проведено аналитическое и численное исследование природы гиперхаоса в нелинейных системах дифференциальных уравнений на примере обобщенной четырехмерной системы уравнений Лоренца. Численно показано, что переход к гиперхаосу в данной нелинейной системе дифференциальных уравнений происходит, как и в других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом вследствие наличия дополнительного четвертого измерения происходит расщепление бесконечно листной поверхности двумерного гетероклиничнеского сепаратрисного многообразия (сепаратрисного зигзага), содержащего как все сингулярные аттракторы, так и все циклы системы, родившиеся в результате всех бесконечных каскадов бифуркаций. Старший характеристический показатель Ляпунова на любом сингулярном аттракторе системы является нулевым, а его найденные численно положительные значения являются результатом его вычисления при движения не по траектории самого аттрактора, а по всей содержащей его сепаратрисной поверхности.

Литература

1. *Li Y., Wei Z. and Aly A.* A 4D hyperchaotic Lorenz-type system // Eur. Phys. J. 2022. 00448-2.
2. *Yang J., Wei Z. and Moroz I.* Periodic solutions for a four-dimensional hyperchaotic system // Advances in Difference Equations. 2020. 2020:198.
3. *Djondiné1 P., Malobé P. A.* Generation of hyperchaos from the Lü system with a sinusoidal perturbation // J. App. Math. and Phys. 2021. 9. P. 1100-1107.
4. *Магницкий Н.А.* О топологической структуре сингулярных аттракторов нелинейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1551–1560.
5. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд. 2011. 320 с.
6. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
7. *Magnitskii N.A*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P. 197-215

Магницкий Николай Александрович. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия . Доктор физико-математических наук, профессор. Количество печатных работ: более 250. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети, интегральные уравнения, математическое моделирование.
E-mail: nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

On the nature of hyperchaos in nonlinear systems of differential equations*

N.A. Magnitskii
Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Using the example of the performed analytical and numerical analysis of cycle bifurcations of the generalized four-dimensional system of Lorentz equations, it is shown that the transition to hyperchaos in nonlinear systems of differential equations occurs, as in any other nonlinear chaotic systems, in accordance with the Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii universal bifurcation scenario. In this case, due to the presence of an additional fourth dimension, the infinitely sheeted surface of the two-dimensional heteroclinic separatrix manifold (separatrix zigzag) is split, which contains both all singular attractors and all cycles of the system, born as a result of all infinite cascades of bifurcations.
Keywords: *dissipative systems, bifurcations, dynamic chaos, hyperchaos, FSM theory.*
DOI: 10.14357/20790279220205

References

1. Li Y., Wei Z. and Aly A. A 4D hyperchaotic Lorenz-type system // Eur. Phys. J. 2022. 00448-2.
2. Yang J., Wei Z. and Moroz I. Periodic solutions for a four-dimensional hyperchaotic system // Advances in Difference Equations. 2020. 2020:198.
3. Djondiné1 P., Malobé P. A. Generation of hyperchaos from the Lü system with a sinusoidal perturbation // J. App. Math. and Phys. 2021. 9. P. 1100–1107.
4. Magnitskii N.A. O topologicheskoy strukture singulyarnykh attraktorov nelineynykh sistem differentsial’nykh uravneniy // Differents. uravneniya. 2010. T. 46. № 11. P. 1551–1560.
5. Magnitskii N.A. Teoriya dinamicheskogo khaosa. M.: Lenand. 2011. 320 p.
6. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
7. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P. 197-215.

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks, integral equations, mathematical modeling. E-mail : nikmagn@gmail.com; nmag@isa.ru

* Research is partially supported by RFBR project № 20-07-00066a.