

Об одном условии управляемости систем с сосредоточенными и распределенными параметрами

В.И. Елкин

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. Обсуждается связь понятий первого интеграла и управляемости для систем управления с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Ключевые слова: управляемая система, недоопределенная система дифференциальных уравнений, первый интеграл, управляемость.

DOI: 10.14357/20790279220402

Введение

Понятие первого интеграла является классическим для обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Позже оно было введено и для динамических систем с управлением (систем управления с сосредоточенными параметрами)[2] и выяснилось, что оно является важным в вопросах управляемости. Аналогичное понятие можно ввести и для систем уравнений с частными производными. Соответственно, это понятие существует и для систем управления с распределенными параметрами, что и обсуждается в этой работе.

1. Системы с сосредоточенными параметрами

В стандартной литературе по теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятие первого интеграла разработано для систем в нормальной форме:

$$dy^i/dt = f^i(t, y), i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Напомним, что первым интегралом системы (1) называется такая функция $\Phi(t, y)$, что на любом решении $y(t)$ системы (1) она принимает постоянное значение:

$$\Phi(t, y(t)) = \text{const.}$$

Для произвольных систем:

$$h^k(t, y, \frac{dy}{dt}) = 0, \quad k = 1, \dots, q. \quad (2)$$

Вопрос о первых интегралах в классической теории обыкновенных дифференциальных уравне-

ний не изучен, хотя для систем (2) понятие первого интеграла вводится аналогично. Тем не менее этот вопрос возник в теории управления динамическими системами:

$$\begin{aligned} \dot{y}^i &= f^i(t, y, u), \quad i = 1, \dots, n, \\ (t, y) &\in M \subset R^{n+1}, \quad u \in U \subset R^r. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем предполагается, что функции f^i , $\partial f^i / \partial y^j$, $\partial f^i / \partial u^\alpha$ являются гладкими. Обычно называют y фазовыми переменными (состояниями), u — управлениями (внешними воздействиями). Множество M , называемое фазовым пространством, — область, U — область. Управления могут быть кусочно-непрерывными функциями $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. В этом случае они называются допустимыми. Решением или фазовой траекторией системы (3) называется непрерывная кусочно-гладкая функция $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что функции $y(t)$, $u(t)$ удовлетворяют соотношениям (3).

Рассмотрим связь систем (3) и (2). Если число уравнений в системе (2) меньше числа производных, то все производные нельзя выразить из уравнений (2) через переменные y и представить в виде (1). Однако (по крайней мере, локально) это можно сделать за счет введения новых переменных. Пусть ранг якобиевой матрицы от функций h^k относительно производных dy^i/dt постоянен и равен q . Тогда по теореме о неявной функции, некоторые q производных, соответствующие расположению главного минора в указанной матрице, (локально) выражаются через y и остальные $n - q$ производных,

которые принимаются за новые параметрические переменные u . В результате соотношения (2) перейдут в соотношения (3). Обратно, аналогичным образом, используя теорему о неявной функции и предположение о постоянстве ранга якобиевой матрицы от функций f^i относительно переменных u , можно перейти от системы (3) к двойственной системе (2) исключением переменных u (т.е. выражением их через y , dy/dt из одних уравнений и подстановкой в другие уравнения). Заметим, что если система (3) аффинная, т.е. линейная по управлениям, то двойственная система (2) сводится к системе Пфаффа, что позволяет воспользоваться классическими методами теории систем Пфаффа для решения задач классификации систем вида (3) [3].

Отношение к объектам (3) именно как к системам с управлением сформировалось в прошлом веке, когда выяснилось, что некоторые реальные системы с управлением описываются такими соотношениями, причем функции $u(t)$ трактуются как внешние воздействия (управления). Как известно, для систем (1) первый интеграл $\Phi(t, y)$ должен удовлетворять условию:

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} + f^i(t, y) \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y^i} = 0, \quad \forall(t, y) \quad (4)$$

т.е. действие оператора полного дифференцирования по времени в силу системы (3) должно равняться нулю [1]. Здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Первым интегралом системы с управлением (3) также естественно назвать функцию $\Phi(t, y)$, принимающую постоянное значение на любых решениях, которые соответствуют всем допустимым управлениям $u(t)$. Таким образом, для таких функций $\Phi(t, y)$ должны выполняться соотношения:

$$\frac{d\Phi(t, y)}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + f^i(t, y, u(t)) \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y^i} = 0. \quad (5)$$

Алгоритм нахождения первых интегралов системы (3) основан на использовании некоторых ассоциированных с системой дифференциально-геометрических объектов [2]. Введем оператор полного дифференцирования по времени в силу системы (3)

$$X(u) = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (6)$$

и рассмотрим этот оператор как семейство с параметром u . Придавая управлению u различные постоянные допустимые значения $u \in U$, получаем различные операторы (векторные поля) в области M , образующие семейство полей в M , которое назовем ассоциированным. Выделим в этом семействе базисное подсемейство, т.е. подставим такие допустимые значения $u_0, u_1, \dots, u_p \in U$, что операторы

$$X_j \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f_j^i(t, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y^i}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (7)$$

где $f_j^i(t, y) = f^i(t, y, u_j)$, являются линейно независимыми, т.е. линейно независимы в каждой точке (t, y) , а подстановка в (6) любого допустимого u приводит к оператору, который линейно связано выражается через операторы $X_0, X_1, \dots, X_p$:

$$X(u) = f^j(t, y, u) X_j. \quad (8)$$

Таким образом, при любом допустимом управлении $u(t)$ оператор $X(u(t))$ линейно выражается через конечное число операторов X_j , не зависящих от управления. После выделения базисного семейства $X_0, X_1, \dots, X_p$, оно пополняется. Классическая процедура пополнения заключается в повторении нескольких шагов процедуры и правила завершения. Шаг процедуры заключается в вычислении коммутаторов $[X_j, X_k]$, $j, k = \overline{1, p}$. Если коммутатор линейно не связан с операторами семейства, он добавляется к нему; если же коммутатор линейно связан с обновленным семейством, то он отбрасывается. Шаг повторяется для семейства, расширенного за счет добавленных коммутаторов. Если на очередном шаге все вновь вычисленные коммутаторы отброшены, процедура завершается. В частности, процедура завершится, если после очередного шага количество операторов в семействе сравняется с размерностью фазового пространства. Итак, в результате пополнения получается полное семейство, состоящее из полей $X_0, X_1, \dots, X_p$, и некоторых полей:

$$X_k = \varphi_k^i(t, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad k = p + 1, \dots, m. \quad (9)$$

Поля (9) получены в результате вычисления коммутаторов полей (7), поэтому них отсутствует дифференцирование по независимой переменной t . Заметим, что число полей в базисном семействе конечно и не превышает число переменных (в данном случае $n + 1$).

Согласно теории полных систем [2], у такой системы имеется набор функционально независимых решений (интегральный базис) в количестве, равном разности между числом переменных и числом уравнений. Для системы (8)-(9) таковым является некоторый набор функций

$$\Phi^1(t, y), \dots, \Phi^{n-m}(t, y) \quad (10)$$

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} \right\|_{k=1, \dots, n-m; i=1, \dots, n} = n - m,$$

причем для любого интеграла $\Phi(t, y)$ справедливо представление:

$$\Phi(t, y) = G(\Phi^1(t, y), \dots, \Phi^{n-m}(t, y)), \quad (11)$$

где G – гладкая функция.

В окрестности точки y_0 определено семейство многообразий:

$$\Phi^k(y) - c^k = 0, \quad k = 1, \dots, m = n - p, \quad (12)$$

где $c^k = \text{const}$.

Сделаем (локальную) замену координат:

$$x^k = \Phi^k(t, y), \quad k = 1, \dots, n, \quad (13)$$

где $\Phi^k(t, y), k = 1, \dots, n - m$ – полный набор интегралов, а $\Phi^k(t, y), k = m + 1, \dots, n$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (13) была невырожденной.

В новой системе координат семейство многообразий (12) выглядит так:

$$x^k - c^k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (14)$$

а система (3) приобретает следующий вид:

$$\dot{x}^k = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (15)$$

$$\dot{x}^l = \bar{f}_0^l(t, x) + \bar{f}_\alpha^l(t, x)u^\alpha, \quad l = m + 1, \dots, n. \quad (16)$$

Первые интегралы совпадают с решениями системы уравнений, соответствующим всем ассоциированным операторам (6)

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} + f^i(t, y, u) \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y^i} = 0, \quad \forall (t, y) \quad \forall u \in U, \quad (17)$$

ибо тождественное выполнение равенств (17) влечет и выполнение всех равенств (5). С другой стороны решения системы (17) совпадают с решениями полной системы дифференциальных уравнений, которая соответствует полям (8), (9):

$$X_j \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f_j^i(t, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y^i} = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (18)$$

$$X_k \Phi = \varphi_k^i(t, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y^i} = 0, \quad k = p + 1, \dots, m. \quad (19)$$

Управляемость. Рассмотрим кратко вопрос о связи с управляемостью, ибо она достаточно очевидная (подробности в [2]). Свойство управляемости, попросту говоря, заключается в существовании траекторий, соединяющих любые точки в фазовом пространстве M . Достаточно очевидно, что необходимым условием управляемости является отсутствие первых интегралов. Особенно наглядно это проявляется в системе координат (15), (16), ибо ясно, что каждая траектория принадлежит одному из многообразий (14) (в зависимости от начального условия) и не может его покинуть.

2. Системы с распределенными параметрами

Рассмотрим сначала произвольные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad (20)$$

содержащие $t = (t^1, \dots, t^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ и производные от функций y^i первого порядка, причем используется обозначение $p = (\dots, \partial_k y^i, \dots)$, где $\partial_k y^i = \partial y^i / \partial x^k$. В дальнейшем предполагаем для простоты, что функции Λ_ν , а также все встречающиеся функции (в том числе решения) гладкие. Под гладкостью понимаем непрерывную бесконечную дифференцируемость. Считаем, что система (20) максимального ранга и матрица Якоби размера $(l \times mn)$ производных от функций Λ_ν по p имеет ранг l всюду, где $\Lambda(t, y, p) = 0$. При этом условии, соотношения (20) задают гладкое многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в пространстве переменных (t, y, p) , или, иначе говоря, в пространстве функций $y(t)$. Относительно системы (20) будем считать также, что она локально разрешима. (Система локально разрешима в точке $(x_0, y_0, p_0) \in \mathcal{S}_\Lambda$, если существует гладкое решение $y = f(t)$, определенное для t из некоторой окрестности точки t_0 , имеющее предписанные начальные условия $y_0 = f(t_0), p_0 = (\partial f / \partial t)_{t=t_0}$. Система называется локально разрешимой, если она локально разрешима в каждой точке многообразия $\mathcal{S}_\Lambda$.)

Уравнения (20) задают многообразие $\mathcal{S}_\Lambda$ в неявном виде. Это многообразие можно (в силу невырожденности) представить и в параметрическом виде (в некоторой локальной карте) путем разрешения (20) относительно максимального числа производных, причем если остальные (параметрические) производные обозначить через u как параметрические переменные типа $\partial_\delta y^\beta = u^\gamma$, то получим локальное представление $\mathcal{S}_\Lambda$ в параметрической форме, разрешенной относительно всех производных [4]:

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u) \quad (21)$$

Выберем локальную карту таким образом, что

$$t \in I \subset R^m, \quad y \in L \subset R^n, \quad u \in U \subset R^s, \quad (22)$$

где I, L, U – некоторые области. Такое представление произвольной системы дифференциальных уравнений с частными производными известно как специальный вид [4]. Если в систему (20) входят управляющие воздействия (т.е. это система управления с распределенными параметрами), то они переходят в параметрические переменные u в (22) и с математической точки зрения не отличаются от них. Заметим, что данное представление встречается в задаче оптимального управления систем с распределенными параметрами для вывода необходимых условий оптимальности [5].

Пример 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y^1}{\partial x_1} &= \frac{\partial y^2}{\partial x_1} x_2, & \frac{\partial y^2}{\partial x_2} &= y^1 y^2, \\ \frac{\partial y^1}{\partial x_2} &= y^2 (1 + x_2 y^1).\end{aligned}\quad (23)$$

Полагая $\partial y^2 / \partial x_1 = u$, запишем данную систему:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x_1} = u x_2, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x_1} = u, \quad (24)$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x_2} = y^2 (1 + x_2 y^1), \quad \frac{\partial y^2}{\partial x_2} = y^1 y^2. \quad (25)$$

Сравнивая (21) и (3), можно заметить определенную аналогию этих систем. Действительно, каждое решение $y(t)$ динамической системы (3) получается после подстановки в правую часть уравнений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны решения $y(t)$ системы (21) соответствуют некоторому выбору параметрической функции $u(t)$ также из некоторого класса. Однако есть существенное различие в классах допустимых <<управлений>>. Для динамических систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от класса кусочно-непрерывных функций до класса измеримых функций. Для систем (21) заранее задать класс допустимых <<управлений>> затруднительно, ибо далеко не каждый выбор функций $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, возможность несовместности полученной системы после подстановки $u(t)$. Тем не менее идеология теории управлений может быть полезна. Можно построить аналогичные ассоциированные дифференциально-геометрические объекты, с помощью которых исследовать, например, характеристики, присущие всем реализациям допустимых параметрических функций.

Также как и для обыкновенных дифференциальных уравнений введем понятие первого интеграла для систем (21). Гладкую функцию $\Phi(t, y)$ назовем первым интегралом системы (21), если на любом решении $y(t)$ этой системы она принимает постоянное значение:

$$\Phi(t, y(t)) = \text{const}.$$

Введенное определение первого интеграла, по существу, совпадает с определением для обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако оно практически не используется в литературе для уравнений с частными производными. Причина, видимо, в редкости случаев существования и отсутствия алгоритмов нахождения. Тем не менее,

если первые интегралы существуют и найдены, то это может существенно упростить исследование систем уравнений (снизить порядок-см. (30)), причем существование интегралов проверяется несложно с помощью предлагаемого аппарата, который может быть использован и для изучения более сложных декомпозиций, чем (30).

В силу гладкости рассматриваемых функций, условием того, что функция $\Phi(t, y)$ есть первый интеграл, является тождественное равенство нулю производных по всем независимым переменным от этой функции в силу каждого решения системы (21):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t^k} + f_k^i(t, y(t), u(t)) \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y^i} &\equiv 0, \quad t \in I, \\ k &= 1, \dots, m.\end{aligned}\quad (26)$$

(Напоминаем, что по повторяющемуся индексу производится суммирование.)

Введем ассоциированные семейства векторных полей (операторов) C_k , $k = 1, \dots, m$, в области $I \times M$. Каждое семейство C_k состоит из векторных полей

$$\frac{\partial}{\partial t^k} + f_k^i(t, y, u) \frac{\partial}{\partial y^i} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (27)$$

с фиксированным $k = 1, \dots, m$, где u пробегает все множество постоянных значений из U . Объединение этих семейств обозначим через C_0 .

Теорема. *Функция $\Phi(t, y)$ является первым интегралом тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t^k} + f_k^i(t, y, u) \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y^i} &\equiv 0, \\ t \in I, \quad k &= 1, \dots, m., \quad (t, y) \in M, \quad u \in U.\end{aligned}\quad (28)$$

Доказательство. Достаточность очевидна, ибо выполнение (28) для всех $(t, y) \in M, u \in U$ влечет (26). Необходимость вытекает из условия локальной разрешимости. Действительно, возьмем первый интеграл $\Phi(t, y)$, точки $t_0 \in I, y_0 \in M, u_0 \in U$ и соответствующее гладкое решение $y(t)$, такое, что $y(t_0) = y_0, u(t_0) = u_0$. Из (26) для этого решения следует (28) при $t_0 \in I, y_0 \in M, u_0 \in U$.

Из предыдущего раздела, посвященного динамическим системам следует алгоритм проверки существования и нахождения первых интегралов. Нужно выделить в каждом ассоциированном семействе (27) максимальное число линейно несвязанных векторных полей. Объединить эти поля и пополнить в области изменения переменных $I \times M$. Если число полей s в полученном полном семействе меньше числа переменных $n + m$, то нетривиальные первые интегралы существуют, причем число функционально независимых интегралов равно $n + m - s$. Они находятся с помощью решения соответствующей полной системы дифферен-

циальных уравнений. Если сделать (локальную) замену зависимых переменных

$$x^k = \Phi^k(t, y), \quad k = 1, \dots, n, \quad (29)$$

где $\Phi^k(y)$, $k = 1, \dots, q$ – независимые интегралы, а $\Phi^k(y)$, $k = q + 1, \dots, n$, – произвольные функции, выбранные таким образом, чтобы замена координат (30) была невырожденной, то в новой системе координат система (21) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_k x^i &= 0, \quad i = 1, \dots, q, \\ \partial_k x^j &= h_k^j(t, x, u), \quad j = q + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (30)$$

Пример 2. Рассмотрим систему (24)-(25) из Примера 1, где переменная u трактуется как управляющее воздействие. Семейство C_0 состоит из двух подсемейств:

$$\begin{aligned} X_{1u} &= \frac{\partial}{\partial x^1} + ux^2 \frac{\partial}{\partial y^1} + u \frac{\partial}{\partial y^2}, \\ X_{2u} &= \frac{\partial}{\partial x^2} + y^2(1 + x^2 y^1) \frac{\partial}{\partial y^1} + y^1 y^2 \frac{\partial}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

т.е. второе подсемейство состоит из одного поля. Легко видеть, что поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ образуют линейно несвязанное подсемейство D семейства C_0 . Вычисляя коммутаторы, получим:

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_2] &= 0, [Y_1, Y_3] = 0, [Y_2, Y_3] = \\ &= (x^2 y^2 + y^1) Y_2 - (x^2 + y_1) Y_1. \end{aligned}$$

Таким образом, поля $Y_1 = X_{10}$, $Y_2 = X_{11}$, $Y_3 = X_{2u}$ составляют полное семейство, т.е. процесс пополнения заканчивается на первом шаге и семейство D полное. Соответствующая полная система дифференциальных уравнений имеет решение $\Phi(x, y) = y^2 x^2 - y^1$, т.е. первый интеграл.

Управляемость. Формально задача управляемости здесь возникает аналогично случаю динамических систем как возможность существования решений, удовлетворяющим различным допустимым граничным условиям, хотя они по форме мо-

гут существенно отличаться от случая систем с сосредоточенными параметрами, ибо состояния могут трактоваться, например, как элементы банахова пространства [6]. С другой стороны возможны и условия на конкретные значения выходных переменных u , скажем в задачах финитного управления, например, в задаче <<успокоения>> струны [6]. В любом случае, по тем же соображениям (как и в случае систем с сосредоточенными параметрами) и из представления систем в виде (30) вытекает условие отсутствия первых интегралов, как необходимое условие управляемости (причем в разных определениях).

Заключение

В работе исследована проблема управляемости для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами на основе понятия первого интеграла.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа. 1985. 240 с.
2. Яковенко Г.Н. Теория управления регулярными системами. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 264 с.
3. Елкин В.И. Управляемые динамические системы и недоопределенные системы дифференциальных уравнений// Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 28–38.
4. Раиевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными М.: Гостехиздат. 1947. 354 с.
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физике. М.: Наука. 1975. 480 с.
6. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука. 1975. 568 с.

Елкин Владимир Иванович. Вычислительный центр Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» г. Москва, Россия. Заведующий отделом, доктор физико-математических наук, профессор. Количество печатных работ: 100 (в т.ч. 10 монографий). Область научных интересов: теория управления, дифференциальные уравнения, информационные технологии. E-mail: elk_v@mail.ru

On a condition of controllability for control dynamical and distribution parameter systems

V.I. Elkin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The relationship of concepts of first integral and controllability for control dynamical and distribution parameter systems is discussed.

Keywords: *control systems, underdetermined systems of ordinary differential equations, first integral, controllability.*

DOI: 10.14357/20790279220402

References

1. *Arnold V.I.* Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer Science & Business Media. 1992. 338 p.
2. *Yakovenko G.N.* Teoriya upravleniya regulyarnymi sistemami (Control Theory of Regular Systems), Moscow: Binom. Lab. Znaniy. 2008 (in Russ.). 264 p.
3. *Elkin V.I.* Controllable dynamic systems and underdetermined systems of differential equations, *Avtomat. i Telemekh.* 2011. No. 9. 28–38
4. *Rashevsky P.K.* Partial Differential Equations: A Geometric Theory. Moscow: Gostekhizdat, Leningrad. 1947. 354 p. (In Russ.)
5. *Lurie K.A.* Optimal control in Problems of Mathematical Physics. Moscow: Nauka Publ. 1975. 480 p. (In Russ.)
6. *Butkovsky A.G.* Methods of Control Systems with Distributed Parameters. Moscow: Nauka Publ. 1975. 568 p. (In Russ.)

Elkin V.I. Head of the Department, PhD, Professor, Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: elk_v@mail.ru