О природе скрытых аттракторов в нелинейных автономных системах дифференциальных уравнений*

Н.А. Магницкий

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. В работе на примере проведенного аналитического и численного анализа бифуркаций циклов системы уравнений, содержащей «скрытый» аттрактор, показано, что переход к хаосу в системе происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом, вследствие отсутствия особых точек и, следовательно, отсутствия гомоклинических и гетероклинических сепаратрисных контуров, в системе реализуется несколько неполных ФШМ-каскадов бифуркаций, формирующих бесконечно листную поверхность двумерного гетероклиничнеского сепаратрисного многообразия (сепаратрисного зигзага), содержащего как все сингулярные аттракторы системы, так и все ее неустойчивые предельные циклы.

Ключевые слова: *диссипативные системы, бифуркации, динамический хаос, скрытый аттрактор, теория ФШМ.*

DOI: 10.14357/20790279230302

Введение

В современной литературе по нелинейной и хаотической динамике широко используется понятие «скрытого» аттрактора автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в том случае, когда система вместе с нерегулярным аттрактором либо вообще не имеет особых точек (см. [1-3]), либо имеет устойчивые особые точки (см. [4-6]). Авторы таких работ пытаются охарактеризовать «скрытый» аттрактор вычислением одного или нескольких положительных показателей Ляпунова, вычислением размерности Каплана-Йорке или доказательством существования подковы Смейла. Однако, как следует из результатов автора и как продемонстрировано на многочисленных примерах в работах [7-10], существует один универсальный бифуркационный сценарий перехода к хаосу во всех без исключения системах нелинейных дифференциальных уравнений: автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом.

Это сценарий Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого, начинающийся каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода цикла или тора и продолжающийся субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского и гомоклиническим (или гетероклиническим) каскадом бифуркаций Магницкого. Все рождающиеся в ходе реализации такого сценария нерегулярные аттракторы являются исключительно сингулярными аттракторами, то есть непериодическими ограниченными почти устойчивыми траекториями в конечномерном или бесконечномерном фазовом пространстве, в любой окрестности которых содержится бесконечное число неустойчивых периодических траекторий. При этом доказано, что любой сингулярный циклический аттрактор, порожденный ФШМ – каскадом бифуркаций сингулярного цикла, принадлежит замыканию его неустойчивого двумерного инвариантного многообразия (сепаратрисной поверхности), являющегося бесконечно листным складчатым гетероклиническим сепаратрисным зигзагом, натянутым на сепаратрисное дерево (листы Мебиуса) каскада Фейгенбаума и следующих за ним каскадов бифуркаций [7-8]. Следовательно, на любом сингулярном аттракторе (почти устойчивой непериодической траектории) старший характеристический показатель Ляпунова равен нулю. Эффект положительности показателя Ляпунова

* Работа поддержана Российским Научным Фондом (гранты 23-21-00095 и 23-21-00107).

является исключительно следствием ошибок вычислений, так как из-за наличия всюду плотного множества непериодических и периодических неустойчивых траекторий численное движение возможно только по всей области, в которой расположена траектория сингулярного аттрактора, а не по самой его траектории. Кроме того, численный показатель Ляпунова будет также положительным и при движении по устойчивой периодической траектории большого периода, находящейся в окрестности какого-либо сингулярного аттрактора. Таким образом, ошибочно найденные численно положительные показатели Ляпунова не являются характеристикой хаотического движения по «скрытому» аттрактору. Кроме того, доказано, что движение по сложному сингулярному аттрактору в окрестности петли сепаратрисы седло-фокуса или других гомоклинических и гетероклинических сепаратрисных контуров не может быть описано ни подковой Смейла, ни даже бесконечным числом таких подков.

Целью настоящей статьи является показать, что «скрытый» аттрактор, рассмотренный в работе [3], также является обычным сложным сингулярным аттрактором, порожденным каскадом бифуркаций по сценарию ФШМ.

1. Аналитическое исследование

Рассмотренная в работе [1] система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{x} = a(y - x) - w, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = b - xy, \quad \dot{w} = x. \quad (1)$$

При этом «скрытый» аттрактор найден авторами работы [3] в системе (1) при $a = 4$, $b = 40$, а якобы положительный показатель Ляпунова вычислен в MATLAB интегрированием уравнений системы методом Рунге-Кутта четвертого порядка, что, как отмечено выше, является абсолютно бессмысленной процедурой и не является характеристикой аттрактора.

То, что система (1) должна иметь какой-либо аттрактор при всех $a > 0$, следует из ее диссипативности, так как для дивергенции ее правой части $\boldsymbol{F}(x, y, z, w)$ имеет место:

$$div\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial w}\right) = -a < 0.$$

Обычно сложный сингулярный аттрактор рождается в результате ФШМ-каскада бифуркаций устойчивого цикла или тора, которые сами рождаются в результате одной или двух бифуркаций Андронова-Хопфа из первоначально устойчивой особой точки. Ясно, что этот сценарий не проходит для системы (1), так как она вообще не имеет особых точек при $b \neq 0$. В этом случае ее правые части не могут равняться нулю одновременно. Тем не менее численно покажем, что найденный в системе «скрытый» аттрактор также является сложным сингулярным аттрактором ФШМ-каскадов бифуркаций по параметру a некоторых изначально устойчивых предельных циклов системы (1), не рожденных из особых точек в результате бифуркаций Андронова-Хопфа, а рожденных в результате седло-узловых бифуркаций.

2. Численный анализ

Исследование динамики решений системы (1) проведем численными методами при $b = 40$ и при уменьшении значений бифуркационного параметра $a < 15.5$. Численный анализ показывает, что при $a = 15.48$ система имеет три устойчивых предельных цикла, на которые можно выйти интегрированием уравнений системы с различными начальными условиями. На рис. 1 показаны проекции этих циклов на плоскость (x, z). При уменьшении параметра a центральный симметричный цикл претерпевает бифуркацию типа вилки, оставаясь неустойчивым в системе. А с двумя родившимися при этом устойчивыми предельными циклами происходят каскады бифуркаций в полном соответствии с теорией ФШМ. Так, устойчивые циклы периода два наблюдаются при $a = 13.5$, периода четыре – при $a = 13.37$, периода восемь –

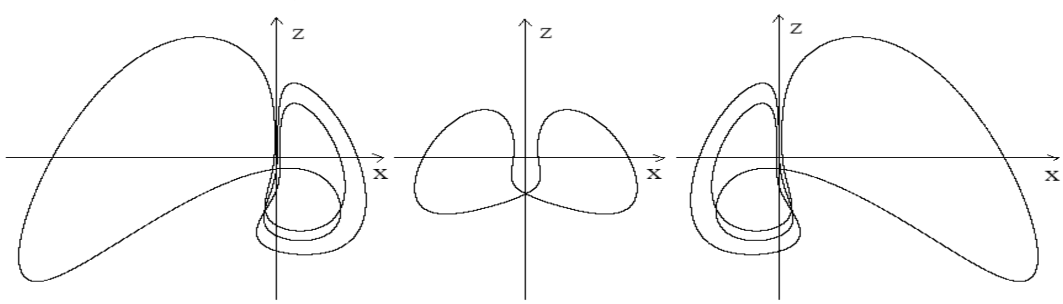

Рис. 1. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов системы (1) при $a = 15.48$

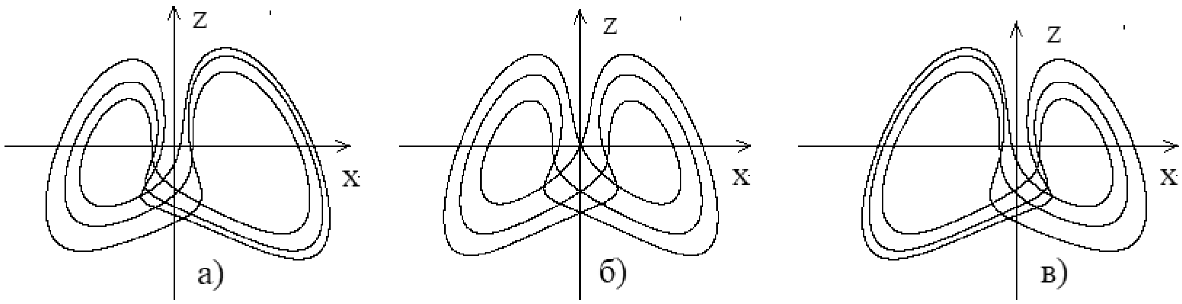

Рис. 2. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов периода три каскадов Шарковского при a = 12.71 (а,в) и a = 10.3 (б)

при a = 13.36, первые сингулярные аттракторы Фейгенбаума – при a = 13.34. Циклы периода три, завершающие субгармонические каскады бифуркаций Шарковского можно наблюдать при a = 12.71 (рис. 2,а,в).

Дальнейшее усложнение динамики решений системы происходит, как и в системе уравнений Лоренца, посредством слияния двух лент гетероклинических сепаратрисных многообразий, содержащих все неустойчивые циклы, с появлением каскада бифуркаций гетероклинических циклов. Один из устойчивых гетероклинических циклов, найденный при a = 10.3, изображен на рис. 2,б.

При дальнейшем уменьшении значений параметра a происходит рождение в результате седло-узловых бифуркаций новых устойчивых циклов, найденных при a = 10.1 и показанных на рис. 3. С циклами, изображенными на рис. 3а и рис. 3,г происходят бифуркации удвоения периодов при a = 9.95 и затем полные субгармонические каскады бифуркаций Шарковского. Циклы, изображенные на рис.3,б и рис.3,в остаются устойчивыми до a = 9.25, а затем также претерпевают полные субгармонические каскады бифуркаций Шарковского.

На рис.4. показаны найденные при a = 8.767 устойчивые циклы периодов три, завершающие субгармонические каскады бифуркаций Шарковского, начало которым положено циклами, изображенными на рис. 3,б и 3,в.

Таким образом, так называемый «скрытый» аттрактор, найденный в системе (1) при a = 4, является следствием нескольких бесконечных каскадов бифуркаций в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого при уменьшении значений бифуркационного параметра a. То есть «скрытый» аттрактор системы не является каким-то особенным видом нерегулярных аттракторов, но точно так же, как и в любых других трехмерных и многомерных нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений, он является одним из бесконечного числа сингулярных аттракторов системы. Так как все циклы, рождающиеся и становящиеся неустойчивыми на всех стадиях всех ФШМ-каскадов бифуркаций, не исчезают, а остаются в системе, то сложность сингулярных аттракторов системы (1) существенно возрастает при уменьшении параметра a, а области устойчивости рождающихся в результате седло-узловых бифуркаций новых устойчивых циклов значительно уменьшаются, что существенно ограничивает возможность их численного нахождения при $a \gtrsim 4$. Хотя, несомненно, такие устойчивые циклы должны существовать и в интервале

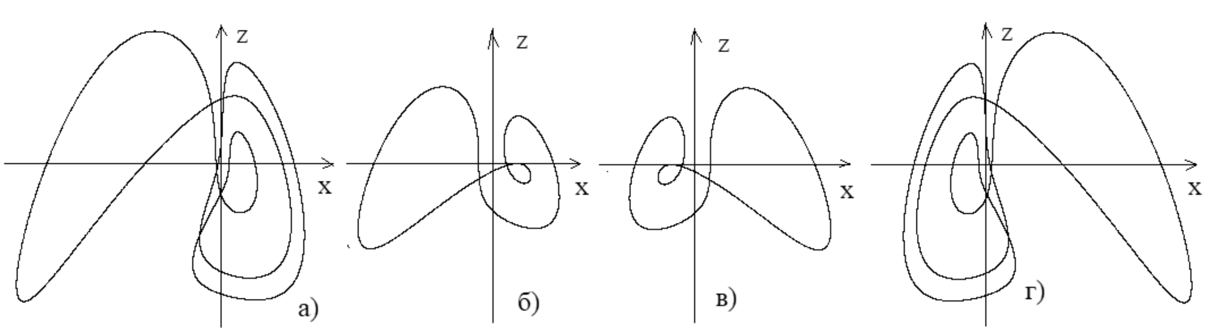

Рис. 3. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов системы (1) при a = 10.1

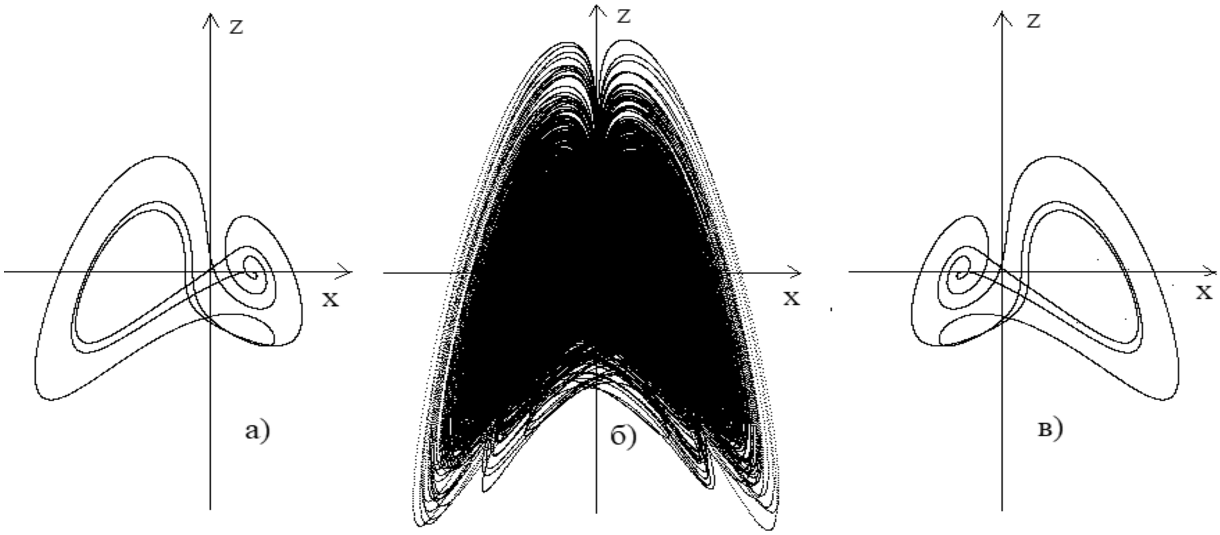

Рис. 4. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов системы (1) периода три из каскадов Шарковского при a = 8.767 (4,а и 4,в) и «скрытого» аттрактора при a = 4 (4,б)

$4 < a < 8.7$. Симметричность «скрытого» аттрактора относительно оси z и рождающихся на всех стадиях всех каскадов бифуркаций пар симметричных циклов вытекает из симметрии уравнений системы (1): $x \to -x, y \to -y, z \to -z, w \to -w$.

Заключение

В работе проведено численное исследование природы «скрытых» аттракторов нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений на примере нерегулярного аттрактора системы (1). Показано, что переход к аттрактору в данной нелинейной системе дифференциальных уравнений происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом, вследствие отсутствия особых точек и, следовательно, гомоклинических и гетероклинических сепаратрисных контуров, в системе реализуется несколько неполных ФШМ-каскадов бифуркаций, формирующих бесконечно листную поверхность двумерного гетероклиничнеского сепаратрисного многообразия (сепаратрисного зигзага), содержащего как все сингулярные аттракторы системы, так и все ее неустойчивые предельные циклы. Старший характеристический показатель Ляпунова на любом сингулярном аттракторе системы является нулевым, а его найденные численно положительные значения лишь результатом ошибок вычислений.

Литература

1. *Pham V. T., Volos Ch. K., Jafari S. and Kapitaniak T.* Coexistence of hidden chaotic attractors in a novel no-equilibrium system // Nonlinear Dynamics 2017. V 87. No.3. P. 2001–2010.
2. *Zuo Z. L. and Li C.* Multiple attractors and dynamic analysis of a no-equilibrium chaotic system // Optik. 2016. V. 127. No. 19. P. 7952–7957.
3. *Sambas1 A., Mamat M., Vaidyanathan S., Mohamed M. A. and MadaSanjaya W. S.* A New 4-D Chaotic System with Hidden Attractor and its Circuit Implementation // Int. J. Eng. & Tech. 2018. V.7. No.3. P. 1245-1250
4. *Wang X., Chen G.R.* A chaotic system with only one stable equilibrium // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. No. 17. P.1264-1272.
5. *Huan S., Li Q., Yang X.-S.* Horseshoes in a chaotic system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2013. Vol. 23. No. 1. 1350002.
6. *Wei Z., Zhang W.* Hidden hyperchaotic attractors in a modified lorenz-stenflo system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. V. 24, No. 10. 1450127.
7. *Магницкий Н.А.* О топологической структуре сингулярных аттракторов нелинейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1551–1560.
8. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Ленанд. 2011. 320 с.
9. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.

10. *Magnitskii N.A*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P.197-215

Магницкий Николай Александрович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети, интегральные уравнения, математическое моделирование. E-mail: nikmagn@gmail.com

On the nature of hidden attractors in nonlinear autonomous systems of differential equations

N.A. Magnitskii

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Using the example of the performed analytical and numerical analysis of cycle bifurcations of a system of equations containing a "hidden" attractor, it is shown that the transition to chaos in the system occurs, as in any other nonlinear chaotic systems of differential equations, in accordance with the universal Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii bifurcation scenario. At the same time, due to the absence of singular points and, consequently, the absence of homoclinic and heteroclinic separatrix contours, several incomplete FShM cascades of bifurcations are realized in the system, forming an infinitely sheeted surface of a two-dimensional heteroclinic separatrix manifold (separatrix zigzag) containing both all singular attractors of the system and all its unstable limit cycles.

Keywords: *dissipative systems, bifurcations, dynamic chaos, "hidden" attractor, FShM theory.*

DOI: 10.14357/20790279230302

References

1. *Pham V. T., Volos Ch. K., Jafari S. and Kapitaniak T.* Coexistence of hidden chaotic attractors in a novel no-equilibrium system // Nonlinear Dynamics 2017. V 87. No.3. P. 2001–2010.
2. *Zuo Z. L. and Li C.* Multiple attractors and dynamic analysis of a no-equilibrium chaotic system // Optik. 2016. V. 127. No. 19. P. 7952–7957.
3. *Sambas1 A., Mamat M., Vaidyanathan S., Mohamed M. A. and MadaSanjaya W. S.* A New 4-D Chaotic System with Hidden Attractor and its Circuit Implementation // Int. J. Eng. & Tech. 2018. V.7. No.3. P. 1245-1250
4. *Wang X., Chen G.R.* A chaotic system with only one stable equilibrium // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. No. 17. P.1264-1272.
5. *Huan S., Li Q., Yang X.-S.* Horseshoes in a chaotic system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2013. Vol. 23. No. 1. 1350002.
6. *Wei Z., Zhang W.* Hidden hyperchaotic attractors in a modified lorenz-stenflo system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. V. 24, No. 10. 1450127.
7. *Magnitskiy N.A.* O topologicheskoy strukture singulyarnykh attraktorov nelineynykh sistem differentsial'nykh uravneniy // Differents. uravneniya. 2010. T. 46. № 11. P. 1551–1560.
8. *Magnitskiy N.A.* Teoriya dinamicheskogo khaosa. M.: Lenand, 2011. 320 p.
9. *Magnitskii N.A.* Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
10. *Magnitskii N.A*. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeka: InTech. 2018. P.197-215

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova Str., Moscow. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks, integral equations, mathematical modeling. E-mail: nikmagn@gmail.com