Приближение Гирсановской меры с логарифмической доходностью в случае тяжелохвостных распределений

А.Р. Данилишин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Аннотация. Статья посвящена дальнейшему развитию темы применения расширенного принципа Гирсанова для тяжелохвостных распределений. Расширенный принцип Гирсанова предполагает поиск условного математического ожидания отношения цен базовых активов опционных контрактов в текущий момент времени к ценам базовых активов в предыдущий момент времени. Для этого необходимо выбрать соответствующую модель, которая будет наилучшим способом описывать динамику данного отношения цен. В качестве объекта моделирования принято рассматривать либо линейную доходность, либо логарифмическую. Риск-нейтральная динамика для распределения с тяжелым хвостом (Su Джонсона) в случае моделирования линейной доходности была получена в статье [1]. В статье [2], была показана эффективность найденного подхода оценки опционных контрактов с помощью полученной мартингальной меры. Однако может возникнуть необходимость использования логарифмической доходности, которая обладает рядом полезных свойств (неотрицательность цен базовых активов, симметричность относительно роста и падения цен). В данной статье получена мартингальная мера для случая, где рассматривается приближение логарифмической доходности, которое в простейшем случае совпадает с линейной доходностью и по мере увеличения степени приближения стремится к логарифмической.

Ключевые слова: *ARIMA-GARCH, мартингальная мера; расширенный принцип Гирсанова, распределение Su Джонсона.*

DOI: 10.14357/20790279230303

Введение

ARIMA (p, d, q) – GARCH (r, g) (AutoRegressive Integrated Moving Average – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) модель является комбинацией двух популярных статистических моделей – ARIMA и GARCH. Она используется для анализа и прогнозирования временных рядов, в основном, в финансовой экономике. Ее широкое применение в современных методах описания ценовой динамики связано с несколькими ключевыми факторами. Прежде всего, ценообразование производных финансовых инструментов, таких как опционы или фьючерсы, тесно связано с двумя основными аспектами: направлением изменения базового актива и его волатильностью. ARIMA-GARCH модель предоставляет инструменты для анализа и прогнозирования обоих факторов. Авторегрессионная (AR) и скользящая средняя (MA) компоненты ARIMA-модели позволяют учесть тренды и особенности ценового движения базового актива. В то же время, GARCH-модель учитывает изменчивость и волатильность, которые могут существенно влиять на цены производных инструментов. Использование ARIMA-GARCH модели в различных методиках получения риск-нейтральных динамик цен открывает широкие возможности для анализа безарбитражных стратегий и оценки производных финансовых инструментов [3, 4]. Модель ARIMA – GARCH имеет следующий вид:

$$\Delta^d Y_t = m_t + h_t\varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim iid(0,1), h_t > 0,$$

$$m_t = \mathbb{E}[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \phi_0 + \phi_1\Delta^d Y_{t-1} +$$

$$+ \dots + \phi_p\Delta^d Y_{t-p} + \theta_1\varepsilon_{t-1} + .. + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

$$h_t^2 = Var[\Delta^d Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1}^2 +$$

$$+ \alpha_r h_{t-r}^2 + \dots + \beta_1 h_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_g h_{t-g}^2\varepsilon_{t-g}^2,$$

где

- p – порядок авторегрессии, r – порядок ARCH членов, m_t – ARIMA часть модели;

- q – порядок скользящего среднего, g – порядок GARCH членов, h_t^2 – GARCH часть модели;
- d – порядок разности временного ряда;
- $\phi_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i$ – параметры модели.

Безарбитражность рынка является ключевым концептом в финансовой экономике. Безарбитражность означает отсутствие возможности получения безрисковой прибыли путем использования несовершенств или неэффективностей рынка. Рынок считается безарбитражным если не существует таких торговых стратегий, которые гарантированно приносят прибыль без какого-либо риска. Условие безарбитражности формализуется через понятие мартингальных мер. Мартингальная мера ($\mathbb{Q}$) – это вероятностная мера, при которой дисконтированные цены активов (последовательность $\tilde{S}_t$) представляют собой мартингалы, то есть математическое ожидание будущих цен равно текущим ценам. Здесь $\tilde{S}_k = e^{-rk} S_k$ – дисконтированные цены активов (r – безрисковая процентная ставка). Если на рынке существует мартингальная мера, эквивалентная исходной (основной) мере вероятности ($\mathbb{P}$), то рынок безарбитражен, так как отсутствуют возможности для получения безрисковой прибыли. Однако в случае неполного рынка, когда доступны не все активы или инструменты, безарбитражность может быть определена иначе. В таких условиях безарбитражность рынка равносильна существованию нескольких эквивалентных мартингальных мер, при которых цены активов представляют собой мартингалы. На неполном рынке может существовать неопределенность в оценке риска и доходности активов, и различные мартингальные меры могут представлять различные взгляды на будущую динамику цен.

Одним из подходов к получению мартингальной меры из физической для неполного рынка является использование расширенного принципа Гирсанова [5]. В этом случае мартингальная мера получается естественным путем как мера, которая обеспечивает минимум квадрата скорректированных на риск затрат хеджирования опционного контракта. Формально задачу поиска такой меры можно представить в следующем виде.

Найти стратегию хеджирования $\pi = (\eta_t, t = 1, \ldots, T)$, где η_t – количество единиц базового актива , которое агент динамически меняет каждый день (затрачивая на это капитал в размере $c_t(\tilde{S}_t)$), реализующая

$$\min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[c_t^2(\tilde{S}_t) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right], \forall t = 1, \ldots, T,$$

что соответствует выбору замены меры с плотностью (доказательство приведено в статье Elliott R. J., Madan D. B. “A discrete time equivalent martingale measure” [5]):

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{T} \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) e^{v_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(e^{-v_k} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)},$$

где

- $\mathcal{F}_{t-1}$ – фильтрация вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- $W_k = M_k / M_{k-1}$ (M_k – мартингальный случайный процесс);
- $\tilde{S}_k = e^{-rk} S_k$ – дисконтированные цены базовых активов (r – безрисковая процентная ставка);
- $g_{W_k}^{\mathbb{P}}(*)$ – условная плотность распределения случайного процесса W_k;
- $v_k = -r + \ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_k}{S_{k-1}} \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right]\right)$.

При этом динамика дисконтированных цен базовых активов задается уравнением $\tilde{S}_k = \tilde{S}_{k-1} e^{v_t} W_t$. Полученный выше случайный процесс Z_t является производной Радона-Никодима и позволяет совершать переход от физической меры к риск-нейтральной.

Для обеспечения стационарности моделируемого ряда в финансовой математике принято рассматривать логарифмическую доходность цен базовых активов $Y_k = \ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right)$. Тогда переход к мартингальной мере можно осуществить через условную плотность распределения $f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(*)$ случайного процесса Y_k:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}\left(Y_k - r + \ln\left(M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)\right)\right)}{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(Y_k)}.$$

Здесь значение производящей функции моментов в точке один $\left(M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)\right)$ следует из v_k, где

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_k}{S_{k-1}} \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\ln\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right)} \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_k} | \mathcal{F}_{k-1}].$$

Как известно, для тяжелохвостных распределений не существует производящей функции моментов в точках отличных от нуля [6, 7], поэтому оценить $M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)$ не представляется возможным. Для решения этой проблемы в статье [1] было предложено моделировать относительные приращения цены базовых активов $\tilde{Y}_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ (модификация расширенного принципа Гирсанова), тогда ARIMA ($\widetilde{m}_t$) – GARCH ($\tilde{h}_t$) случайный процесс [8,9] $\left(\tilde{Y}_t = \widetilde{m}_t + \tilde{h}_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim iid(0,1)\right)$ по мартингальной мере будет иметь следующий вид (p – количество начислений риск-нейтральной ставки за год):

$$\tilde{Y}_t = \left(1+\frac{r}{p}\right)^p - 1 + \tilde{h}_t \frac{\left(1+\frac{r}{p}\right)^p}{1+\widetilde{m}_t} \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim iid(0,1).$$

В статье [2] показано, что данный подход дает хорошие результаты для задачи оценивания справедливой стоимости опционных контрактов. Однако может возникнуть прикладная задача, где в качестве объекта моделирования необходимо рассматривать логарифмическую доходность, которая в случае тяжелохвостных распределений не дает возможности применить расширенный принцип Гирсанова. В данной статье рассматривается поиск мартингальной меры с использованием первых членов разложения логарифмической доходности в ряд Тейлора.

Статья построена следующим образом. В Разделе 1 рассматривается подход к обобщению модификации расширенного принципа Гирсанова и доказываются основные теоремы, необходимые для перехода от физической меры к мартингальной. В Разделе 2 показаны частные случаи приближений логарифмической доходности.

1. Обобщение модификации расширенного принципа Гирсанова

Согласно второму замечательному пределу $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Y_k}{n}+1\right)^n = e^{Y_k} = \frac{S_k}{S_{k-1}}$, тогда, если в качестве моделируемой величины рассматривать $\tilde{Y}_k = \left(\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)n$, то по мере роста n (где n – степень приближения), величина $\tilde{Y}_k$ будет стремиться к логарифмической доходности Y_k. Выбор $\tilde{Y}_k$ в качестве моделируемого объекта является обобщением модификации расширенного принципа Гирсанова [1], т.к. при n = 1, мы получим линейную доходность, а по мере роста n мы будем приближаться к логарифмической доходности.

Рассматриваемые доходности Y_k и $\tilde{Y}_k$ при использовании одной модели могут по-разному описывать динамику отношения цен базовых активов (т.к. оцененные параметры модели могут отличаться), что, в свою очередь, даст разные мартингальные меры. Эти меры будут приблизительно обеспечивать минимум квадрата скорректированных на риск затрат хеджирования портфеля активов. Данное приближение будет стремиться к истинному минимуму по мере приближения построенной физической меры к истинной мере отношения цен базовых активов.

Теорема 1. Случайный процесс Z_t, выраженный через условную плотность распределения $g^{\mathbb{P}}_{W_t}$ случайного процесса W_t, можно представить через условную плотность распределения $f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}$ по фильтрации $\mathcal{F}_{t-1}$ случайного процесса $\tilde{Y}_t$:

$$\prod_{k=1}^{t} \frac{g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)e^{v_k}}{g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)} =$$

$$\prod_{k=1}^{t} e^{\frac{v_k}{n}} \frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)e^{\frac{v_k}{n}} - 1\right)n\right)}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\tilde{Y}_k\right)}.$$

Представим выражение для $g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)$ через условную плотность распределения $f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}$:

$$g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) = \frac{dP(W_k < a)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \frac{dP\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}e^{-v_k} < a\right)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$
$$= \frac{dP\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} < ae^{v_k+r}\right)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \frac{dP\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)^n < ae^{v_k+r}\right)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$
$$= \frac{dP\left(\tilde{Y}_k < \left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}} - 1\right)n\right)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}}-1\right)n\right)_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}\frac{dP\left(\left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}}-1\right)n\right)}{da}\Big|_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)e^{\frac{v_k}{n}}-1\right)n\right)\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)^{1-n}e^{\frac{v_k}{n}+r}\right).$$

Проделаем аналогичные преобразования для знаменателя $g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)$:

$$g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) = \frac{dP(W_k<a)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= \frac{dP\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}e^{-v_k}<a\right)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}\frac{dP\left(\frac{S_k}{S_{k-1}}<ae^{v_k+r}\right)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= \frac{dP\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)^{n}<ae^{v_k+r}\right)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \frac{dP\left(\tilde{Y}_k<\left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}}-1\right)n\right)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}}-1\right)n\right)_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}\frac{dP\left(\left(a^{\frac{1}{n}}e^{\frac{v_k+r}{n}}-1\right)n\right)}{da}\Big|_{a=e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}}$$

$$= f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}(\tilde{Y}_k)\left(\left(\tilde{Y}_k+1\right)^{1-n}e^{v_k+r}\right).$$

Окончательно получим:

$$\frac{g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)e^{v_k}}{g^{\mathbb{P}}_{W_k}\left(e^{-v_k}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)} = \frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)e^{\frac{v_k}{n}}-1\right)n\right)\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)^{1-n}e^{\frac{v_k}{n}+r}\right)e^{v_k}}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}(\tilde{Y}_k)\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)^{1-n}e^{v_k+r}\right)}$$

$$= e^{\frac{v_k}{n}}\frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_k}{n}+1\right)e^{\frac{v_k}{n}}-1\right)n\right)}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_k}(\tilde{Y}_k)}.$$

Теорема 2. Случайный процесс $\tilde{Y}_t = \tilde{m}_t + \tilde{h}_t\varepsilon_t$, где $\tilde{m}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]$, $\tilde{h}_t^2 = Var^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]$, описываемый ARIMA-GARCH моделью по физической мере, при переходе к мартингальной мере будет иметь следующий вид:

$$\tilde{Y}_t = (\tilde{m}_t+n)e^{-\frac{v_t}{n}} - n + e^{-\frac{v_t}{n}}\tilde{h}_t\varepsilon_t,\ \varepsilon_t\sim iid(0,1),$$
$$v_t = -r + \ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\tilde{Y}_t+1\right)^n\Big|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right).$$

Найдем условное математическое ожидание по мартингальной мере:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t e^{\frac{v_t}{n}} \frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(\tilde{Y}_t)}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_t e^{\frac{v_t}{n}} \frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(\tilde{y}_t)} f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(\tilde{y}_t)d\tilde{y}_t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_t e^{\frac{v_t}{n}} f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left(\left(\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)d\tilde{y}_t,$$

сделаем замену $u_t = \left(\left(\frac{\tilde{y}_t}{n}+1\right)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n$, тогда $\tilde{y}_t = \left(\left(\frac{u_t}{n}+1\right)e^{-\frac{v_t}{n}}-1\right)n$, $d\tilde{y}_t = e^{-\frac{v_t}{n}}du_t$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_t e^{\frac{v_t}{n}} f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left(\left(\left(\frac{\tilde{y}_t}{n}+1\right)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)d\tilde{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{u_t}{n}+1\right)e^{-\frac{v_t}{n}}-1\right)n f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(u_t)du_t$$

$$= \left(\left(\frac{\tilde{m}_t}{n}+1\right)e^{-\frac{v_t}{n}}-1\right)n.$$

Найдем условное математическое ожидание квадрата $\tilde{Y}_t$ по мартингальной мере:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^2 e^{\frac{v_t}{n}} \frac{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left(\left((\tilde{Y}_t+1)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)}{f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(\tilde{Y}_t)}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_t^2 e^{\frac{v_t}{n}} f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}\left((\tilde{y}_t+1)e^{\frac{v_t}{n}}-1\right)d\tilde{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\left(\frac{u_t}{n}+1\right)e^{-\frac{v_t}{n}}-1\right)n\right)^2 f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(u_t)du_t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2 e^{-\frac{2v_t}{n}} + 2u_t n e^{-\frac{2v_t}{n}} + n^2 e^{-\frac{2v_t}{n}} - 2u_t n e^{-\frac{v_t}{n}} - 2n^2 e^{-\frac{v_t}{n}} + n^2\right) f^{\mathbb{P}}_{\tilde{Y}_t}(u_t)du_t$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]e^{-\frac{2v_t}{n}} + 2\tilde{m}_t n e^{-\frac{2v_t}{n}} + n^2 e^{-\frac{2v_t}{n}} - 2\tilde{m}_t n e^{-\frac{v_t}{n}} - 2n^2 e^{-\frac{v_t}{n}} + n^2.$$

Возведем $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ в квадрат:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]^2 e^{-\frac{2v_t}{n}} + 2\tilde{m}_t n e^{-\frac{2v_t}{n}} + n^2 e^{-\frac{2v_t}{n}} - 2\tilde{m}_t n e^{-\frac{v_t}{n}} - 2n^2 e^{-\frac{v_t}{n}} + n^2.$$

Окончательно получим выражение для условной дисперсии:

$$Var^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\tilde{Y}_t^{\,2}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]\right)^2 =$$

$$= e^{-\frac{2v_t}{n}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t^2|\mathcal{F}_{t-1}] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]^2\right) = e^{-\frac{2v_t}{n}} Var^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}] = e^{-\frac{2v_t}{n}}\tilde{h}_t^2.$$

Случайный процесс $\tilde{Y}_t$ в новой мере будет иметь вид:

$$\tilde{Y}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}] + \sqrt{Var^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t|\mathcal{F}_{t-1}]}\varepsilon_t = (\tilde{m}_t + n)e^{-\frac{v_t}{n}} - n + e^{-\frac{v_t}{n}}\tilde{h}_t\varepsilon_t.$$

2. Частные случаи приближения мартингальной меры, полученной при помощи логарифмической доходности

Акцентируем внимание, что полученные выше результаты являются приближениями экспоненты (логарифмической доходности) допредельным выражением с разными степенями. Рассмотрим частные случаи применения Теоремы 2 для первого, второго и четвертого приближений (первое приближение рассматривается как случай линейной доходности, а второе и четвертое - с целью получить меру для базовых активов, которые не могут иметь отрицательные значения) случайного процесса логарифмической доходности Y_t. В случае четвертого приближения логарифмической доходности вид ARIMA-GARCH процесса по мартингальной мере $\mathbb{Q}$ зависит от выбора распределения ошибки. В рамках данной статьи рассмотрено распределение S_u Джонсона. Оно представляет собой гибкое и универсальное распределение, которое может быть использовано для моделирования цен в рамках ARIMA-GARCH случайного процесса с нелинейной зависимостью и тяжелыми хвостами [10, 11]. Распределение является нелинейным преобразованием нормально распределенной случайной величины $X \sim N(0,1)$:

$$Y = \xi + \lambda \sinh\left(\frac{X-\gamma}{\delta}\right) = g(X),$$

где $-\infty < \xi < \infty$ — параметр сдвига местоположения, $0 < \lambda < \infty$ — параметр масштабирования, $-\infty < \gamma < \infty$ —параметр асимметрии, $0 < \delta < \infty$ — показатель эксцесса.

Функция плотности распределения S_u Джонсона имеет следующий вид:

$$f_Y(y) = \frac{\delta}{\lambda\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y-\xi}{\lambda}\right)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\delta\sinh^{-1}\left(\frac{y-\xi}{\lambda}\right)\right)^2}.$$

Следствие 1. В линейном приближении случайный процесс логарифмической доходности Y_t, описываемый процессом ARIMA-GARCH, имеет следующее представление по мартингальной мере $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{Y}_t = e^r - 1 + \tilde{h}_t\left(\frac{e^r}{1+\tilde{m}_t}\right)\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim iid(0,1).$$

По Теореме 2 получим выражение для v_t при $n = 1$:

$$v_t = -r + \ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)^n \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]\right)_{n=1} = -r + \ln(\tilde{m}_t + 1).$$

Тогда

$$\tilde{Y}_t = \left((\tilde{m}_t + n)e^{-\frac{v_t}{n}} - n + e^{-\frac{v_t}{n}}\tilde{h}_t\varepsilon_t\right)_{n=1} = (\tilde{m}_t + 1)e^{-v_t} - 1 + e^{-v_t}\tilde{h}_t\varepsilon_t$$
$$= e^r\frac{(\tilde{m}_t+1)}{(\tilde{m}_t+1)} - 1 + \tilde{h}_t\left(\frac{e^r}{1+\tilde{m}_t}\right)\varepsilon_t = e^r - 1 + \tilde{h}_t\left(\frac{e^r}{1+\tilde{m}_t}\right)\varepsilon_t.$$

Если процентная ставка базовых активов начисляется не непрерывно, а p раз в год, то вместо выражения $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ мы получим $\tilde{S}_t = \left(1+\frac{r}{p}\right)^{-pt} S_t$, тогда вместо e^r будем иметь $\left(1+\frac{r}{p}\right)^p$. В этом случае процесс $\tilde{Y}_t$ будет описываться следующим выражением:

$$\tilde{Y}_t = \left(1+\frac{r}{p}\right)^p - 1 + \tilde{h}_t\frac{\left(1+\frac{r}{p}\right)^p}{1+\tilde{m}_t}\varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim iid(0,1).$$

Таким образом в линейном приближении логарифмической доходности выражение будет совпадать с полученным в статье [1].

Следствие 2. Во втором приближении логарифмическая доходность, описываемая процессом ARIMA-GARCH, имеет следующее представление по мартингальной мере $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{Y}_t = e^{\frac{r}{2}}\frac{2(\tilde{m}_t+2)}{\sqrt{h_t^2 + (\tilde{m}_t+2)^2}} - 2 + \tilde{h}_t\left(\frac{2e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{h_t^2+(\tilde{m}_t+2)^2}}\right)\varepsilon_t,$$
$$\varepsilon_t \sim iid(0,1)$$

По Теореме 2 получим выражение для v_t при $n = 2$:

$$v_t = -r + \ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)^n \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]\right)_{n=2} =$$
$$= -r + \ln\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,2}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{4} + m_t + 1\right).$$

Так как $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,2}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \tilde{h}_t^2 + \tilde{m}_t^2$, получим

$$-\frac{v_t}{2}=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\tilde{h}_t^2+\tilde{m}_t^2}{4}+\tilde{m}_t^2+1\right)=$$

$$=\frac{r}{2}+\ln\left(\frac{2}{\sqrt{\tilde{h}_t^2+(\tilde{m}_t+2)^2}}\right),$$

тогда

$$\tilde{Y}_t=\left((\tilde{m}_t+n)e^{-\frac{v_t}{n}}-n+e^{-\frac{v_t}{n}}\tilde{h}_t\varepsilon_t\right)_{n=2}=$$

$$=(\tilde{m}_t+2)e^{-\frac{v_t}{2}}-2+e^{-\frac{v_t}{2}}\tilde{h}_t\varepsilon_t$$

$$=e^{\frac{r}{2}}\frac{2(\tilde{m}_t+2)}{\sqrt{h_t^2+(\tilde{m}_t+2)^2}}-2+\tilde{h}_t\left(\frac{2e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{h_t^2+(\tilde{m}_t+2)^2}}\right)\varepsilon_t.$$

Во втором приближении логарифмическая доходность обеспечивает свойство неотрицательности цен базовых активов. Данное свойство будет сохраняться для четных степеней приближения. Что касается остальных свойств логарифмической доходности, то они будут утрачиваться по мере роста разброса отношения цен базовых активов относительно единицы. В этом случае необходимо более точное приближение логарифмической доходности.

Следствие 3. В четвертом приближении логарифмическая доходность, описываемая процессом ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона, имеет следующее представление по мартингальной мере $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{Y}_t=e^{\frac{r}{4}}\frac{4(\tilde{m}_t+2)}{\sqrt[4]{\mu_{t_4}^{+}+16\mu_{t_3}^{+}+96\tilde{h}_t^2+96\tilde{m}_t^2+256\tilde{m}_t+256}}-2$$

$$+h_t\left(\frac{4e^{\frac{r}{4}}}{\sqrt[4]{\mu_{t_4}^{+}+16\mu_{t_3}^{+}+96\tilde{h}_t^2+96\tilde{m}_t^2+256\tilde{m}_t+256}}\right)\varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t\sim JSU(\bar{\xi},\bar{\lambda},\gamma,\delta)$$

где

- $\mu_{t_3}^{+}=\tilde{h}_t^3\mu_{t_3}+3\tilde{m}_t\tilde{h}_t^2+\tilde{m}_t^3$
- $\mu_{t_4}^{+}=h_t^4\mu_{t_4}+4\mu_{t_3}^{+}\tilde{m}_t-6\tilde{h}_t^2\tilde{m}_t^2-3\tilde{m}_t^4$
- $\mu_{t_3}=-\frac{\bar{\lambda}^3\tilde{h}_t^3\sqrt{e^{\delta^{-2}}}\left(e^{\delta^{-2}}-1\right)^2\left(\left(e^{\delta^{-2}}\right)\left(e^{\delta^{-2}}+2\right)\sinh\left(\frac{3\gamma}{\delta}\right)+3\sinh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)\right)}{4\tilde{h}_t^{\frac{3}{2}}}$
- $\mu_{t_4}=\frac{\bar{\lambda}^4\tilde{h}_t^4\left(e^{\delta^{-2}}-1\right)^2(K_1+K_2+K_3)}{8\tilde{h}_t^2}$
- $K_1=\left(e^{\delta^{-2}}\right)^2\left(\left(e^{\delta^{-2}}\right)^4+2\left(e^{\delta^{-2}}\right)^3+3\left(e^{\delta^{-2}}\right)^2-3\right)\cosh\left(\frac{3\gamma}{\delta}\right)$
- $K_2=4\left(e^{\delta^{-2}}\right)^2\left(\left(e^{\delta^{-2}}\right)+2\right)\cosh\left(\frac{3\gamma}{\delta}\right)$
- $K_3=3\left(2\left(e^{\delta^{-2}}\right)+1\right)$
- $\bar{\lambda}=\sqrt{2}\left(\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$
- $\bar{\xi}=\bar{\lambda}e^{\frac{1}{2\delta^2}}\sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$

По Теореме 2 получим выражение для v_t при $n=4$

$$-\frac{v_t}{n}=\frac{r}{n}-\frac{1}{n}\ln\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\tilde{Y}_t}{n}+1\right)^n\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right)_{n=4}=$$

$$=\frac{r}{4}-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^4\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{256}+\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^3\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{16}+\frac{3\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^2\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{8}+\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]+1\right)=\frac{r}{4}-$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^4\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]+16\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^3\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]+96\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^2\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]+256\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]+256}{256}\right).$$

Необходимо найти моменты третьего и четвертого порядка, при этом учтем, что

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,2}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]=\tilde{h}_t^2+\tilde{m}_t^2;$$

$$\mu_{t_3}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\tilde{Y}_t-\tilde{m}_t}{\tilde{h}_t}\right)^3\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]=$$

$$=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,3}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]-3\tilde{m}_t\tilde{h}_t^2-\tilde{m}_t^3}{\tilde{h}_t^3}.$$

Введем обозначение $\mu_{t_3}^{+}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,3}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$, тогда получим:

$$\mu_{t_3}^{+}=\tilde{h}_t^3\mu_{t_3}+3\tilde{m}_t\tilde{h}_t^2+\tilde{m}_t^3.$$

Для четвертого момента

$$\mu_{t_4}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{\tilde{Y}_t-\tilde{m}_t}{\tilde{h}_t}\right)^4\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$$

$$=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,4}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]-4\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,3}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\tilde{m}_t+6\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,2}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\tilde{m}_t^2-4\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\tilde{m}_t^3+\tilde{m}_t^4}{\tilde{h}_t^4}.$$

Введем также обозначение для четвертого момента $\mu_{t_4}^{+}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^{\,4}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$, тогда получим для него следующее выражение:

$$\mu_{t_4}^{+}=h_t^4\mu_{t_4}+4\mu_{t_3}^{+}\tilde{m}_t-6\tilde{h}_t^2\tilde{m}_t^2-3\tilde{m}_t^4.$$

Далее необходимо найти коэффициенты асимметрии μ_{t_3} и эксцесса μ_{t_4} для случайного процесса Y_t. Для этого необходимо найти плотность распределения $\tilde{Y}_t$, зная плотность распределения ошибки ARIMA-GARCH случайного процесса $\tilde{Y}_t$, где они репараметризованны так, чтобы их среднее было нулевым, а дисперсия была равна единице. Известно, что $\varepsilon_t\sim JSU(\xi,\lambda,\gamma,\delta)$, тогда

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}]=\xi-\lambda e^{\frac{1}{2\delta^2}}\sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)=0\Rightarrow\tilde{\xi}=\tilde{\lambda}e^{\frac{1}{2\delta^2}}\sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right),$$

$$Var^{\mathbb{P}}[\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}] = \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)+1\right) = 1 \Rightarrow \tilde{\lambda} =$$
$$= \sqrt{2}\left(\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{\delta^2}}\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Далее найдем плотность распределения случайного процесса Y_t. Для этого заметим, что ошибку ε_t можно выразить через $\tilde{Y}_t$,

$$\varepsilon_t = \frac{\tilde{Y}_t - \tilde{m}_t}{\tilde{h}_t} = g(\tilde{Y}_t), \frac{dg(\tilde{y}_t)}{d\tilde{y}_t} = \frac{1}{\tilde{h}_t}.$$

Тогда

$$f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) = f_{\varepsilon_t}(g(\tilde{y}_t))\left(\frac{dg(\tilde{y}_t)}{d\tilde{y}_t}\right)$$

$$f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) = f_{\varepsilon_t}(g(\tilde{y}_t))\left(\frac{dg(\tilde{y}_t)}{d\tilde{y}_t}\right)$$
$$= \frac{\delta}{\tilde{\lambda}\tilde{h}_t\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\tilde{y}_t-(\tilde{m}_t+\tilde{\xi}\tilde{h}_t)}{\tilde{h}_t\tilde{\lambda}}\right)^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma+\delta\sinh^{-1}\left(\frac{\tilde{y}_t-(\tilde{m}_t+\tilde{\xi}\tilde{h}_t)}{\tilde{h}_t\tilde{\lambda}}\right)\right)^2}.$$

Сравнивая плотности $f_{\varepsilon_t}^{\mathbb{P}}(\varepsilon_t)$ и $f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t)$ получим, что распределение случайного процесса Y_t имеет распределение S_u Джонсона со следующими параметрами: $JSU(\tilde{m}_t + \tilde{\xi}\tilde{h}_t, \tilde{\lambda}\tilde{h}_t, \gamma, \delta)$. Из полученной формулы плотности распределения Y_t легко получить выражения для коэффициентов асимметрии μ_{t_3} и эксцесса μ_{t_4}.

Из Следствий 1, 2 видно, что для первых двух приближений логарифмической доходности общий вид риск-нейтральных случайных процессов не будет зависеть от распределения случайной ошибки. Процессы будут отличаться лишь оцененными параметрами $\tilde{m}_t$ и $\tilde{h}_t$. Общий вид риск-нейтрального случайного процесса начинает меняться для разных плотностей, если логарифмическая доходность рассматривается в более высоких приближениях. В этом случае. при переходе к мартингальной мере нужно учитывать моменты выше второго порядка, которые для ARIMA-GARCH модели будут зависеть от плотности распределения ошибки.

Заключение

В статье рассмотрена задача приближения логарифмической доходности при получении мартингальной меры в расширенном принципе Гирсанова в случае тяжелохвостных распределений. При выбранном подходе все предпосылки расширенного принципа Гирсанова сохраняются, поэтому полученная мера является мартингальной. Стоит отдельно отметить, что вне зависимости от того, какая доходность (линейная, логарифмическая) выбрана для моделирования случайным ARIMA-GARCH процессом, условие минимума квадрата скорректированных на риск затрат хеджирования опционного контракта будет обеспечиваться со статистической погрешностью, зависящей от корректности подобранной модели динамики отношения цен базовых активов опционного контракта. В статье получено семейство мартингальных мер, каждая из которых соответствует степени приближения мартингальной меры, соответствующей логарифмической доходности, которая для тяжелохвостных распределений отсутствует. Выбирая из приближений логарифмической доходности то, которое наилучшим образом описывает ARIMA-GARCH процессом динамику отношения цены базового актива, можно получить соответствующую мартингальную меру, обеспечивающую наиболее близкое к минимуму значение квадрата скорректированных на риск затрат хеджирования опционного контракта.

Первым результатом статьи является доказательство теоремы, с помощью которой можно выполнить переход от физической вероятностной меры к мартингальной через условную плотность распределения $f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}$ по фильтрации $\mathcal{F}_{t-1}$ случайного процесса $\tilde{Y}_t$. Так как для моделирования случайного процесса $\tilde{Y}_t$ была выбрана ARIMA-GARCH модель, то вторая теорема описывает как меняются параметры ARIMA-GARCH модели при переходе к мартингальной вероятностной мере.

Вторым результатом работы является получение трех мер из семейства мартингальных мер, описанных в Теореме 1. Данные меры соответствуют приближению первого, второго и четвертого порядков мартингальной меры, полученной при использовании логарифмической доходности цен базовых активов.

Литература

1. *Данилишин А.Р., Голембиовский Д.Ю.* Риск-нейтральная динамика для ARIMAGARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. С. 48 – 55. doi: 10.14357/19922264200107.
2. *Данилишин А.Р., Голембиовский Д.Ю.* Оценка стоимости опционов на основе ARIMA-GARCH моделей с ошибками, распределенными по закону Su Джонсона // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. С. 83 – 90. doi: 10.14357/19922264200412.
3. *Davis R., Resnick S.* Limit theory for moving averages of random variables with regularity varying tail probabilities // Ann. Probab. 1985. Vol. 13. Iss. 1. P. 179-195.

4. *Granger C., Joyeux R.* An introduction to long-memory time series and fractional differencing // J. Time Ser. Anal. 1980. Vol. 1. P. 15-30.
5. *Elliott R.J., Madan D.B.* A discrete time equivalent martingale measure // Math. Financ. 1998. Vol. 8. Iss. 2. P. 127–152. doi: 10.1111/1467-9965.00048.
6. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V.* Stochastic Processes for Insurance & Finance // British Actuarial Journal. 1999. 6(04). P. 876 – 877. doi: 10.1017/S1357321700002044.
7. *Nair J., Wierman B., Zwart B.* The Fundamentals of Heavy Tails Properties, Emergence, and Estimation // Cambridge University Press. 2022. doi: 10.1017/9781009053730.
8. *Akgiray V.* Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecasts // J. Bus. 1989. Vol. 62. Iss. 1. P. 55–80. doi: 10.1086/296451.
9. *Follmer H., Schied A.* Stochastic finance: An introduction in discrete time. – Berlin: Walter de Gruyter. 2002. 422 p.
10. *Johnson N.* Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation // Biometrika. 1949. Vol. 36. Iss. 1-2. P. 149-176. doi: 10.2307/2332539.
11. *Johnson N.* Bivariate Distributions Based on Simple Translation Systems // Biometrika. 1949. Vol. 36. Iss. 3-4. P. 297-304. doi: 10.1093/biomet/36.3-4.297.

Данилишин Артём Ростиславович. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва. Аспирант. Область научных интересов: математическая статистика, финансовая математика. E-mail: danilishin-artem@mail.ru.

Approximation of Girsanov's measure with logarithmic returns in the case of heavy-tailed distributions

A.R. Danilishin
M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. The article is devoted to further development of the topic of applying the extended Girsanov principle for heavy-tailed distributions. The extended Girsanov principle involves finding the conditional mathematical expectation of the ratio of prices of underlying assets of option contracts at the current time to prices of underlying assets at the previous time. To do this, it is necessary to choose an appropriate model that will best describe the dynamics of this price ratio. The linear return or logarithmic return is typically used as the modeling object. In the case of linear returns, the risk-neutral dynamics for the heavy-tailed distribution (Su Johnson) was obtained in [1]. In [2], the effectiveness of the found martingale measure was demonstrated in the example of option contract valuation. However, there may be a need to use logarithmic returns, which have several useful properties (non-negativity of underlying asset prices, symmetry with respect to price increases and decreases). This article derives the martingale measure for the case where the approximation of logarithmic returns is considered. In the simplest case, the approximation coincides with linear returns, and as the degree of approximation increases, it approaches logarithmic returns.
Keywords: Approximation of Girsanov measure with logarithmic returns in the case of heavy-tailed distributions.
DOI: 10.14357/20790279230303

References

1. *Danilishin A, Golembiovsky D.Y.* Risk-neytral'naya dinamika dlya ARIMA-GARCH modeli s oshibkami, raspredelennymi po zakonu S_U Dzhonsona [Risk-neutral dynamics for ARIMA-GARCH random process with errors distributed according to the Johnson's S_U law]. Informatica I ee Primeneniya, 2020; V. 14, 1. P. 48-55. doi: 10.14357/19922264200107.
2. *Danilishin A, Golembiovsky D.Y.* Otsenka stoimosti optsionov na osnove ARIMA-GARCH modelej s oshibkami, raspredelennymi po zakonu Su Dzhonsona [Option Pricing Based on ARIMA-GARCH Models with Johnson's Su-Distributed Errors]. Informatica I ee Primeneniya, 2020; V. 14, 4. P. 83-90. doi: 10.14357/19922264200412.
3. *Davis R., Resnick S.* Limit theory for moving averages of random variables with regularity varying tail probabilities // Ann. Probab, 1985. Vol. 13. Iss. 1. P. 179-195.

4. *Granger C., Joyeux R.* An introduction to long-memory time series and fractional differencing // J. Time Ser. Anal, 1980. Vol. 1. P. 15-30.
5. *Elliott R.J., Madan D.B.* A discrete time equivalent martingale measure // Math. Financ., 1998. Vol. 8. Iss. 2. P. 127–152. doi: 10.1111/1467-9965.00048.
6. *Rolski T., Schmidli H., Schmidt V.* Stochastic Processes for Insurance & Finance // British Actuarial Journal, 1999. 6(04):876 – 877. doi: 10.1017/S1357321700002044.
7. *Nair J., Wierman B., Zwart B.* The Fundamentals of Heavy Tails Properties, Emergence, and Estimation // Cambridge University Press, 2022. doi: 10.1017/9781009053730.
8. *Akgiray V.* Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecasts // J. Bus., 1989. Vol. 62. Iss. 1. P. 55–80. doi: 10.1086/296451.
9. *Follmer H., Schied A.* Stochastic finance: An introduction in discrete time. — Berlin: Walter de Gruyter, 2002. 422 p.
10. *Johnson N.* Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation // Biometrika, 1949. Vol. 36. Iss. 1-2. P. 149-176. doi: 10.2307/2332539.
11. *Johnson N.* Bivariate Distributions Based on Simple Translation Systems // Biometrika, 1949. Vol. 36. Iss. 3-4. P. 297-304. doi: 10.1093/biomet/36.3-4.297.

Danilishin A.R. PhD student, Department of Operations Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation. E-mail: danilishin-artem@mail.ru