

Динамика макросистем

Системный анализ динамических состояний механических колебательных систем на основе рычажных связей

А.В. ЕЛИСЕЕВ^{1,II}, Н.К. КУЗНЕЦОВ^{II}, А.С. МИРОНОВ^I

^I Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия

^{II} Иркутский национальный исследовательский технический университет,
г. Иркутск, Россия

Аннотация. Развивается методология оценки динамических состояний технических объектов транспортного или технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных нагружений. В качестве расчетных схем используются механические колебательные системы с сосредоточенными параметрами. Применяется структурный подход, в рамках которого механическим колебательным системам ставятся в соответствие структурные схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. В рамках развиваемых представлений показано, что совокупности динамических состояний параметрических семейств механических колебательных систем могут быть охарактеризованы конечными наборами динамических инвариантов. Для построения динамических инвариантов разработан метод применения частотных функций, сопоставляющих коэффициентам связности кинематических возмущений частоты обнуления амплитуд колебания координат точек, используемых для оценки динамических состояний, отличающийся тем, что для построения частотных функций обнуления учитываются свойства симметрии параметров системы.

Ключевые слова: структурное моделирование, механические колебания, связанные возмущения, динамические состояния, передаточные функции, рычажные связи, вибрационные нагружения, твердое тело, упругие элементы.

DOI: 10.14357/20790279230301

Введение

Проблемы обеспечения безопасности технических объектов актуализируют разработку междисциплинарных подходов, охватывающих машиноведение, прикладную и теоретическую механику, теорию автоматического управления, теорию катастроф, системный анализ [1,2]. Развитие представлений о факторах риска опасных событий обращает внимание на технические объекты транспортного и технологического назначения, находящиеся в условиях интенсивных внешних

воздействий [3-5]. Внешние вибрационные нагружения с учетом связности могут рассматриваться в качестве одного из механических факторов безопасности технических объектов транспортного и технологического назначения, работающих в установленных режимах [6]. Обеспечение регламентов эксплуатационных режимов, отображающих вибрационные нагружения, предопределяет развитие научно-методологических основ контроля, формирования и управления вынужденными движениями технических объектов в условиях кинематических

нагружений. При построении математических моделей значительное число технических объектов могут быть представлены расчетными схемами в виде механических колебательных систем конечным числом степеней свободы [7]. На этапе поисковых исследований использование колебательных систем с учетом малости сил трения может быть вполне обосновано. Значительное распространение получили расчетные схемы в виде механических колебательных систем, образованных твердым телом на упругих опорах, совершающим вынужденные колебания под действием кинематических возмущений. В целом использование механических колебательных систем в качестве расчетных схем имеет распространение в решении широкого круга задач [8].

В качестве методологической основы построения математических моделей технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений, развивается структурный подход, отличающийся тем, что механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, ставятся в соответствие структурные схемы эквивалентных, в динамическом отношении, систем автоматического управления [9]. Структурный подход вполне применим на начальных этапах моделирования линейных или линеаризованных систем при условии малости установившихся колебаний элементов технических объектов. Преимуществом структурного подхода является возможность формирования и развития обобщенных представлений о технических объектах с использованием теории автоматического управления, теории систем, системного анализа и динамических аналогий [10].

Существенное значение в оценке свойств механических колебательных систем имеют рычажные связи, представляющие собой отношение смещений координаты системы и опорных поверхностей, зависящее от частоты внешних возмущений. Динамические особенности рычажных связей могут быть отображены с помощью передаточной функции, для которой входным сигналом служит кинематическое возмущение, а выходным – колебания точек объекта, динамическое состояние которого оценивается [11].

Учет связности внешних возмущений приводит к необходимости рассмотрения совокупности механических колебательных систем. Оценка динамических состояний параметрического семейства механических колебательных систем приводит к задаче учета многообразия динамических состояний, зависящего от частоты и коэффициента связности внешних возмущений. Для оценки ди-

намических состояний получило распространение понятие о динамическом инварианте, отображающее существенные динамические особенности в виде числа резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и числа знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем.

Наибольшее распространение получили методы структурного математического моделирования, использующие механические колебательные системы с одной и двумя степенями свободы, что связано с простыми аналитическими выражениями для определения динамических особенностей. В частности, для оценки динамических податливостей механических колебательных систем, образованных твердым телом с двумя степенями свободы, построена карта динамических инвариантов, отображающая полный набор динамических особенностей в зависимости от коэффициента связности внешних возмущений силовой природы и координаты точки, которой фиксируется реакция на внешнее возмущение [12]. В рамках системных исследований рассмотрение объектов с тремя степенями служит следующим шагом после объектов с двумя степенями свободы и направлено на формирование и развитие обобщенных представлений о состояниях систем, находящихся в условиях связанных вибрационных нагружений силового и кинематического характера.

Вместе с тем, методология структурного подхода к построению полной совокупности динамических состояний механических колебательных систем, образованных твердыми телами с тремя степенями свободы, еще не получила должного развития в рамках представлений о рычажных связях.

Предлагаемая статья посвящена разработке метода оценки многообразия динамических состояний механических колебательных систем в рамках обобщенных представлений о рычажных связях в системе, образованной твердым телом с тремя степенями свободы, находящимся в условиях связанных вибрационных нагружений кинематической природы.

1. Основные положения. Постановка задачи

Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом ABC (рис.1) с массой M_0 и моментами инерции J_1, J_2 . Предполагается, что твердое тело совершает малые поступательные и угловые установившиеся колебания относительно положения статического равновесия под воздействием гармонических синфазных ко-

лебаний опорных поверхностей z_1, z_2, z_3 . Твердое тело, помещенное на упругие опоры, совершает установившиеся колебания на частоте внешних возмущений. Динамическое состояние твердого тела оценивается на основе отношения амплитуд колебаний в точке измерения, расположенной на твердом теле, к амплитуде колебания основной опорной поверхности z_1 .

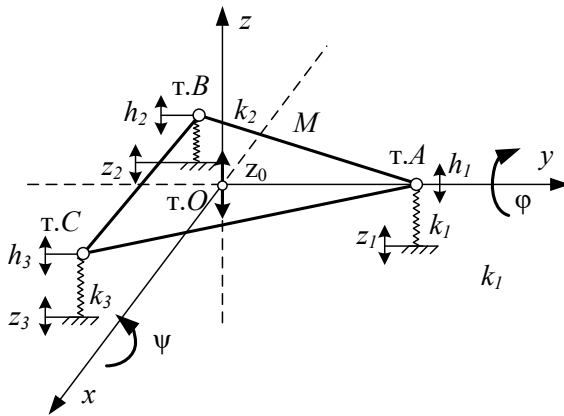


Рис. 1. Расчетная схема механической колебательной системы с тремя степенями свободы: ABC – твердое тело; z_1, z_2, z_3 – опорные поверхности; k_1, k_2, k_3 – упругие элементы; т.О – центр масс; M_0 – масса; J_1, J_2 – моменты инерции

Колебания основной опорной поверхности формируют совокупность динамических состояний твердого тела, оцениваемых на основе передаточного отношения амплитуд колебаний. В зависимости от частоты передаточное отношение может принимать отрицательные, положительные и нулевые значения. Совокупность динамических состояний точки, выбранной для измерений, включает резонанс, режимы динамических гашений колебаний, знакоопределенные формы динамических взаимодействий элементов системы. Учет связности кинематических возмущений расширяет совокупность возможных динамических состояний точек твердого тела. Для оценки динамических состояний может быть выбран подход, учитывающий, существенные особенности динамических состояний в рамках обобщенных представлений.

Задача заключается в разработке метода оценки совокупности динамических состояний систем, образованных твердым телом с тремя степенями свободы, находящимся в условиях связанных кинематических нагружений, динамические особенности которого интерпретируются в рамках представлений о рычажных связях.

2. Математическая модель

В качестве обобщенных координат рассматриваются величины h_1, h_2, h_3 малых вертикальных смещений точек A, B, C относительно положения статического равновесия. Упругие элементы k_1, k_2, k_3 , соединяющие твердое тело с опорными поверхностями z_1, z_2, z_3 , закреплены в точках A, B, C и расположены вертикально. Наравне с обобщенными координатами $\{h_1, h_2, h_3\}$ рассматриваются величины $\{z_0, \varphi, \psi\}$, где z_0 – малые вертикальные смещения центра масс твердого тела, φ, ψ – малые угловые повороты твердого тела вокруг главных осей инерции, которые направлены вдоль осей Ox, Oy неподвижной декартовой системы координат Oxyz. Предполагается, что центр масс твердого тела в положении равновесия, находится в т.О начала системы координат. Обобщенные координаты $\{h_1, h_2, h_3\}$ и $\{z_0, \varphi, \psi\}$ связаны между собой выражениями:

$$\begin{cases} h_1 = z_0 + x_1\varphi + y_1\psi; \\ h_2 = z_0 + x_2\varphi + y_2\psi; \\ h_3 = z_0 + x_3\varphi + y_3\psi, \end{cases} \quad (1)$$

где $(x_i, y_i), i=1,2,3$ – это координаты проекций точек A, B, C на плоскость Oxy. В связи с малостью углов φ, ψ использованы приближения $\sin \varphi \approx \varphi, \sin \psi \approx \psi$. Потенциальная энергия системы в обобщенных координатах h_1, h_2, h_3 определяется на основе жесткостей k_1, k_2, k_3 и может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle K(\bar{h} - \bar{z}), (\bar{h} - \bar{z}) \rangle, \quad (2)$$

где $K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ – матрица жесткостей;

$\bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ – вектор обобщенных координат, отражающих вертикальные смещения точек твердого

тела; $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ – вектор кинематических возмуще-

ний; $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ – скалярное произведение. Кинетическая энергия движения твердого тела в координатах $\{z_0, \varphi, \psi\}$ может быть представлена выражением:

$$T = \frac{1}{2} \langle M \dot{\xi}, \dot{\xi} \rangle, \quad (3)$$

где $M = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$ – матрица массоинерционных коэффициентов; $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ – вектор обобщенных координат; $\dot{\bar{\xi}}$ – вектор обобщенных скоростей.

Дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода могут быть представлены в матричном виде:

$$(U^{-1})^T M U^{-1} \ddot{\bar{h}} + K \bar{h} = K \bar{z}, \quad (4)$$

где $U = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования координат (1); \bar{h} – вектор обобщенных ускорений.

Предполагается, что для кинематических возмущений z_1, z_2, z_3 выполнено соотношение:

$$z_2 = \gamma_2 z_1, z_3 = \gamma_3 z_1, \quad (5)$$

где γ_2, γ_3 – коэффициенты связности, отображающие зависимость между колебаниями опорных поверхностей, принимают положительные, нулевые и отрицательные значения.

Под действием интегрального преобразования Лапласа [13] система дифференциальных уравнений (4) с учетом нулевых начальных условий может быть приведена к алгебраической системе:

$$\left((U^{-1})^T M U^{-1} p^2 + K \right) \bar{h} = K \bar{z}, \quad (6)$$

где $p = j\omega$ – комплексная переменная; $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – частота внешнего кинематического возмущения; значок «-» над символами обозначает интегральное преобразование Лапласа.

На основе известных методов [10] алгебраическая система (6) может быть представлена в виде структурной схемы (рис.2), где коэффициенты m_{ij} матрицы

$$(U^{-1})^T M U^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

определяют особенности парциальных систем и межпарциальных связей уравнения(6).

Механическая колебательная система (рис. 1) с тремя степенями свободы эквивалентна в динамическом отношении структурной схеме системы автоматического управления (рис. 2).

Для оценки динамических состояний механической колебательной системы с учетом усло-

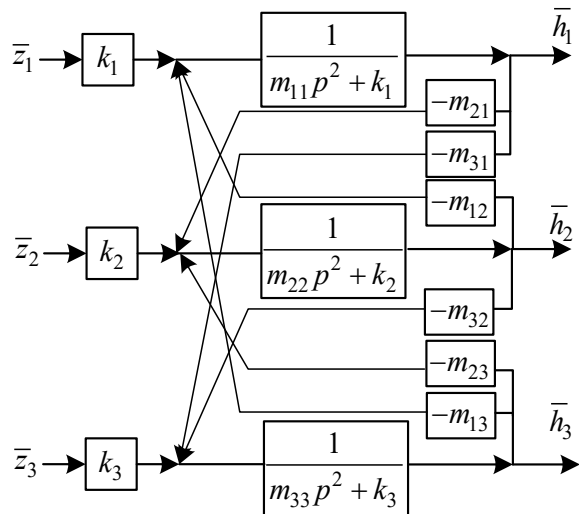


Рис.2. Структурная схема механической колебательной системы

вий связности (5) на основе структурной схемы системы автоматического управления могут быть построены передаточные функции $W_{11}(p), W_{21}(p), W_{31}(p)$:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{h}_1}{\bar{z}_1}, W_{21}(p) = \frac{\bar{h}_2}{\bar{z}_1}, W_{31}(p) = \frac{\bar{h}_3}{\bar{z}_1}. \quad (8)$$

Передаточные функции (8) в физическом смысле отображают представления о рычажных связях [11]. Характер рычажных связей в зависимости от частоты внешних кинематических возмущений может быть отображен амплитудно-частотными характеристиками:

$$A_{11}(\omega) = W_{11}(j\omega), A_{21}(\omega) = W_{21}(j\omega), \\ A_{31}(\omega) = W_{31}(j\omega). \quad (9)$$

Особенности амплитудно-частотных характеристик могут быть интерпретированы в рамках представлений о рычажных связях в зависимости от положения крайних точек рычага относительно точки опоры. Резонансы и режимы динамического гашения отображаются посредством длин плеч рычага. Положительные и отрицательные ветви амплитудно-частотных характеристик могут быть интерпретированы как рычаги второго и первого родов соответственно.

С обобщенной точки зрения совокупность динамических состояний на частотном интервале может быть обозначена так называемым динамическим инвариантом [12], отображающим конечный набор резонансов, режимов динамического гашения и знакоопределенных форм динамических взаимодействий.

3. Оценка совокупности динамических состояний системы с учетом связности внешних возмущений

В предположении связности внешних кинематических возмущений (5) алгебраическая система (6) может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \cdot p^2 + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \end{pmatrix} = \bar{z}_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \gamma_2 \\ k_3 \gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Передаточная функция $W_{11}(p)$ (8) может быть найдена с помощью формулы Крамера [14] в вид отношения определителей:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{h}_1}{\bar{z}_1} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & m_{12}p^2 & m_{13}p^2 \\ k_2\gamma_2 & m_{22}p^2 + k_2 & m_{23}p^2 \\ k_3\gamma_3 & m_{32}p^2 & m_{33} + k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11}p^2 + k_1 & m_{12}p^2 & m_{13}p^2 \\ m_{21}p^2 & m_{22}p^2 + k_2 & m_{23}p^2 \\ m_{31}p^2 & m_{32}p^2 & m_{33}p^2 + k_3 \end{vmatrix}} = \frac{C(p)}{A(p)}, \quad (11)$$

где

$$C(p) = C_1 p^4 + C_2 p^2 + C_3, \quad A(p) = A_1 p^6 + A_2 p^4 + A_3 p^2 + A_4. \quad (12)$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 биквадратного $C(p)$ и бикубического $A(p)$ многочленов (12), представляющих собой результаты вычислений числителя и знаменателя передаточной функции (11) на основе свойств суммы и произведения определителей [14], определяются выражениями:

$$C_1 = \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & m_{13} \\ k_2 \gamma_2 & m_{22} & m_{23} \\ k_3 \gamma_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & m_{13} \\ k_2 \gamma_2 & k_2 & m_{23} \\ k_3 \gamma_3 & 0 & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & 0 \\ k_2 \gamma_2 & m_{22} & 0 \\ k_3 \gamma_3 & m_{32} & k_3 \end{vmatrix},$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 \gamma_2 & k_2 & 0 \\ k_3 \gamma_3 & 0 & k_3 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ m_{21} & k_2 & m_{23} \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & k_3 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & k_2 & 0 \\ m_{31} & 0 & k_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & m_{12} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & m_{32} & k_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & 0 & m_{13} \\ 0 & k_2 & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Необходимо отметить, что коэффициенты C_1 и C_2 (13) линейно зависят от коэффициентов связности γ_2 и γ_3 (5). Уравнение $C(j\omega)=0$ (12) определяет частоты θ_0, θ_1 , обнуляющие амплитуды колебаний обобщенных координат. Характеристическое уравнение $A(j\omega)=0$ (12) определяет частоты собственных колебаний $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$. Взаимное расположение частот θ_1 и σ_1 зависит от коэффициентов связности γ_2 и γ_3 (5). В случае совпадения некоторых частот θ_1 и σ_1 эффекты обнулений и резонансов могут взаимодействовать. Всевозможные взаимные расположения частот обнуления и собственных частот системы определяют совокупность динамических состояний системы. Учет координат крепления и жесткостей упругих элементов позволяет определять частоты обнуления и резонансов в зависимости от коэффициентов связности внешних возмущений.

4. Оценка совокупности обобщенных динамических состояний системы с симметрией

Предполагается, что точки крепления упругих элементов образуют равнобедренный треугольник с основанием и высотой, направленными параллельно осям OX и OY , соответственно:

$$x_1=0, y_1=l, x_2=-l_2, y_2=-l_3, x_3=l_2, y_3=-l_3. \quad (16)$$

Дополнительно предполагается условие равенства жесткостей упругих элементов, прикрепленным в симметричных точках B и C :

$$k_2=k_3. \quad (17)$$

С учетом условий (5), (16), (17) функции $C(p)$ и $A(p)$ (12) принимают вид:

$$C(p) = -\frac{(J_1 p^2 + 2k_2 l_2^2)}{4(l_1 + l_3)^2 l_2^2} \times \\ \times (((\gamma_2 + \gamma_3)(l_3 l_1 M - J_2)k_2 - (M l_1^2 + J_2)k_1)p^2 - 2(l_1 + l_3)^2 k_1 k_2), \quad (18)$$

$$A(p) = \frac{(J_1 p^2 + 2k_2 l_2^2)}{4(l_1 + l_3)^2 l_2^2} \times \\ \times (M J_2 p^4 + (2k_2(l_3^2 M + J_2) + k_1(l_1^2 M + J_2))p^2 + 2k_1 k_2 (l_1 + l_3)^2). \quad (19)$$

Результаты, связанные с существованием обшей частоты обнуления и собственной частоты для

системы с учетом симметрии, получены с частичным использованием программного пакета символьной арифметики [15].

При условии (16), (17) одна из частот обнуления θ_0 совпадает с собственной частотой σ_0 системы:

$$\sigma_0 = \theta_0 = l_2 \sqrt{\frac{2k_2}{J_1}}. \quad (20)$$

Совпадение частот $\sigma_0 = \theta_0$ приводит к взаимному устранению эффектов резонанса и обнуления амплитуд колебаний. Передаточная функция $W_{11}(p)$ (8) после сокращения множителя $J_1 p^2 + 2k_2 l_2^2$ принимает вид:

$$W_{11}(p) = -\frac{((\gamma_2 + \gamma_3)(l_3 l_1 M - J_2)k_2 - (M l_1^2 + J_2)k_1)p^2 - 2(l_1 + l_3)^2 k_1 k_2}{J_2 M p^4 + (2(l_3^2 M + J_2)k_2 + (M l_1^2 + J_2)k_1)p^2 + 2k_1 k_2 (l_1 + l_3)^2}. \quad (21)$$

Совокупность обобщенных динамических состояний, отображаемых передаточной функцией (21), определяется взаимным расположением частоты обнуления θ_1 по отношению в собственным частотам системы σ_1, σ_2 . Для построения совокупности динамических инвариантов может быть использована частотная функция обнуления [12]:

$$\omega^2(\gamma_2, \gamma_3) = \frac{2k_1 k_2 (l_1 + l_3)^2}{k_1 (J_2 + l_1^2 M) + k_2 (J_2 - l_1 l_2 M)(\gamma_2 + \gamma_3)}. \quad (22)$$

Частотная функция обнуления позволяет определять множество граничных значений коэффициентов связности $\gamma_2^{(kp)}, \gamma_3^{(kp)}, \gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)}$ из условий обнуления знаменателя (22) и условий совпадения частотной функции обнуления с собственными частотами σ_1, σ_2 :

$$\gamma_2^{(kp)} + \gamma_3^{(kp)} = -\frac{k_1 (J_2 + l_1^2 M)}{k_2 (J_2 - l_1 l_2 M)},$$

$$\omega^2(\gamma_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}) = \sigma_1^2, \quad \omega^2(\gamma_2^{(2)} + \gamma_3^{(2)}) = \sigma_2^2, \quad (23)$$

где σ_1, σ_2 – собственные частоты, удовлетворяющие уравнению:

$$J_2 M \omega^4 - (2(J_2 + l_3^2 M)k_2 + (J_2 + l_1^2 M)k_1)\omega^2 + 2k_1 k_2 (l_1 + l_3)^2 = 0. \quad (24)$$

Совокупность граничных коэффициентов связности $\gamma_2^{(1)}, \gamma_3^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \gamma_3^{(2)}$ (23) разбивает множество коэффициентов на подмножества, в которых динамические инварианты сохраняют свои значения, выражающиеся в количестве резонансов, режимов обнуления и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем. Совокупность динамических инвариантов может быть построена для конкретной механической колебательной системы с учетом симметрии.

5. Построение динамических инвариантов. Вычислительный эксперимент

В общем случае задача определения динамических инвариантов связана с построением вычислительных алгоритмов поиска вариантов возможных взаимных расположений корней многочленов, образующих числитель и знаменатель амплитудно-частотной характеристики. Построение полной совокупности динамических инвариантов выполнено для механической системы, образованной твердым телом с двумя степенями свободы [12]. Для построения частичной совокупности динамических инвариантов механических колебательных систем с двумя степенями свободы разработана программа [16].

Наложение условий симметрии позволяет построить частичную совокупность динамических инвариантов для механической колебательной системы с тремя степенями свободы:

$$k_1 = 2.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad k_2 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \\ k_3 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ Н/м}, \quad l_1 = 0.5 \text{ м}, \quad l_2 = 0.1 \text{ м}, \quad l_3 = 0.3 \text{ м}, \quad (25)$$

$$M = 100 \text{ кг}, \quad J_1 = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_2 = 80 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (26)$$

Для параметров (25)-(26) системы (рис.1) при условии, что $\gamma_2 = 0$, многочлен $C(j\omega)$ (12) принимает вид:

$$C(j\omega) = ((1.26953125\gamma_3 + 4.1015625)\omega^4 + (-50.78125\gamma_3 - 5164.0625)\omega^2 + 2 \cdot 10^5)10^{10} \quad (27)$$

Частоты обнуления составляют значения:

$$\theta_0 = 6.324 \text{ рад/с}, \quad \theta_1 = \frac{320}{\sqrt{84 + 26\gamma_3}} \text{ рад/с}. \quad (28)$$

Характеристический многочлен $A(p)$ (12) системы принимает вид:

$$A(j\omega) = (-1.5625\omega^6 + 7640.625\omega^4 - 5.303125 \cdot 10^6 \omega^2 + 2.0 \cdot 10^8)10^7 \quad (29)$$

Собственные частоты системы имеют значения:

$$\sigma_0 \approx 6.32 \text{ рад/с}, \quad \sigma_1 \approx 28.07 \text{ рад/с}, \quad \sigma_2 \approx 63.74 \text{ рад/с}. \quad (30)$$

Собственная частота σ_0 и частота обнуления θ_0 совпадают:

$$\sigma_0 \approx 6.32 \text{ рад/с}, \quad \theta_0 \approx 6.32 \text{ рад/с}. \quad (31)$$

Семейство амплитудно-частотных характеристик, зависящих от коэффициента связности γ_3 , принимает вид:

$$A_{11}(\omega) = \frac{-(1625 \cdot \gamma_3 + 5250) \cdot \omega^2 + 6.4 \cdot 10^6}{2 \cdot \omega^4 - 9700 \cdot \omega^2 + 6.4 \cdot 10^6}. \quad (32)$$

Для системы с тремя степенями свободы (рис.1) амплитудно-частотная характеристика (32)

на частоте 63.2 рад/с не отражает ни эффекта резонанса, ни эффекта гашения колебания, принимая конечное ненулевое значение. Возможность отображения амплитудно-частотной характеристики резонансов на частотах σ_1, σ_2 зависит от положения частоты обнуления θ_1 , заданной с помощью частотной функции (22) в виде:

$$\omega^2(0, \gamma_3) = \frac{102400}{84 + 26 \cdot \gamma_3}. \quad (33)$$

График функции (33) с учетом значений собственных частот σ_1, σ_2 позволяет определять совокупность граничных значений коэффициентов связности, в которых возможны изменения существенных динамических свойств системы (рис. 3).

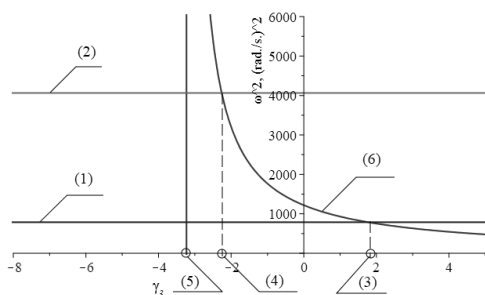


Рис. 3. Частотная функция обнуления: 1 – собственная частота σ_1^2 ; 2 – собственная частота σ_2^2 ; 3 – значение коэффициента связности $\gamma_3^{(1)}$; 4 – значение коэффициента связности $\gamma_3^{(2)}$; 5 – критическое значение коэффициента связности $\gamma_3^{(кр)}$; 6 – график частотной функции обнуления

Возможные варианты амплитудно-частотных характеристик определяются на основе набора граничных значений:

$$\gamma_3^{(кр)} \approx -3.23, \gamma_3^{(2)} \approx -2.26, \gamma_3^{(1)} \approx 1.77. \quad (34)$$

На множествах $(-\infty, \gamma_3^{(кр)}), \{\gamma_3^{(кр)}\}, (\gamma_3^{(кр)}, \gamma_3^{(2)}), \{\gamma_3^{(2)}\}, (\gamma_3^{(2)}, \gamma_3^{(1)}), \{\gamma_3^{(1)}\}, (\gamma_3^{(1)}, \infty)$ амплитудно-частотные характеристики сохраняют свои существенные особенности в виде количества резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и знаков определенных форм динамических взаимодействий (рис. 4).

Существенные особенности амплитудно-частотных характеристик могут быть представлены с помощью динамических инвариантов [12] с характеристиками $+S_k^l F_m^n$, где l – количество резонансов, k – количество режимов обнуления колебаний, n – количество положительных и m – отрицательных форм динамического взаимодействия, «+» – означает, что значение амплитудно-частотной характеристики для нулевой частоты положительно, «-» – отрицательно (табл. 1).

Анализ совокупности динамических инвариантов показывает, что для семейства механических колебательных систем варьирование коэффициента связности γ_3 кинематических возмущений приводит к изменениям существенных динамических особенностей, выражающихся в количестве критических состояний и форм динамических взаимодействий.

Зависимость количества динамических особенностей от коэффициента связности внешних

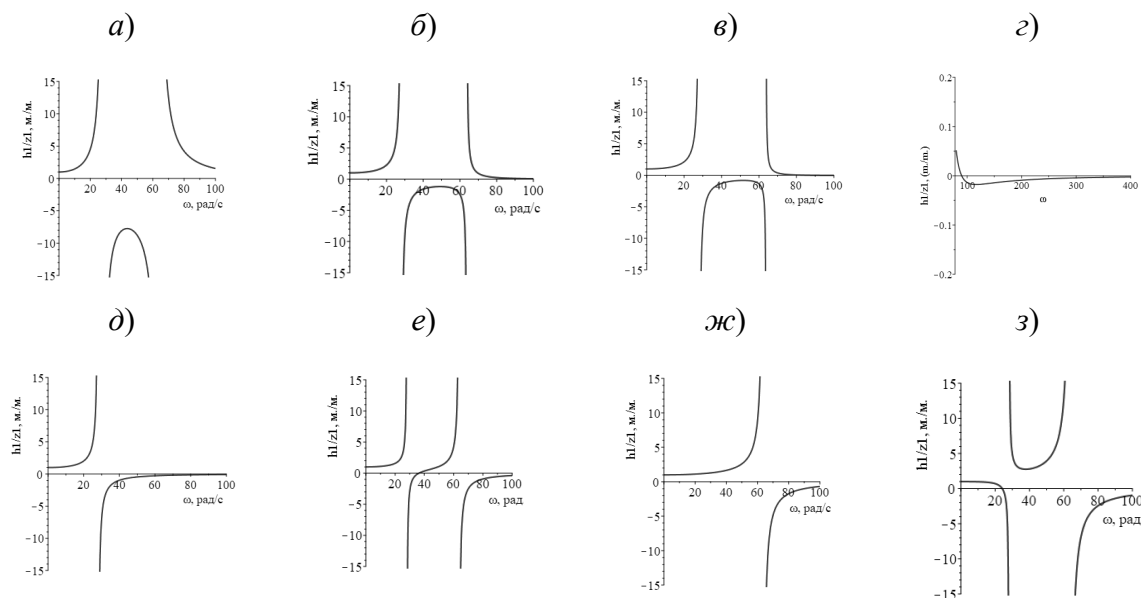


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики в зависимости от коэффициента связности γ_3 : а) – $\gamma_3 = -13.23$; б) – $\gamma_3 = -3.23$; в) – $\gamma_3 = -2.75$; г) фрагмента графика для $\gamma_3 = -2.75$; д) – $\gamma_3 = -2.26$; е) – $\gamma_3 = -0.25$; ж) – $\gamma_3 = 1.77$; з) – $\gamma_3 = 3.54$

кинематических возмущений может быть представлена графически в виде интегральной характеристики (рис. 5).

Интегральная характеристика (рис. 5), рассматриваемая как целочисленная кусочно-постоянная функция с устранимыми и не устранимыми точками разрыва первого рода, отображает чувствительность совокупного количества динамических особенностей системы к изменениям характера связности внешних кинематических возмущений системы.

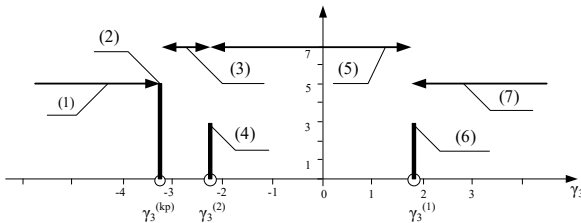


Рис. 5. Интегральная характеристика динамических инвариантов: 1 – на интервале $(-\infty, \gamma_3^{(kp)})$ динамический инвариант $(+S_0^2 F_1^2)$ имеет 5 особенностей; 2 – в точке $\gamma_3^{(kp)}$ динамический инвариант $(+S_0^2 F_1^2)$ имеет 5 особенностей; 3 – на интервале $(\gamma_3^{(kp)}, \gamma_3^{(2)}) - (+S_1^2 F_2^2) - 7$; 4 – в точке $\gamma_3^{(2)} - (+S_0^1 F_1^1) - 3$; 5 – на интервале $(\gamma_3^{(2)}, \gamma_3^{(1)}) - (+S_1^2 F_2^2) - 7$ особенностей; 6 – в точке $\gamma_3^{(2)} - (+S_0^1 F_1^1) - 3$ особенности; 7 – на интервале $(\gamma_3^{(2)}, \infty) - (+S_0^2 F_1^2) - 5$

Динамические инварианты, отражающие существенные особенности амплитудно-частотных характеристик передаточных функций в виде отношений смещений, обладают потенциалом интерпретации в виде рычажных связей.

6. Рычажные интерпретации

В рамках системных представлений может быть рассмотрена аналогия между динамическими состояниями, отображаемыми амплитудно-частотными характеристиками передаточных отношений амплитуд колебаний выходных и входных сигналов, и рычажными отношениями, которые могут быть определены с помощью координат условной «выходной» и «входной» точки, рассматриваемых как плечи рычага, поворачивающегося на малый угол относительно точки опоры (рис. 6).

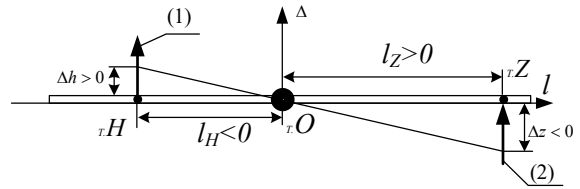


Рис. 6. Рычаг: 1 – стрелка от рычага обозначает «выходное» смещения, 2 – стрелка к рычагу обозначает «входное» смещения; т. Z – точка «входного» смещения с плечом l_Z ; т. H – точка «выходного» смещения с плечом l_H ; т. O – точка опоры рычага; l – координатная ось с началом в т. O; l_Z – координата т. Z, l_H – координата т. H

Связь между значениями амплитудно-частотных характеристик и рычажными отношениями, отражающими поворот рычага на малый угол, может быть представлена выражением:

$$A_{11}(\omega) = \frac{h_1}{z_1} = \frac{l_H}{l_Z} = \frac{\Delta h}{\Delta z}, \tag{35}$$

где Δz – вертикальное смещение т. Z, рассматриваемое как «входное» или заданное возмущение; Δh – вертикальное смещение т. H, рассматриваемое как «выходное»; l_Z, l_H – координаты точек Z и H, рассматриваемые как плечи. Значения амплитудно-частотных характеристик для фиксированных частот внешних возмущений $A_{11}(\omega)$ могут быть интерпретированы как отношения плеч l_H/l_Z рычага, для которого смещение т. Z с плечом l_Z пропорционально амплитуде входного сигнала z_1 , а смещение точки т. H с плечом l_H пропорционально амплитуде выходного сигнала h_1 (рис. 1).

Возможны варианты интерпретации амплитудно-частотной характеристики с помощью рычажных отношений. Для первого варианта «входное» плечо постоянно $l_Z = \text{const}$, а «выходное» определяется выражением:

$$l_H = A_{11}(\omega) l_Z. \tag{36}$$

Для второго варианта «выходное» плечо постоянно $l_H = \text{const}$, а «входное» определяется отношением:

$$l_Z = l_H / A_{11}(\omega). \tag{37}$$

Если $A_{11}(\omega) > 0$, то точки Z и H расположены по одну сторону от центра вращения т. O и рассматривается рычаг второго рода. Если $A_{11}(\omega) < 0$, то точки Z и H расположены по разные стороны от центра

Табл. 1

Динамические инварианты в зависимости от коэффициента связности

	1	2	3	4	5	6	7
I	$(-\infty, \gamma_3^{(kp)})$	$\{\gamma_3^{(kp)}\}$	$(\gamma_3^{(kp)}, \gamma_3^{(2)})$	$\{\gamma_3^{(2)}\}$	$(\gamma_3^{(2)}, \gamma_3^{(1)})$	$\{\gamma_3^{(1)}\}$	$(\gamma_3^{(1)}, \infty)$
II	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_0^2 F_1^2$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_1^2 F_2^2$	$+S_0^1 F_1^1$	$+S_0^2 F_1^2$
III	$+J_5$	$+J_5$	$+J_7$	$+J_3$	$+J_7$	$+J_3$	$+J_5$

Табл. 2

Интерпретация динамических особенностей в виде рычагов

	а	б	в	г
	Совокупность динамических состояний	Рычажная интерпретация $l_z = \text{const}, l_H$ - переменная	Рычажная интерпретация $l_H = \text{const}, l_z$ - переменная	Тип рычага
1	$A_{11}(0)=1$			Рычаг 2-го рода
2	Положительная ветвь: $1 < A_{11}(\omega) < \infty$			Рычаг 2-го рода
3	Положительная ветвь: $0 < A_{11}(\omega) < 1$			Рычаг 2-го рода
4	Положительная ветвь: $0 < A_{11}(\omega) < \infty$			Рычаг 2-го рода
5	Отрицательная ветвь: $-\infty < A_{11}(\omega) < 0$			Рычаг 1-го рода
6	Режим динамического гашения: $A_{11}(\omega) = 0$			Вырожденный рычаг (нулевое выходное плечо)
7	Режим динамического гашения: $A_{11}(\omega) = 0$			Вырожденный рычаг 1-го рода (выходное плечо бесконечно)
8	Режим динамического гашения: $A_{11}(\omega) = 0$			Вырожденный рычаг 2-го рода (выходное плечо бесконечно)
9	Режим резонанса: $A_{11}(\omega) = \infty$			Вырожденный рычаг (с бесконечным плечом выхода)
10	Режим резонанса: $A_{11}(\omega) = -\infty$			Вырожденный рычаг (с бесконечным плечом выхода)
11	Режим резонанса: $A_{11}(\omega) = \infty$			Вырожденный рычаг (с нулевым плечом входа)
12	Отделенная положительная ветвь: $0 < \varepsilon < A_{11}(\omega) < \infty$			Рычаг 2-го рода
13	Отделенная отрицательная ветвь: $-\infty < A_{11}(\omega) < -\varepsilon < 0$			Рычаг 1-го рода



Рис. 7. Рычажная интерпретация ветвей амплитудно-частотной характеристики $-\infty < A_{11}(\omega) < -\varepsilon < 0$: а) $l_Z = \text{const}$, l_H - переменная; б) $l_H = \text{const}$, l_Z - переменная; штриховка – область изменения переменной точки

вращения т.О и рассматривается рычаг первого рода. Динамические особенности системы, отображаемые с помощью амплитудно-частотных характеристик, могут быть интерпретированы в рамках представлений о рычагах первого и второго рода.

7. Оценка динамических состояний в рамках рычажных представлений

Анализ обобщенных динамических состояний механической колебательной системы (36-38) может быть проведен в рамках рычажной интерпретации (табл. 2). В частности, для коэффициента связности γ_3 из интервала $(-\infty, \gamma_3^{(kp)})$ совокупность состояний системы характеризуется динамическим инвариантом $+S_0^2 F_1^2$ (рис.4,а). Равенство $A_{11}(\omega)=0$ означает, что в статическом состоянии реализуется рычаг 2-го рода, для которого «входное» и «выходное» плечо равны (табл. 2, строка 1). Резонанс на частоте σ_1 интерпретируется бесконечным «выходным» плечом (строки 9,10) или «входным» (строка 11). Положительная первая ветвь амплитудно-частотной характеристики на интервале $(0, \sigma_1)$ интерпретируется рычагом 2-го рода, для которого «выходное» плечо больше «входного» (строка 2, столбец б) или «входное» меньше «выходного» (столбец в). Отрицательная вторая ветвь амплитудно-частотной характеристики (рис.4,а) интерпретируется рычагами первого рода, для которых «выходное» плечо больше некоторого значения (строка 13, столбец б) или «входное» плечо ограничено сверху (столбец в).

Наравне с представлениями о рычагах, отображающих динамические особенности систем в виде резонансов, режимов обнуления амплитуд колебаний и знакоопределенных форм динамических взаимодействий, могут получить развитие обобщенные представления, учитывающие полный набор динамических особенностей на частотных интервалах. В частности, отрицательные отделенные от нуля ветви амплитудно-частотной характеристики на интервале между собственными частотами колебаний (рис. 4,а) могут быть представлены в виде специфических составных рычагов (рис. 7).

Составной рычаг с постоянным «входным» плечом (рис. 7,а), образованный из двух частей

(строка 13, столбец б), отображает с помощью нижней части плеча отрицательную возрастающую полуветвь амплитудно-частотной характеристики (рис. 4,а) на интервале между σ_1 и σ_2 , а с помощью нижней – убывающую. Аналогично, составной рычаг с постоянным «выходным» плечом (рис.7,б), образованный из двух частей (строка 13, столбец в), отображает с помощью верхней части плеча отрицательную убывающую полуветвь амплитудно-частотной характеристики (рис. 4,а) на интервале между σ_1 и σ_2 , а с помощью нижней – возрастающую.

Выходное плечо «раздваивается», отображая приближение к двум частотам резонанса σ_1 и σ_2 . Заштрихованная область обозначает множество возможных положений для «выходной» точки H.

Используя методы монографической проекции бесконечной оси на окружность по аналогии со стереографической проекцией комплексной плоскости на сферу, можно показать, что совокупность динамических свойств механической колебательной системы может быть интерпретирована с помощью специфических рычагов, спроецированных на окружность.

Заключение

Для механических колебательных систем с тремя степенями свободы получены явные аналитические выражения и структура коэффициентов амплитудно-частотных характеристик с учетом зависимости от коэффициентов связности внешних возмущений. Для частного случая системы, обладающей свойствами симметрии, получен явный вид частотной функции обнуления, используемой для построения совокупности динамических состояний. На основе явного вида частотной функции построена совокупность динамических инвариантов.

Показано, что коэффициенты связности кинематических возмущений существенным образом способны изменять динамические состояние системы путем перемещения частот обнуления относительно частот собственных колебаний системы. Установлено, что сближение частоты обнуления с

собственной частотой системы приводит к взаимному устранению эффекта динамического гашения и эффекта резонанса. Можно полагать, что возможно и обратное «разделение» знакоопределенной формы динамических взаимодействий на динамическое состояние резонанса и динамического гашения колебаний.

В рамках методологии структурного математического моделирования разработан системный подход к оценке разнообразия динамических состояний механических колебательных систем, развивающий представления о динамических инвариантах, интерпретируемых в виде совокупности рычагов. Показано, что на основе рычажных представлений, учитывающих входные и выходные возмущения, динамические инварианты могут быть интерпретированы в виде рычагов специфической формы и структуры.

Литература

1. *Ганиев Р.Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2013. 592 с.
2. *Москвичев В.В., Махутов Н.А., Шокин Ю.И.* Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем. Новосибирск: Наука. 2021. 795 с.
3. *Ларичев О.И.* Проблемы принятия решений с учетом фактора риска и безопасности // Вестник АН СССР. 1987. № 11.
4. *Цыгичко В.Н.* Оценка рисков нарушения безопасности критически важных объектов и критических инфраструктур. Проблемы анализа риска. 2016. №13(5). С. 6-10.
5. *Махутов Н.А., Гаденин М.М., Резников Д.О.* Критерии и определяющие уравнения для оценки прочности, ресурса, живучести и безопасности несущих элементов подвижного состава железнодорожного транспорта // Научные основы и технологии повышения ресурса и живучести подвижного состава железнодорожного транспорта. 2021. С. 94 – 107.
6. *Clarence W. de Silva.* Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press. 2006. 1064 p.
7. *Rao S.* 2012. Ride Analysis of Three Wheeled Vehicle Using MATLAB/Simulink. International Journal of Material Forming. Vol. 02. P. 22-26.
8. *Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О.* Колебания твердых тел. М.: Наука. 1976. 432 с.
9. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
10. *Eliseev S.V., Eliseev A.V.* Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham. 2020. 521 p.
11. *Елисеев С.В., Каргапольцев С.К., Большаков Р.С., Елисеев А.В.* Рычажные связи: возможности формирования динамических состояний в механических колебательных системах // Транспорт Урала. 2020. № 3 (66). С. 17–23.
12. *Елисеев А.В., Ситов И.С., Кузнецов Н.К.* Системный подход к оценке полной совокупности динамических состояний технических объектов в условиях связанных вибрационных нагружений // Системы. Методы. Технологии. 2023. № 1 (57). С. 7– 20.
13. *Лурье, А.И.* Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
14. *Bronshtein I.N. and Semendyayev K.A.* (2015) Handbook of Mathematics. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1225 p.
15. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 14.02.2023).
16. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2022667233, 16.09.2022. Заявка № 2022666097 от 31.08.2022.

Елисеев Андрей Владимирович. Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск. Доцент кафедры математики. Иркутский национальный исследовательский технический университет, доцент, кандидат технических наук. Область научных интересов: методы структурного математического моделирования на основе использования методологии системного анализа для решения задач динамики технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения. E-mail: eavsh@ya.ru (Ответственный за переписку).

Кузнецов Николай Константинович. Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск. Заведующий кафедрой. Доктор технических наук, профессор. Область научных интересов: динамика машин различного назначения, работающих в условиях вибрационного нагружения. E-mail: knik@istu.edu

Миронов Артем Сергеевич. Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск. Соискатель. Область научных интересов: методы структурного математического моделирования. E-mail: art.s.mironov@mail.ru

System analysis of dynamic states of mechanical oscillatory systems based on lever ties

A.V. Eliseev^{I,II}, N.K. Kuznetsov^{II}, A.S. Mironov^I

^I Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

^{II} Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

Abstract. A methodology is being developed for estimating the dynamic states of technical objects of transport or technological purpose under conditions of vibration loads. Mechanical oscillatory systems with concentrated parameters are used as calculation schemes. A structural approach is applied, within the framework of which structural schemes of dynamically equivalent automatic control systems are aligned with mechanical oscillatory systems. Within the framework of the developed concepts, it is shown that the sets of dynamic states of parametric families of mechanical oscillatory systems can be characterized by finite sets of dynamic invariants.

Keywords: *structural modeling, mechanical vibrations, connected perturbations, dynamic states, transfer functions, lever connections, vibration loads, solid, elastic elements.*

DOI: 10.14357/20790279230301

References

1. *Ganiev R.F.* 2013. Nelinejnye rezonansy i katastrofy. Nadezhnost', bezopasnost' i besshumnost' [Nonlinear resonances and catastrophes. Reliability, safety and noiselessness]. Moscow, Izhevsk: Reguljarnaya i haoticheskaya dinamika. 592 p.
2. *Moskvichev V.V., Mahutov N.A. and Shokin YU.I.* 2021. Prikladnye zadachi konstrukcionnoj prochnosti i mekhaniki razrusheniya tekhnicheskikh sistem [Applied problems of structural strength and mechanics of destruction of technical systems]. Novosibirsk: Nauka. 795 p.
3. *Larichev O.I.* 1987. Problemy prinyatiya reshenij s uchetom faktora riska i bezopasnosti [Problems of decision-making taking into account the risk and safety factor]. Vestnik AN SSSR [Bulletin of the USSR Academy of Sciences]. Vol. 11.
4. *Tsygichko V.N.* 2016. Ocenka riskov narusheniya bezopasnosti kriticheski vazhnykh ob'ektov i kriticheskikh infrastruktur. Problemy analiza riska [Assessment of security risks of critical facilities and critical infrastructures]. Problems of risk analysis [Problems of risk analysis]. 13(5):6-10.
5. *Mahutov N.A., Gadenin M.M. and Reznikov D.O.* 2021. Kriterii i opredelyayushchie uravneniya dlya ocenki prochnosti, resursa, zhivuchesti i bezopasnosti nesushchih elementov podvizhnogo sostava zheleznodorozhnogo transporta [Criteria and defining equations for assessing the strength, resource, survivability and safety of bearing elements of railway rolling stock]. Nauchnye osnovy i tekhnologii povysheniya resursa i zhivuchesti podvizhnogo sostava zheleznodorozhnogo transporta [Scientific foundations and technologies for improving the resource and survivability of railway rolling stock. Proceedings of the International Scientific Conference]. Kolomna. P. 94 – 107.
6. *Clarence W. de Silva.* 2006. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press. 1064 p.
7. *Rao S.* 2012. Ride Analysis of Three Wheeled Vehicle Using MATLAB/Simulink. International Journal of Material Forming. Vol. 02. P. 22-26.
8. *Ganiev R.F. and Kononenko V.O.* 1976. Kolebaniya tverdyh tel [Vibrations of solids]. Moscow: Nauka. 432 p.
9. *Kolovskij M.Z.* 1976. Avtomaticheskoe upravlenie vibrozashchitnymi sistemami [Automatic control of vibration protection systems]. Moscow: Nauka. 320 p.
10. *Eliseev S.V. and Eliseev A.V.* 2020. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Cham: Springer International Publishing. 521 p.
11. *Eliseev S.V., Kargapol'cev S.K., Bol'shakov R.S. and Eliseev A.V.* 2020. Rychazhnye svyazi: vozmozhnosti formirovaniya dinamicheskikh sostoyanij v mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistemah [Lever connections: possibilities of formation of dynamic states in mechanical oscillatory systems]. Transport Urala [Transport of the Urals]. 3(66). P. 17–23.
12. *Eliseev A.V., Sitov I.S. and Kuznetsov N.K.* 2023. Sistemnyj podhod k ocenke polnoj sovokupnosti dinamicheskikh sostoyanij tekhnicheskikh ob'ektov v usloviyah svyaznykh vibracionnykh nagruzenij [A systematic approach to the assessment of the complete set of dynamic states of technical objects under conditions of coherent vibration loads]. Sistemy. Metody. Tekhnologii [Methods. Technologies]. 1 (57). P. 7–20.
13. *Lur'e A.I.* 1959. Operacionnoe ischislenie i primeneniye v tekhnicheskikh prilozheniyah [Operational calculus and application in technical applications]. Moscow: Nauka. 368 p.

14. *Bronshtein I.N. and Semendyayev K.A.* (2015) Handbook of Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1225 p.
15. Maple. URL: <https://www.maplesoft.com> (data accessed March 14, 2023).
16. Svidetel'stvo o registracii programmy dlya EVM 2022667233 [Certificate of registration of the computer program], 16.09.2022. Zayavka № 2022666097 ot 31.08.2022.

Eliseev Andrey Vladimirovich. Irkutsk State Transport University, Associate Professor of the Department of Mathematics; Irkutsk National Research Technical University, Associate Professor of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering. Candidate of Technical Sciences. Docent. Number of printed works: 347 (including 4 monographs). Research interests: methods of structural mathematical modeling. E-mail: eavsh@ya.ru (Responsible for correspondence).

Kuznetsov Nikolai Konstantinovich. Irkutsk National Research Technical University, Head of the Department of Design and Standardization in Mechanical Engineering. Doctor of Technical Sciences. Professor. Number of printed works: 179 (including 8 monographs). Research interests: dynamics of machines for various purposes operating under conditions of vibration loading. E-mail: knik@istu.edu

Mironov Artem Sergeevich. Irkutsk State Transport University. The applicant. Number of publications: 103. Research interests: methods of structural mathematical modeling. E-mail: art.s.mironov@mail.ru