

Агрегирование и декомпозиция квазилинейных систем управления с распределенными параметрами

В.И. Елкин

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается вопрос об агрегировании (укрупненном, упрощенном представлении) систем дифференциальных уравнений с частными производными и систем управления с распределенными параметрами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, агрегирование, декомпозиция.

DOI: 10.14357/20790279240102 **EDN:** NRCTKA

Введение

Под агрегированием сложных математических моделей, например, большой размерности, обычно понимается сопоставление исходной модели некоторой упрощенной модели (агрегированной), оперирующей укрупненными характеристиками, обычно имеющей меньшую размерность и функционирующей в определенном смысле в силу функционирования исходной модели. Информация об агрегированной модели может быть использована для изучения исходной модели. В частности, агрегированию может сопутствовать декомпозиция модели на совокупность более простых моделей, одна из которых как раз является агрегированной.

Хорошо известным примером агрегирования и декомпозиции является случай управляемых динамических систем [1]:

$$\begin{aligned} \dot{y}^i &= f^i(t, y, u), \quad i = 1, \dots, n, \quad (t, y) \in M \subset R^{n+1}, \\ u &\in U \subset R^r. \end{aligned} \quad (1)$$

Ряд работ, например [2,3], посвящен, в частности, нелинейным динамическим системам, линейным по управлениям:

$$\dot{y} = f_0(y) + f(y)u, \quad y \in M \subset R^n, \quad u \in R^r. \quad (2)$$

В (2) f_0 и столбцы $f_\alpha, \alpha=1, \dots, r, (n \times r)$ — матрицы f являются гладкими векторными полями в области M . Системы (2) называют часто

аффинными. Дело в том, что правая часть системы порождает аффинное пространство векторов $f_0(y) + \text{span}\{f_\alpha(y), \alpha=1, \dots, r\}$, исходящих из каждой точки $y \in M$. В терминах дифференциальной геометрии — это аффинное распределение в области M [4]. Эта терминология и соответствующие дифференциально-геометрические методы эффективно используются для декомпозиции систем (2) на основе обратной связи.

В настоящей работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$\Lambda_\nu(t, y, p) = 0, \quad \nu = 1, \dots, s, \quad (3)$$

где символ p обозначает частные производные y по t . Как известно, такую систему путем введения дополнительных переменных можно привести к специальному виду в параметрической форме, разрешенной относительно всех производных [5]:

$$\partial_k y^i = g_k^i(t, y, u), \quad \partial_k = \partial / \partial t_k. \quad (4)$$

Переход к (4) осуществляется путем разрешения уравнений (3) относительно максимально возможного числа производных и объявлением оставшихся производных новыми (параметрическими) переменными u . Аналогичная процедура переводит недоопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. «не в нормальной форме») в систему (1) [6]. Если в систему (3) входят управляющие воздействия (т.е. это система управления с распределенными параметрами [7]), то они переходят в параметрические переменные u

в (4) и с математической точки зрения не отличаются от них. Отметим, что произвольную систему уравнений с частными производными, можно свести к системе первого порядка также с помощью введения новых переменных

Для систем (4) открывается возможность применения методов агрегирования и декомпозиции теории динамических систем с управлением [1], используя некоторую аналогию данных объектов. Действительно, каждое решение $y(t)$ динамической системы (1) получается после подстановки в правую часть управлений $u(t)$ из некоторого класса допустимых функций. С другой стороны решения $y(t)$ системы (4) соответствуют некоторому выбору параметрической функции $u(t)$ также из некоторого класса. Однако есть существенное различие в классах допустимых «управлений». Для динамических систем классы допустимых управлений достаточно известны и широки: от класса кусочно-непрерывных функций до класса измеримых функций. Для систем (4) заранее задать класс допустимых «управлений» затруднительно, ибо далеко не каждый выбор функций $u(t)$ приводит к решению $y(t)$. Препятствием является, в частности, возможность несовместности полученной системы после подстановки $u(t)$. Тем не менее, идеология теории управлений может быть полезна. Можно построить аналогичные ассоциированные дифференциально-геометрические и алгебраические объекты, с помощью которых исследовать характеристики (например, декомпозицию), присущие всем реализациям допустимых параметрических функций.

Условия агрегирования для систем (3) общего вида получены в [8] и приведены кратко в Разделе 1. Далее они уточняются для квазилинейных систем в Разделе 2.

1. Агрегирование и декомпозиции дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка общего вида

Здесь приводятся результаты работы [8]. Итак, рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (3), содержащая $t = (t^1, \dots, t^q)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ и производные от функций y^i первого порядка, причем используется обозначение $p = (\dots, \partial_k y^i, \dots)$, где $\partial_k y^i = \partial y^i / \partial t^k$. В дальнейшем предполагаем для простоты, что функции Δ_v , а также все встречающиеся функции (в том числе решения) гладкие. Под гладкостью понимаем бесконечную дифференцируемость. Считаем, что система (3) максимального ранга и матрица Якоби размера $(s \times mn)$ производных от функций Δ_v по p имеет ранг s

всюду, где $\Delta(t, y, p) = 0$. При этом условии, соотношения (3) задают гладкое многообразие N_Δ в пространстве переменных (t, y, p) , или, иначе говоря, пространстве 1-струй функций $y(t)$. Относительно системы (3) будем считать также, что она локально разрешима. Согласно [9], система локально разрешима в точке $(x_0, y_0, p_0) \in N_\Delta$, если существует гладкое решение $y = f(t)$, определенное для t из некоторой окрестности точки t_0 , имеющее предписанные начальные условия $y_0 = f(t_0)$, $p_0 = (\partial f / \partial t)_{t=t_0}$. Система называется локально разрешимой, если она локально разрешима в каждой точке многообразия N_Δ .

Многообразие N_Δ можно (в силу невырожденности) представить и в параметрическом виде (в некоторой локальной карте) путем разрешения (3) относительно максимального числа производных, причем если остальные (параметрические) производные обозначить через u как параметрические переменные типа $\partial_\delta y^\beta = u^\gamma$, то получим локальное представление N_Δ в параметрической форме (4), разрешенной относительно всех производных, где

$$t \in I \subset R^q, \quad y \in L \subset R^n, \quad u \in U \subset R^s,$$

причем I, L, U – некоторые области. Такое представление произвольной системы дифференциальных уравнений с частными производными известно как специальный вид [5]. В (4) остальные (параметрические) производные обозначены через u , как параметрические переменные.

Далее будем рассматривать системы уравнений в специальном виде (4). Условие локальной разрешимости в данном случае означает, что для любой точки $t_0 \in I$, $y_0 \in M$, $u_0 \in U$ существует окрестность $V \subset L$ точки t_0 , в которой определено такое гладкое решение $y(t)$, что $y(t_0) = y_0$, $u(t_0) = u_0$.

Итак, имеем дифференциальные уравнения с частными производными специального вида, причем для простоты изложения и не ограничивая общности, далее рассматриваются «автономные» системы, т.е. с правыми частями, не зависящими от аргументов t ,

$$\partial_k y^i = g_k^i(y, u). \quad (5)$$

Речь пойдет о декомпозиции системы (5), точнее, о возможности преобразовании системы с помощью замены переменных

$$z^i = \phi^i(y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

к виду

$$\partial_k z^j = h_k^j(z^1, \dots, z^m, u), \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$\partial_k z^j = h_k^j(z^1, \dots, z^n, u), \quad j = m+1, \dots, n, \quad (8)$$

Представление (7), (8) характеризуется тем, что уравнения (7) образуют замкнутую систему. Поэтому любое решение $z(t)$ системы (7), (8) может быть получено следующим образом. Сначала нужно найти решение $z^1(t), \dots, z^m(t)$ системы (7) (соответствующее некоторому допустимому управлению $u(t)$), а затем, после подстановки $z^1(t), \dots, z^m(t)$ в систему (8), которая становится замкнутой системой, найти оставшиеся функции $z^{m+1}(t), \dots, z^n(t)$. Таким образом, декомпозиция (7), (8) позволяет свести процесс нахождения решения системы к нахождению решений для двух систем, фазовые пространства которых имеют размерности меньше, чем n .

Если такое представление возможно, то будем говорить, что система (5) допускает агрегирование по зависимым переменным порядка $n - m$, причем первые m функций в замене переменных (6)

$$z^j = \phi^j(y), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

называют агрегатами, а систему (7) – агрегированной.

Далее рассматривается применение метода полных семейств для исследования возможности декомпозиции (7), (8) систем (5). Этот метод впервые применен Ю.Н. Павловским для агрегирования динамических систем [1]. Полным семейством векторных полей или операторов называется семейство полей

$$Z_a = b_a^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad a = 1, \dots, p, \quad (10)$$

(По повторяющемуся индексу здесь и далее производится суммирование – здесь: $i = 1, \dots, n$). Если

$$1) \text{rank} \|b_a^i(y)\| = p,$$

т.е. векторы $Z_a(y)$, $a = 1, \dots, p$, линейно независимы в каждой точке $y \in M$ или, как еще говорят, поля (10) линейно несвязаны в области M ;

2) $[Z_a, Z_c] = h_{ac}^d(y) Z_d$, $a, c, d = 1, \dots, p$, т.е. все коммутаторы $[Z_a, Z_c]$ семейства выражаются линейно с переменными коэффициентами $h_{ac}^d(y)$ через поля семейства.

Переходим к условиям существования декомпозиции (7), (8). Введем в рассмотрение операторы (векторные поля в трактовке современной дифференциальной геометрии) полного дифференцирования в силу системы (5) по переменным t^l (здесь отсутствует явное дифференцирование $\partial / \partial t^l$ по t^l из-за вышеупомянутой «автономности»):

$$X_l = g_l^i(y, u) \partial / \partial y^i, \quad l = 1, \dots, q. \quad (11)$$

Замена зависимых переменных (6) в системе (5) осуществляется следующим образом: нужно подействовать операторами (11) на функции (6)

$$X_l(\phi^j(y)) = g_l^i(y, u) \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i}$$

и выразить функционально полученные функции через (6):

$$g_l^i(y, u) \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} = h_l^j(\phi^1(y), \dots, \phi^n(y), u) \quad (12)$$

Функции $h_l^j(z^1, \dots, z^n, u)$ являются новыми правыми частями системы, при этом декомпозиция (7), (8) возникает, когда первые m функций функционально выражаются только через агрегаты (9), т.е.

$$g_l^i(y, u) \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i} = h_l^j(\phi^1(y), \dots, \phi^m(y), u), \quad j = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Заметим, что если функции (9) являются первыми интегралами системы (5), то соответствующие правые части (12) равны нулю и получается достаточно простая декомпозиция [11]:

$$\partial_k z^j = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\partial_k z^j = h_k^j(t, z, u), \quad j = m + 1, \dots, n.$$

Непосредственное применение условий (13) в общем случае не дает конструктивного метода нахождения агрегатов и проверки возможности декомпозиции. Поэтому применяется опосредственный подход, когда сначала с помощью решения некоторых систем дифференциальных уравнений отыскиваются полные семейства векторных полей, для которых агрегаты являются интегралами, а затем находятся агрегаты, т.е. интегралы этих семейств. При этом совместность упомянутых систем дифференциальных уравнений определяет возможность декомпозиции.

Теорема 1 [8]. Система (5) тогда и только тогда локально приводится к виду (7), (8) с помощью замены (6), когда существует такое полное семейство (10), $p = n - m < n$, что

$$[X_l, Z_a] = \mu_{la}^b(y, u) Z_b, \quad l = 1, \dots, q, \quad a, b = 1, \dots, p, \quad (14)$$

причем агрегаты (9) составляют полный набор интегралов семейства (10).

Выражения (14) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений

$$X_l(b_a^i) = Z_a(g^i) + \mu_{la}^b(y, u) b_c^i, \quad (15)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad a, c = 1, \dots, p, \quad u \in U, \quad l = 1, \dots, q.$$

относительно неизвестных компонент семейства (10). В (15) выражения $X_l(b_a^i)$, $Z_a(g^i)$ представляют собой действия полей X_l , Z_a как операторов на функции $b_a^i(y)$, $g^i(y, u)$. После решения этой системы нужно найти полный набор интегралов $\phi^j(y)$, $j = 1, \dots, m = n - p$, полного семейства (10), что, согласно [10], сводится к решению некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения правых

частей факторсистемы следует $g_l^i(y, u) \frac{\partial \phi^j}{\partial y^i}$ выразить функционально через функции $\phi^j(y)$, $j = 1, \dots, m = n - p$, т. е. представить их в виде (13).

Построенные функции h^k и определяют искомую факторсистему:

$$\dot{z}^j = h^j(z, u), \quad j = 1, \dots, m.$$

Система (15) содержит, помимо $b_a^i(y)$, еще неизвестные параметрические переменные $\mu_{la}^b(y, u)$. Последнее обстоятельство усложняет дело. Кроме того, нужно добавить условие полноты $[Z_b, Z_a] = h_{ba}^c(y)Z_c$ семейства (14), которое тоже представляет собой систему дифференциальных уравнений, причем с неизвестными параметрическими переменными $h_{ba}^c(y)$. Здесь применяется метод исключения параметрических переменных, который осуществляется с помощью использования якобиевых семейств. Для динамических систем эта процедура предложена автором в [12]. Для того, чтобы исключить функции μ_{la}^c из (15), следует задаться некоторым свойством, которым должны обладать агрегаты (9). Это свойство заключается в определенном расположении базисного минора в якобевой матрице $\|\partial \phi^k / \partial y^i\|$:

$$\left| \frac{\partial \phi^k}{\partial y^i} \right|_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m}} \neq 0, \quad p = n - m. \quad (16)$$

Справедлива Теорема 2.

Теорема 2 [8]. Для того, чтобы система (5) допускала (локально) агрегирование порядка $p = n - m$, характеризующуюся свойством (16), необходимо и достаточно, чтобы была совместна система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $b_a^l(y)$:

$$X_l(b_a^l) = Z_a(f^l) - b_c^l Z_a(f^c), \quad (17)$$

$$Z_a(b_c^l) = Z_c(b_a^l), \quad (18)$$

где

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + b_a^l(y) \frac{\partial}{\partial y^l}, \quad (19)$$

$$u \in U, \quad a, c = 1, \dots, p, \quad l = p + 1, \dots, n.$$

По существу здесь уточняются условия Теоремы 1 на основании уточнения вида полей (10) (т.е. переходу к якобиеву семейству (19)) для данных условий агрегирования. Уравнения (17) представляют собой систему выражений относительно b_a^l без параметрических переменных.

При ином расположении базисного минора в матрице $\|\partial \phi^k / \partial y^i\|$ условия агрегирования (17), (18) преобразуются очевидным образом. Итак, задача решения системы дифференциальных уравнений (15) с параметрическими переменными сведена к задаче решения нескольких систем дифференциальных уравнений вида (17) без параметрических переменных. Решение системы (17), т.е. набор компонент семейства полей (19), следует подставить для проверки в уравнения (18), представляющие собой условия полноты семейства (19). Лишь те решения системы (17), которые одновременно являются и решениями системы (18), определяют семейство, порождающее агрегирование порядка p .

Система (17) является частным случаем так называемых уравнений в частных производных с одинаковой главной частью:

$$a_k^j(x) \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = d_k^i(x, y), \quad (20)$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, r.$$

Функции a_k^j, d_k^i --- гладкие в области $V \times U$, где $V \subset R^m$, $U \subset R^n$.

В работах [12, 13] автором получен алгоритм проверки совместности и нахождения решений систем уравнений (20). Точнее в [12] был исследован частный случай систем типа (20), который возникают при рассмотрении агрегирования управляемых динамических систем, а в [13] уже рассмотрен общий случай.

2. Конкретизация условий агрегирования для квазилинейных систем.

Квазилинейные системы (3) — это системы, линейные по производным. При переходе к специальному виду (5) они становятся линейными по параметрическим переменным u , что можно записать аналогично (2) (рассматриваются «автономные» системы, т.е. независимые от аргументов t^k):

$$\begin{aligned}\partial_k y^j &= g_{0k}^j(y) + g_{\alpha k}^j(y) u^\alpha, \\ y &\in M \subset R^n, u \in R^r, \partial_k = \partial / \partial y^k, \\ j &= 1, \dots, n, k = 1, \dots, q, \alpha = 1, \dots, r.\end{aligned}\quad (21)$$

При применении алгоритма проверки возможности агрегирования [12,13] возникает существенное упрощение. Дело в том, что в уравнения условий агрегирования для систем (5) входят ассоциированные векторные поля $X_l = g_l^i(y, u) \partial / \partial y^i$, $l = 1, \dots, q$. В области M изменения переменных y они задают семейство полей C_0 , когда параметр u пробегает свою область изменения $U \in R^r$, которая, вообще говоря, бесконечная. С другой стороны алгоритм проверки соответствующих уравнений [12,13] требует перехода в этих уравнениях к минимальной алгебре Ли, содержащей C_0 . Точнее, достаточно построить базисное подсемейство этой алгебры, которое содержит максимальное число линейно несвязанных полей, с помощью процесса пополнения, т.е. до выполнения условий полноты 1) и 2) [10]. Для этой цели нужно сначала в бесконечном семействе C_0 выделить максимальное число линейно несвязанных полей и пополнить его путем добавления подходящих коммутаторов. Этот процесс может быть весьма сложным с алгебраической точки зрения. Для квазилинейных систем (21) вместо бесконечного семейства C_0 можно использовать «готовое» конечное семейство

$$g_{0k} = g_{0k}^i(y) \partial / \partial y^i, g_k = g_{jk}^i(y) \partial / \partial y^i, \quad k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, r, \quad (22)$$

которое, по существу, присутствует явно в правой части (21). Действительно, легко видеть, что поля (22) принадлежат C_0 , причем они из C_0 являются линейными комбинациями полей (22). Таким образом, конечное семейство (35) вполне может заменить C_0 в выше указанных алгебраических операциях по проверке возможности агрегирования.

Пример. Рассмотрим управляемую систему:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = P_i(y) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad y, u \in \mathbb{R}^3, \quad (23)$$

где $i = 1, 2, 3, \quad y, u \in \mathbb{R}^3, \quad k = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned}P_i(y) &= A_i y_1^2 + B_i y_2^2 + C_i y_3^2 + \\ &+ D_i y_1 y_2 + E_i y_1 y_3 + F_i y_2 y_3.\end{aligned}$$

Исследуем возможности системы (23) допустить агрегирование порядка 2 с агрегатами $\varphi(y)$, обладающими свойством:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \neq 0. \quad (24)$$

Для этой цели нужно якобиевы семейства полей вида (19):

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1} + b_1(y) \frac{\partial}{\partial y_3}, \\ Z_2 &= \frac{\partial}{\partial y_2} + b_2(y) \frac{\partial}{\partial y_3}.\end{aligned}\quad (25)$$

Исследуем возможность агрегирования вида (24).

Уравнения (17), определяющие искомые семейства (25), приводят к выражениям:

$$\frac{\partial b_k}{\partial y_i} = 0, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Следовательно, $b_k = \text{const}$ и уравнения (18) удовлетворяются тождественно. Подставляя b_k в уравнения (17), получим (после приравнивания нулю коэффициентов при y_i), что постоянные b_1, b_2 должны удовлетворять системе алгебраических уравнений $b_k = \text{const}$:

$$\begin{aligned}2A_3 - 2A_1 b_1 - E_1 b_1^2 - 2A_2 b_2 - E_2 b_1 b_2 + E_3 b_1 &= 0, \\ D_3 - D_1 b_1 - F_1 b_1^2 - D_2 b_2 - F_2 b_1 b_2 + F_3 b_1 &= 0, \\ E_3 - E_1 b_1 - 2C_1 b_1^2 - E_2 b_2 - 2C_2 b_1 b_2 + 2C_3 b_1 &= 0, \\ D_3 - D_1 b_1 - E_1 b_1 b_2 - D_2 b_2 - E_2 b_2^2 + E_3 b_2 &= 0, \\ 2B_3 - 2B_1 b_1 - F_1 b_1 b_2 - 2B_2 b_2 - F_2 b_2^2 + F_3 b_2 &= 0, \\ F_3 - F_1 b_1 - 2C_1 b_1 b_2 - F_2 b_2 - 2C_2 b_2^2 + 2C_3 b_2 &= 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Итак, система (23) допускает агрегирование второго порядка вида (24), тогда и только тогда, когда совместна система алгебраических уравнений (27) относительно b_1, b_2 . Каждое решение системы (27) определяет функцию $\varphi = y_3 - b_2 y_2 - b_1 y_1$, являющуюся агрегатом системы (23). Агрегированная система имеет следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = (C_3 - b_2 C_2 - b_1 C_1) z^2 + u_3 - b_2 u_2 - b_1 u_1.$$

Рассмотрим частный случай системы (23):

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} &= 3y_1^2 + 2y_2^2 + 14y_3^2 - 12y_1 y_3 + u_1, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_k} &= y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_1 y_3 + u_2, \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_k} &= y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 - 4y_1 y_3 + u_3.\end{aligned}\quad (5)$$

Для этой управляемой системы система алгебраических уравнений имеет лишь одно решение: $b_1 = 1/2, b_2 = 0$. В качестве агрегата можно взять функцию $\varphi = y_1 - 2y_3$. Агрегированная система имеет вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = z + u_1 - 2u_3.$$

Аналогичным образом можно убедиться в том, что других агрегатов φ , для которых выполняется свойство $\partial\varphi/\partial u_1 \neq 0$ или свойство $\partial\varphi/\partial u_2 \neq 0$, не существует.

Заключение

Рассмотрена возможность применения методов теории управления в теории квазилинейных уравнений с частными производными. При этом использована специальная форма представления любой системы уравнений с частными производными. Эта форма дает возможность трактовать параметрические переменные как некоторые «управления», порождающие все решения. Такая трактовка позволяет в определенном смысле использовать идеологию теории управления, но, главное, — ввести аналогичные математические объекты, которые показали свою эффективность для решения задач управления. Здесь показана эффективность этих методов для исследования проблемы декомпозиции. Настоящую статью можно трактовать как развитие работы [11], где была исследована более простая декомпозиция, основанная на первых интегралах.

Литература

1. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых систем и фазовые организационные структуры // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1974. Т. 14 № 4. С. 862–872; Т. 14 № 5. С. 1093–1103.
2. Isidori A. Nonlinear Control Systems. New York, Springer Verlag. 1995. 549с.
3. Isidori A., Krener A.I., Gori-Giorgi C., and Monaco S. Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26 (2). P. 331–345.
4. Елкин В.И. «Аффинные управляемые системы, аффинные распределения и t-кораспределения», Дифференц. уравнения, **30**:11 (1994), 1869–1879; Differ. Equ., **30**:11 (1994), 1726–1734
5. Раишевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.—Л.: Гостехиздат. 1947. 354 с.
6. Елкин В.И. «Управляемые динамические системы и недоопределенные системы дифференциальных уравнений» // Автомат. и телемех. 2011. №9. С. 28–38.
7. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука. 1975. 568 с.
8. Елкин В.И. «Агрегирование и декомпозиция систем дифференциальных уравнений с частными производными и систем управления с распределенными параметрами», Журнал вычисл. матем. и матем. физ., **63**:9 (2023), 1575–1586
9. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир. 1989. 639 с.
10. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ. 1947. 359 с.
11. Елкин В.И. Об одном условии управляемости систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // Труды ИСА РАН. 2022. Т. 72. 4. С. 11–15.
12. Елкин В.И. Об условиях агрегирования управляемых динамических систем. // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1978. Т. 18. № 4. С. 928–934.
13. Елкин В.И. Общее решение систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью. // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 8. С. 1389–1398.

Елкин Владимир Иванович. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Заведующий отделом. Доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: теория управления, дифференциальные уравнения, информационные технологии. E-mail: elk_v@mail.ru

Aggregation and Decomposition of Control Systems with Distributed Parameters

V.I. Elkin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. A mathematical problem of aggregation and Decomposition of Control Systems with Distributed Parameters is considered.

Keywords: *differential equations, aggregation, decomposition*

DOI: 10.14357/20790279240102 **EDN:** NRCTKA

References

1. Pavlovskii Yu.I. Group properties of dynamic control systems and phase organizational Structures. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*.1974;14(5):43-53.
2. Isidori A. Nonlinear Control Systems. New York, Springer Verlag, 1995. 549c.
3. Isidori A., Krener A.I., Gori-Giorgi C., and Monako S. Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1981, V. 26 (2), 331-345.
4. Elkin V.I. “Affine control systems, affine distributions and t-codistributions”, *Differ. Equ.*, 30:11 (1994), 1726–1734
5. Rashevsky P.K. Partial Differential Equations:A Geometric Theory. Moscow, Leningrad: Gostekhizdat; 1947. 354 p. (In Russ.)
6. Elkin V.I. “Controllable dynamic systems and underdetermined systems of differential equations”, *Autom. Remote Control*, 72:9 (2011), 1822–1832
7. Butkovsky A.G. Methods of Control of Systems with Distributed Parameters. Moscow: Nauka Publ 1975. 568 p. (In Russ.)
8. Elkin V.I. “Aggregation and decomposition of systems of partial differential equations and control systems with distributed parameters”, *Comput. Math. Math. Phys.*, 63:9 (2023), 1741–1750
9. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics, Volume 107. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag,1986. 497 p.
10. Eisenhart L.P. Continuous Groups of Transformations. Princeton : Princeton University Press, (1933). 319 p.
11. Elkin V.I. On a condition of controllability for control dynamical and distribution parameter systems. *Proceedings of ISA RAS*.2022 72(4): 11-15 (In Russ).
12. Elkin V.I. On the conditions of aggregation of controlled dynamic systems. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*1978; 18(4) 107–114.
13. Elkin V.I. General solution of systems of partial differential equations with identical principal part. *Differentsial'nye Uravneniya* .1985; 21(8) 1389–1398. (In Russ).

Elkin V.I. Head of the Department, PhD, Professor,Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow. Area of scientific interests:control theory, differential equations,computer science, Russia. E-mail: elk_v@mail.ru