

Динамические системы

Решение задачи Коши высокоточными методами на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты

Ю.А. БУРЦЕВ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова», г. Новочеркасск, Россия

Аннотация. Предложено семейство новых численных методов для решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы основаны на разложении аппроксимации Паде матричной экспоненты на простейшие дроби. Новые методы по точности и устойчивости эквивалентны некоторым неявным методам типа Рунге-Кутты, однако намного проще в реализации и в несколько раз более экономичны по вычислениям.

Ключевые слова: численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, аппроксимация Паде, матричная экспонента, простейшие дроби.

DOI: 10.14357/20790279240101 **EDN:** KPQYBO

Введение

Существует множество методов решения классической задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Тем не менее, в статье предложено еще одно семейство численных методов. Эти методы по точности и области устойчивости эквивалентны некоторым известным A -устойчивым и L -устойчивым методам соответствующего порядка, например, методам Лобатто и Радо, однако очень существенно отличаются от них простотой алгоритмов и формул, а также требуют в несколько раз меньший объем вычислений.

Разработка новых методов была вызвана практической необходимостью решения дифференциально-алгебраических систем уравнений (ДАСУ) электрических цепей [1]. Новые методы применимы для СОДУ общего вида, записанных в форме Коши, и в этом смысле обладают универсальностью и собственной практической ценностью. Однако для систем уравнений электрических цепей они дают дополнительные преимущества. В

частности, они позволяют очень просто формировать системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для расчета состояния цепи на каждом шаге по времени. При этом легко решается в общем случае непростая задача преобразования ДАСУ в СОДУ. Кроме электрических цепей, сказанное относится также к любым физическим объектам, имеющим такую же структуру уравнений. Новые методы могут служить основой для решения СОДУ с переменными коэффициентами, а также для нелинейных СОДУ. В настоящей статье представлены методы решения линейных СОДУ с постоянными коэффициентами.

1. Актуальность темы.

Анализ состояния проблемы

Основная проблема заключается в том, что наиболее популярные методы, используемые в программах для математического моделирования различных технических систем – метод трапеций и методы на основе формул дифференцирования

назад (ФДН) – хотя и обладают минимальной вычислительной сложностью, имеют невысокую точность, а особенно большие погрешности дают при решении жестких (с сильно различающимися постоянными времени затухания), колебательных (с длительными слабозатухающими колебаниями) и жестко-колебательных СОДУ. Между тем, такие СОДУ часто встречаются на практике. В некоторых случаях упомянутые выше методы могут давать даже качественно неверные результаты [2,3]. Простые методы для достижения удовлетворительной точности требуют не менее нескольких десятков и даже сотен расчетных точек на период колебаний решения, что может в случаях жестких систем уравнений или длительных слабозатухающих колебаний давать слишком большие объемы вычислений и затрат времени.

Попытки использовать методы высоких порядков точности встречают препятствия в виде ограничений по области устойчивости для явных методов и методов на основе ФДН с порядком больше 2 («порог Далквиста»). Для неявных численных методов высоких порядков типа Рунге-Кутты основную проблему представляют большие вычислительные затраты, а также сложность теории и алгоритмов. Численно-аналитические методы трудно приспособить к решению нелинейных задач и задач с переменными коэффициентами. Описание и анализ применения различных численных методов решения СОДУ и ДАСУ можно найти, например, в работах [2,4-7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную СОДУ с постоянными коэффициентами в форме Коши:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t). \quad (1)$$

Задача заключается в том чтобы построить семейство численных методов для решения этой системы, обладающих следующими свойствами:

1. Методы должны быть A -устойчивыми (первая группа методов для колебательных систем) и L -устойчивыми (вторая группа методов для жестких и жестко-колебательных систем).
2. Методы должны иметь варианты с разными порядками точности.
3. Методы должны давать преимущество перед известными методами в простоте применения и объеме вычислений.
4. Методы должны иметь возможность решать задачу «с нуля» на каждом шаге алгоритма. То есть, они не должны содержать на каждом шаге сложные подготовительные процедуры.

5. Методы должны быть пригодны для решения широкого класса задач без какой-либо настройки.

A -устойчивость дает отсутствие ограничений на шаг интегрирования. L -устойчивость, кроме того, подавляет паразитные колебания для жестких СОДУ. Отсутствие подготовительных процедур необходимо для эффективного решения СОДУ с переменными коэффициентами и нелинейных СОДУ с помощью линеаризации.

3. Решение однородной системы. Вычисление матричной экспоненты

Точное решение задачи (1) дает формула Коши:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Теоретически эта формула дает решение для любого момента времени t . Однако с учетом реальных погрешностей значение t не может быть большим. Поэтому далее t будет означать некоторую величину в пределах заданного малого шага по времени Δt . Для удобства положим $t_0 = 0$, тогда в общем случае переменная t может принимать любое значение от 0 до Δt , что и отражают основные формулы этой статьи. Однако при расчете последовательных шагов по времени естественно вычислять $\mathbf{x}(\Delta t)$.

Решение однородной СОДУ (1) с нулевой вектор-функцией $\mathbf{f}(t)$ сводится к умножению вектора состояния системы в начальный момент времени $\mathbf{x}(0)$ на матричную экспоненту: $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}(0)$. В настоящее время известны разные способы ее вычисления [8], в том числе с помощью классической формы аппроксимации Паде. Однако до сих пор матричная экспонента не нашла широкого применения в инженерной практике. По-видимому, это обусловлено различными проблемами, подробно рассмотренными в статье [8], относительно большим объемом вычислений для ее расчета, а также сложившимися традициями, которые, как правило, рассматривают ее как чисто теоретический инструмент. Существенно также, что отдельную проблему обычно вызывает вычисление интеграла в формуле (2).

Вероятно, сегодня основным способом вычисления матричной экспоненты является метод на основе удвоения шага интегрирования (метод Ракитского) [9]. Однако удвоение шага все же требует нескольких операций возведения матрицы в квадрат, затратных по вычислениям. Удвоение шага интегрирования применимо непосредственно лишь для однородных СОДУ, для неоднородных

систем вычисление интеграла по формуле (2) требует дополнительных сложных приемов. В книге [10] матричную экспоненту вычисляют как отрезок ряда Тейлора. Важно, что интеграл в формуле (2) для полиномиального представления свободного члена системы уравнений при этом находится аналитически. Однако суммирование матричного ряда Тейлора требует большого объема вычислений. Кроме того, такой метод является явным и имеет ограничения на шаг интегрирования.

Для достижения поставленных целей мы вычислим матричную экспоненту с помощью аппроксимации Паде [6,11]:

$$e^{t\mathbf{A}} \approx R_{kj}(t\mathbf{A}) = (Q_{kj}(t\mathbf{A}))^{-1}P_{kj}(t\mathbf{A}), \quad (3)$$

где $P_{kj}(t\mathbf{A})$, $Q_{kj}(t\mathbf{A})$ – полиномы соответственно степени k и j . Мы будем исследовать диагональные аппроксимации, для которых степень числителя равна степени знаменателя ($j = k$), а также субдиагональные, для которых степень знаменателя на единицу больше степени числителя ($j = k + 1$). Такой выбор сделан по той причине, что эти аппроксимации согласно Теореме 4.12 из книги [6, с. 72], обладают важным свойством абсолютной устойчивости по отношению к шагу интегрирования (A -устойчивостью): «Аппроксимация Паде R_{kj} A -устойчива, если и только если $k \leq j \leq k + 2$. Все нули и полюсы ее простые». Метод, имеющий область устойчивости $S \supset \mathbb{C}^- = \{z, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, называется A -устойчивым [6, с. 56]. Иначе это можно выразить так: $|R(z)| \leq 1 \forall z, \operatorname{Re}(z) \leq 0$, где $R(z)$ – функция устойчивости метода [6, с. 26]. Субдиагональные аппроксимации вида $j = k + 2$ дают слишком большую методическую погрешность по затуханию решения.

Порядок численного метода для решения СОДУ определяется как число p , такое, что ряды Тейлора для приближенного и точного решения совпадают до члена порядка h^p включительно, где h – шаг по времени [6, с. 139]. Порядок аппроксимации Паде равен сумме степеней числителя и знаменателя: $p = k + j$.

A -устойчивые методы, у которых функция устойчивости $R(z)$ обладает свойством $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, называются L -устойчивыми [6,

с. 58]. Они хорошо демпфируют жесткие (быстро затухающие и высокочастотные) составляющие решения, а также ложные (паразитные) колебания, вызванные несовершенством метода, при шагах интегрирования, слишком больших для адекватного расчета жесткой составляющей решения [6, с. 58, 60].

Для методов на основе аппроксимаций Паде матричной экспоненты функции устойчивости совпадают с самими аппроксимациями. Это следует из определения функции устойчивости [6, с. 26], а также из того что в случае решения уравнения $x' = \lambda x$ (тестовое уравнение Далквиста) с помощью аппроксимации Паде для экспоненты значение x на следующем шаге по времени получается как $x(\Delta t) = e^{\Delta t \lambda} x(0) \approx R_{kj}(\Delta t \lambda) x(0)$. Очевидно, лишь аппроксимации Паде R_{kj} типа $j = k + 1$ и $j = k + 2$ L -устойчивы. В самом деле,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P_{kj}(z)}{Q_{kj}(z)} = 0,$$

только если степень знаменателя больше степени числителя ($j > k$), равенства $j = k$ при этом быть не может. Разность степеней не может быть больше двух, иначе нарушится условие A -устойчивости.

Непосредственное вычисление матричной экспоненты по формуле (3) имеет свои недостатки. Прежде всего, нужно вычислить все степени матрицы \mathbf{A} от 2 до j . Это требует большой вычислительной работы, в общем случае $(j - 1)N^3$ арифметических умножений, где N – размер матрицы. Кроме того, если исходная матрица была разреженной и это можно было существенно использовать для экономии вычислений, то при первом же умножении преимущество теряется. Важно, что матрица $t\mathbf{A}$ часто бывает плохо обусловленной. При этом возведение в степень значительно ухудшает обусловленность, в итоге обращение знаменателя $Q_{kj}(t\mathbf{A})$ либо решение СЛАУ с этой матрицей может вызвать проблемы. Возможность вычисления интеграла по формуле (2) при непосредственном применении выражения (3) не просматривается.

По аналогии с обычными дробно-рациональными функциями представим матричную экспоненту в виде суммы простейших дробей. Здесь важно, что любые степени матрицы \mathbf{A} коммутируют по умножению друг с другом, а также с единичной матрицей \mathbf{E} , поэтому аналогия правомерна. Возможен также прямой вывод соответствующих матричных формул на основе преобразований матричной алгебры. Учитывая, что корни знаменателя простые, для аппроксимаций Паде обычной экспоненты получим для $j = k$:

$$\begin{aligned} \exp(z) \approx R_{kj}(z) &= \frac{P_{kj}(z)}{Q_{kj}(z)} = \\ &= \pm 1 + \frac{y_1}{z - z_1} + \frac{y_2}{z - z_2} + \dots + \frac{y_j}{z - z_j}, \quad (4) \end{aligned}$$

для $j > k$:

$$\exp(z) \approx R_{kj}(z) = \frac{P_{kj}(z)}{Q_{kj}(z)} = \frac{y_1}{z-z_1} + \frac{y_2}{z-z_2} + \dots + \frac{y_j}{z-z_j} \quad (5)$$

Здесь z_1, \dots, z_j – корни знаменателя, y_1, \dots, y_j – коэффициенты. Для диагональных аппроксимаций мы учитываем, что коэффициенты при старших степенях числителя и знаменателя равны по модулю, отсюда коэффициент ± 1 . Из выражений (4) и (5) получим представления для матричной экспоненты.

Для диагональных аппроксимаций $j = k$:

$$\exp(t\mathbf{A}) \approx R_{jj}(t\mathbf{A}) = \pm \mathbf{E} + \sum_{n=1}^j y_n (t\mathbf{A} - z_n \mathbf{E})^{-1}, \quad (6)$$

для аппроксимаций вида $j > k$, в том числе для субдиагональных аппроксимаций $j = k + 1$:

$$\exp(t\mathbf{A}) \approx R_{kj}(t\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^j y_n (t\mathbf{A} - z_n \mathbf{E})^{-1}. \quad (7)$$

Отметим, что описание и применение аппроксимации Паде для обычной экспоненты в виде суммы простейших дробей встречается в литературе, например, в книгах [2,12]. Однако в этом виде она не используется непосредственно для решения дифференциальных уравнений. Упоминание такого представления для матричной экспоненты в известной автору литературе отсутствует.

Случай $k = 0, j = 1$ соответствует неявному методу Эйлера, при $k = j = 1$ получается метод трапеций. Мы не будем рассматривать эти методы, так как с одной стороны, они очень хорошо изучены, а с другой, для них с помощью матричной экспоненты не получается существенно новых результатов. При $j > 1$ появляются пары комплексно-сопряженных корней знаменателя. Пользуясь этим, формулы (6) и (7) можно упростить, сократив число слагаемых, так как соответствующие коэффициенты y_n тоже комплексно-сопряженные. Для нечетных j непарному действительному корню присваиваем номер 1 и получим следующие выражения.

Для диагональных аппроксимаций $j = k$, степень j четная:

$$\exp(t\mathbf{A}) \approx R_{jj}(t\mathbf{A}) = \mathbf{E} + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j}{2}} y_{2n-1} (t\mathbf{A} - z_{2n-1} \mathbf{E})^{-1}. \quad (8)$$

Для диагональных аппроксимаций $j = k$, степень j нечетная:

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbf{A}) \approx R_{jj}(t\mathbf{A}) = \\ = -\mathbf{E} + y_1 (t\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E})^{-1} + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} y_{2n} (t\mathbf{A} - z_{2n} \mathbf{E})^{-1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Для аппроксимаций вида $j > k$, степень j четная:

$$\exp(t\mathbf{A}) \approx R_{kj}(t\mathbf{A}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j}{2}} y_{2n-1} (t\mathbf{A} - z_{2n-1} \mathbf{E})^{-1}. \quad (10)$$

Для аппроксимаций вида $j > k$, степень j нечетная:

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbf{A}) \approx R_{kj}(t\mathbf{A}) = \\ = y_1 (t\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E})^{-1} + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} y_{2n} (t\mathbf{A} - z_{2n} \mathbf{E})^{-1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Например, для субдиагональной аппроксимации третьего порядка $R_{12}(t\mathbf{A})$ и для диагональной аппроксимации четвертого порядка $R_{22}(t\mathbf{A})$ получим:

$$\begin{aligned} R_{12}(t\mathbf{A}) &= (6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1} (6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A}) = \\ &= 2 \operatorname{Re} (y_1 (t\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E})^{-1}), \end{aligned}$$

где $z_1 = 2 - i\sqrt{2}$ – корень многочлена $6 - 4z + z^2$,

$$y_1 = 1 + i \frac{5}{\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} R_{22}(t\mathbf{A}) &= (12\mathbf{E} - 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1} (12\mathbf{E} + 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2) = \\ &= \mathbf{E} + 2 \operatorname{Re} (y_1 (t\mathbf{A} - z_1 \mathbf{E})^{-1}), \end{aligned}$$

где $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$ – корень многочлена $12 - 6z + z^2$, $y_1 = 6 + i6\sqrt{3}$.

Если вычислять аппроксимацию Паде матричной экспоненты по формулам (6), (7) или (8-11), то проблема ухудшения обусловленности матриц исчезает вместе с умножением матриц и необходимыми для этого вычислениями.

Для применения формул (8-11) не обязательно обращение матриц, достаточно решить соответствующие СЛАУ. При этом для формул (8) и (10) нужно решить $j/2$ комплексных СЛАУ, а для формул (9) и (11) решить $(j-1)/2$ комплексных СЛАУ и одну вещественную СЛАУ. Если считать, что СЛАУ решается методом Гаусса и оценить необходимое для этого число арифметических умножений для действительной СЛАУ как $N^3/3$ (мы пренебрегаем второй и первой степенью N), то для комплексной СЛАУ число умножений будет $4N^3/3$, так как одно умножение комплексных чисел в общем случае эквивалентно четырем умножениям действительных чисел. Соответственно, число арифметических умножений для формул (8) и (10) будет $2jN^3/3$, а для (9) и (11) получится $(2j-1)N^3/3$.

Для вычисления $e^{t\mathbf{A}}(0)$ непосредственно по формуле (3) нужно порядка $(j-1)N^3 + N^3/3 = (j-2/3)N^3$ умножений. Таким образом, экономия по арифметическим умножениям для формул (8) и (10) по сравнению с классической формулой (3)

составит $(j - 2)N^3/3$, а для формул (9) и (11) будет $(j - 1)N^3/3$. Кроме того, если матрица $t\mathbf{A}$ разреженная и (или) симметричная, в представлениях (8)–(11) эти свойства сохраняются. Это позволяет значительно сократить вычисления при решении СЛАУ, если применять методы, приспособленные для соответствующих матриц.

Если нужно решать систему (1) с изменяющимися коэффициентами, то соответствующие СЛАУ с матрицами вида $t\mathbf{A} - z_n\mathbf{E}$ необходимо решать на каждом шаге по времени. При этом отдельный вопрос составляет учет динамики коэффициентов системы, который мы пока обсуждать не будем. Если же система не меняется на протяжении длительного времени, то более экономичным по вычислениям будет вариант с обращением соответствующих матриц один раз в начале расчета и с умножением вектора состояния системы на готовые обратные матрицы на каждом шаге по времени.

4. Решение неоднородной системы

Теперь рассмотрим решение неоднородной системы (1) при ненулевой вектор-функции $\mathbf{f}(t)$. Представим эту функцию в виде полинома:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{m=0}^M \mathbf{f}_m t^m, \quad (12)$$

где \mathbf{f}_m – векторные коэффициенты, M – степень полинома. Вычислим аналитически интеграл в формуле (2). Для этого найдем интегралы вида $\int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \tau^m d\tau$. Ограничимся здесь третьей степенью τ , для полиномов высших степеней формулы получаются аналогично:

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} d\tau = \mathbf{A}^{-1} (e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E}), \quad (13)$$

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \tau d\tau = \mathbf{A}^{-2} (e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A}), \quad (14)$$

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \tau^2 d\tau = 2\mathbf{A}^{-3} \left(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A} - \frac{(t\mathbf{A})^2}{2} \right), \quad (15)$$

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}} \tau^3 d\tau = 6\mathbf{A}^{-4} \left(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A} - \frac{(t\mathbf{A})^2}{2} - \frac{(t\mathbf{A})^3}{6} \right). \quad (16)$$

Подставим в формулы (13)–(16) аппроксимацию Паде $R_{12}(t\mathbf{A}) = (6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E}) &\approx \mathbf{A}^{-1}((6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A}) - \mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{A}^{-1}((6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A}) - \\ &- (6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}^{-1}(6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A} - 6\mathbf{E} + 4t\mathbf{A} - (t\mathbf{A})^2) = \\ &= \mathbf{A}^{-1}(6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6t\mathbf{A} - (t\mathbf{A})^2) = \\ &= t(6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} - t\mathbf{A}) = \\ &= 2t\text{Re}(a_{10}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}), \end{aligned}$$

где $z_1 = 2 - i\sqrt{2}$ – корень многочлена $6 - 4z + z^2$,

$a_{10} = -\frac{1}{2} + i\sqrt{2}$, индекс 1 – номер корня, индекс

0 – показатель степени τ . В этих преобразованиях последнее выражение с коэффициентом a_{10} получено разложением матричной дроби $(6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} - t\mathbf{A})$ на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} & \left((6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1} (6\mathbf{E} - t\mathbf{A}) = \right. \\ & \left. = a_{10}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + \bar{a}_{10}(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1} = 2\text{Re}(a_{10}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}), \right. \\ & \left. z_2 = 2 + i\sqrt{2}. \right. \end{aligned}$$

Аналогично для степеней 1, 2, 3 получим:

$$\mathbf{A}^{-2}(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A}) \approx 2t^2\text{Re}(a_{11}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}),$$

где $a_{11} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}i$;

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{A}^{-3} \left(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A} - \frac{(t\mathbf{A})^2}{2} \right) \approx \\ & \approx 2t^3\text{Re}(a_{12}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}), \end{aligned}$$

где $a_{12} = -0,5$;

$$\begin{aligned} & 6\mathbf{A}^{-4} \left(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{E} - t\mathbf{A} - \frac{(t\mathbf{A})^2}{2} - \frac{(t\mathbf{A})^3}{6} \right) \approx \\ & \approx 2t^4\text{Re}(a_{13}(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}), \end{aligned}$$

где $a_{13} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i$.

Очень существенно, что обратные степени матрицы \mathbf{A} в выражениях (13)–(16) сокращаются. Таким образом, обращение этой матрицы не требуется. Также важно, что везде получилась одна и та же обратная матрица $(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}$. Это позволяет на каждом шаге по времени решать всего одну СЛАУ с такой матрицей – так же как для решения однородной задачи. Записать решение неоднородной СОДУ (1) для аппроксимации Паде $R_{12}(t\mathbf{A})$ удобно в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + \\ & + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3))]. \quad (17) \end{aligned}$$

Для решения неоднородной задачи необходимо знать состояние системы в начальный момент времени $\mathbf{x}(0)$ и полиномиальное представление свободного члена $\mathbf{f}(t)$. Это представление может быть задано непосредственно, либо его можно по-

лучить, зная значения функции $\mathbf{f}(t)$ на интервале $[0; \Delta t]$. Если значения функции $\mathbf{f}(t)$ заданы только в узлах временной сетки, то ее полиномиальное представление внутри интервала интегрирования возможно либо с помощью сплайн-интерполяции, либо с помощью линейной интерполяции. Функция $\mathbf{f}(t)$ может быть также отрезком ряда Тейлора для любой заданной функции. Поэтому формула (17) дает решение СОДУ (1) для очень большого множества практических случаев.

При необходимости степень полинома может быть увеличена посредством методики, изложенной выше. Однако степень полинома не может быть больше порядка аппроксимации Паде для матричной экспоненты, иначе при больших степенях полинома (12) отрицательные степени матрицы \mathbf{A} в выражениях (13-16) нечем будет компенсировать.

Для ясности изложения мы рассмотрели конкретный случай аппроксимации Паде матричной экспоненты $R_{12}(t\mathbf{A})$ третьего порядка. В общем случае для других аппроксимаций формулы, подобные (17), получаются аналогично. Приведем некоторые из них. Для краткости коэффициенты укажем только для $R_{22}(t\mathbf{A})$, для каждой аппроксимации они свои.

Диагональная аппроксимация четвертого порядка $j = k = 2$:

$$R_{22}(t\mathbf{A}) = (12\mathbf{E} - 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(12\mathbf{E} + 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2) = \mathbf{E} + 2\text{Re}[y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}];$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3))], \quad (18)$$

где $z_1 = 3 - i\sqrt{3}$, $y_1 = 6 + i6\sqrt{3}$, $a_{10} = i2\sqrt{3}$,
 $a_{11} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{12} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $a_{13} = -0,5$.

Субдиагональная аппроксимация пятого порядка $j = 3, k = 2$:

$$R_{23}(t\mathbf{A}) = (60\mathbf{E} - 36t\mathbf{A} + 9(t\mathbf{A})^2 - (t\mathbf{A})^3)^{-1}(60\mathbf{E} + 24t\mathbf{A} + 3(t\mathbf{A})^2) = y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + 2\text{Re}[y_2(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1}];$$

$$\mathbf{x}(t) = (t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3)) + 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1}(y_2\mathbf{x}(0) + t(a_{20}\mathbf{f}_0 + a_{21}\mathbf{f}_1t + a_{22}\mathbf{f}_2t^2 + a_{23}\mathbf{f}_3t^3))]. \quad (19)$$

Диагональная аппроксимация шестого порядка $j = k = 3$:

$$R_{33}(t\mathbf{A}) = (120\mathbf{E} - 60t\mathbf{A} + 12(t\mathbf{A})^2 - (t\mathbf{A})^3)^{-1}(120\mathbf{E} + 60t\mathbf{A} + 12(t\mathbf{A})^2 + (t\mathbf{A})^3) = -\mathbf{E} + y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + 2\text{Re}[y_2(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1}];$$

$$\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(0) + (t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3)) + 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1}(y_2\mathbf{x}(0) + t(a_{20}\mathbf{f}_0 + a_{21}\mathbf{f}_1t + a_{22}\mathbf{f}_2t^2 + a_{23}\mathbf{f}_3t^3))]. \quad (20)$$

Субдиагональная аппроксимация седьмого порядка $j = 4, k = 3$:

$$R_{34}(t\mathbf{A}) = (840\mathbf{E} - 480t\mathbf{A} + 120(t\mathbf{A})^2 - 16(t\mathbf{A})^3 + (t\mathbf{A})^4)^{-1}(840\mathbf{E} + 360t\mathbf{A} + 60(t\mathbf{A})^2 + 4(t\mathbf{A})^3) = 2\text{Re}[y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + y_3(t\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})^{-1}];$$

$$\mathbf{x}(t) = 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3)) + (t\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})^{-1}(y_3\mathbf{x}(0) + t(a_{30}\mathbf{f}_0 + a_{31}\mathbf{f}_1t + a_{32}\mathbf{f}_2t^2 + a_{33}\mathbf{f}_3t^3))]. \quad (21)$$

Диагональная аппроксимация восьмого порядка $j = k = 4$:

$$R_{44}(t\mathbf{A}) = (1680\mathbf{E} - 840t\mathbf{A} + 180(t\mathbf{A})^2 - 20(t\mathbf{A})^3 + (t\mathbf{A})^4)^{-1}(1680\mathbf{E} + 840t\mathbf{A} + 180(t\mathbf{A})^2 + 20(t\mathbf{A})^3 + (t\mathbf{A})^4) = \mathbf{E} + 2\text{Re}[y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + y_3(t\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})^{-1}];$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + 2\text{Re}[(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1t + a_{12}\mathbf{f}_2t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3t^3)) + (t\mathbf{A} - z_3\mathbf{E})^{-1}(y_3\mathbf{x}(0) + t(a_{30}\mathbf{f}_0 + a_{31}\mathbf{f}_1t + a_{32}\mathbf{f}_2t^2 + a_{33}\mathbf{f}_3t^3))]. \quad (22)$$

В общем случае формулы для расчета состояния системы в момент времени t можно записать так.

Диагональные аппроксимации порядка $2j$, степень знаменателя j четная:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j}{2}} \left[(t\mathbf{A} - z_{2n-1}\mathbf{E})^{-1} \left(y_{2n-1}\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{2n-1,m}\mathbf{f}_m t^m \right) \right]. \quad (23)$$

Диагональные аппроксимации порядка $2j$, степень знаменателя j нечетная:

$$\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(0) + (t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} \left(y_1\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{1,m}\mathbf{f}_m t^m \right) + 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} \left[(t\mathbf{A} - z_{2n}\mathbf{E})^{-1} \left(y_{2n}\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{2n,m}\mathbf{f}_m t^m \right) \right]. \quad (24)$$

Субдиагональные аппроксимации вида $j = k + 1$, порядок $2j - 1$, степень знаменателя j четная:

$$\mathbf{x}(t) = 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j}{2}} \left[(t\mathbf{A} - z_{2n-1}\mathbf{E})^{-1} \left(y_{2n-1}\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{2n-1,m}\mathbf{f}_m t^m \right) \right]. \quad (25)$$

Субдиагональные аппроксимации вида $j = k + 1$, порядок $2j - 1$, степень знаменателя j нечетная:

$$\mathbf{x}(t) = (t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} \left(y_1\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{1,m}\mathbf{f}_m t^m \right) + 2\text{Re} \sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}} \left[(t\mathbf{A} - z_{2n}\mathbf{E})^{-1} \left(y_{2n}\mathbf{x}(0) + t \sum_{m=0}^M a_{2n,m}\mathbf{f}_m t^m \right) \right]. \quad (26)$$

Отметим, что в формулах (17)–(26) коэффициенты $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ (12) имеют локальный смысл и рассматриваются только для представления функции $\mathbf{f}(t)$ в пределах шага интегрирования $[0; \Delta t]$.

5. Сравнение методов на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты с другими

Явные методы без дополнительных приемов не подходят для решения жестких задач из-за ограничений на шаг по времени. Поэтому сравнивать новые методы будем с классическими неявными методами из семейства методов Рунге-Кутты.

Если размерность СОДУ $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ равна N , то s -стадийный полностью неявный метод Рунге-Кутты включает в себя нелинейную (в общем случае) систему уравнений размерности sN [6, с. 139]. В этой статье мы рассматриваем только линейные задачи, поэтому оценить число арифметических умножений будет несложно. Как и ранее, будем считать, что решение действительной СЛАУ размерности N требует $N^3/3$ арифметических умножений, а решение комплексной СЛАУ требует $4N^3/3$ умножений. Порядки классических методов рассчитаны по формулам из книги [6, с. 94]. Результаты сравнения для решения СЛАУ на каждом шаге по времени показаны в табл. 1. Для варианта с умножением на готовую обратную матрицу сравнение показано в табл. 2. Для плотной матрицы число арифметических умножений при умножении вектора на матрицу составит N^2 для действительной матрицы и $4N^2$ для комплексной матрицы.

Таким образом, получаем, что при одном и том же порядке методы на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты требуют в несколько раз меньшей вычислительной работы чем методы

Гаусса, Радо и Лобатто, за исключением двух случаев в табл. 2, где наблюдается равенство.

6. Решение тестовой задачи

Для тестирования, сравнения и демонстрации новых методов на практической задаче была решена СОДУ (1) с матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{DVD}^{-1}$, где

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & -10^\alpha & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 10^\beta \\ & & & & -10^\beta & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 8 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразование подобия для матрицы \mathbf{V} выполнено с целью получить матрицу \mathbf{A} общего вида с заданными собственными числами, для которой компоненты решения взаимосвязаны. Подробное тестирование методов с разными матрицами не

Табл. 2

Сравнение числа арифметических умножений для различных методов решения СОДУ с умножением на готовые обратные матрицы на каждом шаге по времени

Табл. 1

Сравнение числа арифметических умножений для различных методов решения СОДУ с решением СЛАУ на каждом шаге по времени

Классический метод	Число стадий	Порядок метода	Число умножений метода	Аппроксимация Паде того же порядка	Число умножений для аппроксимации Паде
Гаусса	2	4	$8N^3/3$	$R_{22}(t\mathbf{A})$	$4N^3/3$
	3	6	$27N^3/3$	$R_{33}(t\mathbf{A})$	$5N^3/3$
	4	8	$64N^3/3$	$R_{44}(t\mathbf{A})$	$8N^3/3$
Радо IA, Радо IIA	2	3	$8N^3/3$	$R_{12}(t\mathbf{A})$	$4N^3/3$
	3	5	$27N^3/3$	$R_{23}(t\mathbf{A})$	$5N^3/3$
	4	7	$64N^3/3$	$R_{34}(t\mathbf{A})$	$8N^3/3$
Лобатто IIIA, Лобатто IIIB, Лобатто IIIC	2	2	$8N^3/3$	$R_{11}(t\mathbf{A})$	$N^3/3$
	3	4	$27N^3/3$	$R_{22}(t\mathbf{A})$	$4N^3/3$
	4	6	$64N^3/3$	$R_{33}(t\mathbf{A})$	$5N^3/3$
	5	8	$125N^3/3$	$R_{44}(t\mathbf{A})$	$8N^3/3$

Классический метод	Число стадий	Порядок метода	Число умножений метода	Аппроксимация Паде того же порядка	Число умножений для аппроксимации Паде
Гаусса	2	4	$4N^2$	$R_{22}(t\mathbf{A})$	$4N^2$
	3	6	$9N^2$	$R_{33}(t\mathbf{A})$	$5N^2$
	4	8	$16N^2$	$R_{44}(t\mathbf{A})$	$8N^2$
Радо-IA, Радо-IIA	2	3	$4N^2$	$R_{12}(t\mathbf{A})$	$4N^2$
	3	5	$9N^2$	$R_{23}(t\mathbf{A})$	$5N^2$
	4	7	$16N^2$	$R_{34}(t\mathbf{A})$	$8N^2$
Лобатто-IIIA, Лобатто-IIIB, Лобатто-IIIC	2	2	$4N^2$	$R_{11}(t\mathbf{A})$	N^2
	3	4	$9N^2$	$R_{22}(t\mathbf{A})$	$4N^2$
	4	6	$16N^2$	$R_{33}(t\mathbf{A})$	$5N^2$
	5	8	$25N^2$	$R_{44}(t\mathbf{A})$	$8N^2$

входит в задачу этой статьи. Здесь мы представляем только один вычислительный пример, позволяющий убедиться в работоспособности предложенных методов и в их эквивалентности некоторым известным методам. Собственные числа матриц \mathbf{V} и \mathbf{A} одинаковы: $\lambda = [-1; -10^{\alpha}; i; -i; 10^{\beta}i; -10^{\beta}i]^T$.

Рассмотрим три случая неоднородной системы: $\alpha = 4, \beta = 1$ (жесткая); $\alpha = 1, \beta = 3$ (колебательная); $\alpha = 4, \beta = 3$ (жестко-колебательная). Начальные условия зададим в виде $\mathbf{x}(0) = [-3; -2; -1; 1; 2; 3]^T$. Область расчета обозначим $[0; T]$, где $T = \pi/10$. Вектор-функцию в правой части в задаче (1) определим на $[0; T]$ как полином $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 t + \mathbf{g}_2 t^2 + \mathbf{g}_3 t^3$, где глобальные коэффициенты $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ рассчитаем так, чтобы в точках $t = 0; T/3; 2T/3; T$ функция $\mathbf{g}(t)$ принимала соответственно значения $(20; -20; 40; -40; 0; 60)^T, (20; 40; -40; 0; 60; 20)^T, (40; -40; 0; 60; 20; -20)^T, (-40; 0; 60; 20; -20; 40)^T$. Ранее мы рассматривали интервалы интегрирования в пределах $[0; \Delta t]$. Если теперь их смещать от нулевой точки к пределам $[t_0; t_0 + \Delta t]$, то локальные коэффициенты для формул (17)–(26) на этих интервалах вычисляются по формулам $\mathbf{f}_0 = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 t_0 + \mathbf{g}_2 t_0^2 + \mathbf{g}_3 t_0^3, \mathbf{f}_1 = \mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 t_0 + 3\mathbf{g}_3 t_0^2, \mathbf{f}_2 = \mathbf{g}_2 + 3\mathbf{g}_3 t_0, \mathbf{f}_3 = \mathbf{g}_3$. При этом $\mathbf{g}(t_0 + t) = \mathbf{f}(t)$. Число точек интегрирования на расчетной области будем брать 100, 320, 1000, 3200 и 10000. Это примерно соответствует равномерной логарифмической шкале.

На рис. 1-3 показан $\lg(\delta)$ – логарифм относительной среднеквадратической погрешности решений задачи (1) с описанными выше услови-

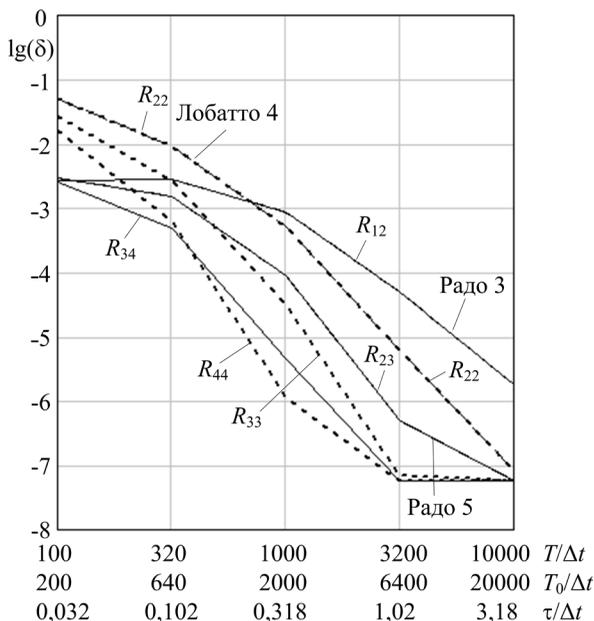


Рис. 1. Жесткая СОДУ ($\alpha = 4, \beta = 1$). Относительная среднеквадратическая погрешность δ , максимум среди компонентов решения

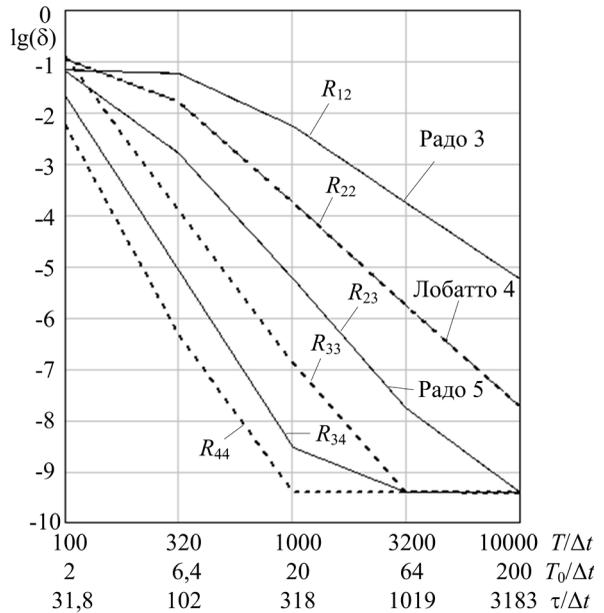


Рис. 2. Колебательная СОДУ ($\alpha = 1, \beta = 3$). Относительная среднеквадратическая погрешность δ , максимум среди компонентов решения

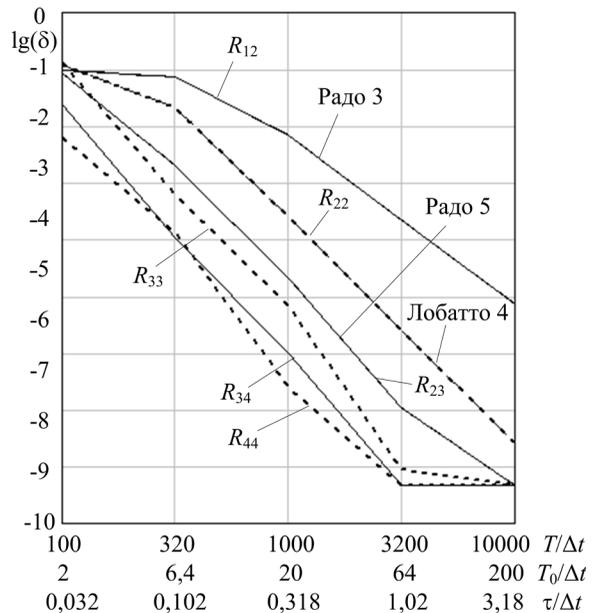


Рис. 3. Жестко-колебательная СОДУ ($\alpha = 4, \beta = 3$). Относительная среднеквадратическая погрешность δ , максимум среди компонентов решения

ями. В качестве эталона для сравнения принято аналитическое решение. Из шести погрешностей для компонентов решения выбиралась максимальная. По оси абсцисс отложено $T/\Delta t$ – общее число точек разбиения расчетной области, где Δt – шаг по времени, $T_0/\Delta t$ – число точек, приходящееся на период высокочастотной (с угловой частотой 10^{β})

составляющей решения, а также $\tau/\Delta t$ – число точек, приходящееся на постоянную времени затухания быстрой экспоненциальной составляющей решения, $\tau = 10^{-\alpha}$.

Обозначения $R_{12\dots R_{44}}$ относятся к соответствующим аппроксимациям Паде матричной экспоненты; «Радо 3» – метод Радо-ПА 3-го порядка, «Радо 5» – метод Радо-ПА 5-го порядка, «Лобатто 4» – метод Лобатто-ПА 4-го порядка. Графики, относящиеся к методам одного порядка точности визуально неразличимы. Графики диагональных аппроксимаций Паде показаны штриховыми линиями.

Заключение

Предложены новые экономичные по вычислениям, простые по теории и практической реализации методы решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши. Методы позволяют решать однородные системы, а также системы, у которых свободный член в пределах шага интегрирования представлен в форме полинома, степень которого не выше чем порядок соответствующего метода. Так как полином является удобной формой аппроксимации для весьма разнообразных функций, это придает методам универсальность. Методы пригодны для решения задачи Коши общего вида без какой-либо настройки, не имеют ограничений на шаг интегрирования. По точности и устойчивости новые методы эквивалентны известным методам соответствующих порядков, однако требуют в несколько раз меньше вычислительной работы. Методы одношаговые, это позволяет легко изменять шаг интегрирования.

Представляется перспективной доработка новых методов для решения линейных задач с переменными коэффициентами и нелинейных задач. В последующих публикациях предполагается рассмотреть применение описанных выше методов к дифференциально-алгебраическим системам уравнений электрических цепей и подобных им объектов.

Литература

1. *Burtsev Y.* High Precision Methods Based on Pade Approximation of Matrix Exponent for Numerical Analysis of Stiff-Oscillatory Electrical Circuits. Proceedings - 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2020; IEEE inc.
2. *Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б.* Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. М.: Наука. 2008. 339 с.
3. *Бурцев Ю.А.* Сравнение программы расчета электрических цепей на основе модифицированного табличного метода с известными аналогами // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2013. № 4. С. 8-13.
4. *Пилипенко А.М.* Гибридные методы высокого порядка точности для численного анализа во временной области жестких и колебательных цепей // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2017. № 3(18). С. 9295. https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2017/08/Pilipenko_3_1_17.pdf. Дата обращения 12 июля 2023 г.
5. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. / Пер. с англ., М.: Мир, 1990. 512 с. (E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. Solving ordinary differential equations I. Nonstiff Problems. Springer Verlag Berlin Heidelberg. 1987)
6. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. / Пер. с англ. М.: Мир. 1999. 685 с. (E. Hairer, G. Wanner. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition. Springer Verlag Berlin Heidelberg 1991. 1996.)
7. *Скворцов Л.М.* Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. М.: ДМК Пресс. 2018. 230 с.
8. *Moler C., Van Loan C.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Review. 2003. Vol. 45(1). Pp. 3-49.
9. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука. 1979. 208 с.
10. *Чуа Л.О., Пен-Мин Лин.* Машинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). / Пер с англ., М.: Энергия, 1980. 640 с. (Leon O. Chua, Pen-Min Lin. Computer-aided analysis of electronic circuits. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey. 1975. 640 с.)
11. *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. / Пер. с англ. М.: Мир. 1986. 502 с. (G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris. Pade approximants. London, Addison-Wesley Publishing Company. 1981. 502 p.)
12. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. / Пер с англ., Москва: Радио и связь, 1988. 560 с. (J. Vlach, K. Singhal. Computer Methods for Circuit Analysis and Design. New York, Van Nostrand Reinhold Company. 1983. 560 p.)

Бурцев Юрий Алексеевич. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова», г. Новочеркасск, Россия. Кандидат технических наук, доцент. Область научных интересов: численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциально-алгебраических систем уравнений, теория электрических цепей. E-mail: proton36@yandex.ru (ответственный за переписку)

Solving of Cauchy Problem with High Precision Methods Based on Matrix Exponent

Y. A. Burtsev

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)

Abstract. A set of new numerical methods for solving linear ordinary differential equation systems (Cauchy problem) is developed. The methods are based on decomposition of Pade approximation of the matrix exponent to simplest fractions. Homogenous systems can be solved, and nonhomogeneous systems with piecewise-polynomial right-hand side function. The new methods are equivalent to some well-known Runge-Kutta type methods like Radau and Lobatto methods in terms of accuracy and steady areas. However, new methods are much more simple in theory and practical implementation, and they require several times less computational work. Methods with diagonal Pade approximations are A -stable, and methods with subdiagonal Pade approximations are L -stable. New methods can be used for solving stiff, oscillative and stiff-oscillative systems.

Keywords: numerical methods, ordinary differential equations, Cauchy problem, Pade approximation, simplest fractions.

DOI: 10.14357/20790279240101 **EDN:** KPQYBO

References

1. Burtsev Y. High Precision Methods Based on Pade Approximation of Matrix Exponent for Numerical Analysis of Stiff-Oscillatory Electrical Circuits. Proceedings - 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2020; IEEE inc.
2. Gridin V.N., Mikhajlov V.B., Shusterman L.B. Numerical-analytical modelling of radioelectronic schemes. Moscow: Science Publishing; 2008. 339 p.
3. Burtsev Y.A. 2013. Comparing of program for calculation of electrical circuits based on modified table method with known analogs. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Elektromekhanika.* 2013; 4:8-13 (In Russ).
4. Pilipenko A.M. 2017. High precision hybrid methods for numerical analysis of stiff and oscillative circuits in time domain. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatzionnyeologii.* 2017; 3(18):9295 (In Russ). Available at: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2017/08/Pilipenko_3_1_17.pdf. Accessed July 12, 2023.
5. E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. Solving ordinary differential equations I. Nonstiff Problems. Springer Verlag Berlin Heidelberg; 1987. 512 p.
6. E. Hairer, G. Wanner. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition. Springer Verlag Berlin Heidelberg; 1991, 1996. 685 p.
7. Skvortsov L.M. Numerical solving of ordinary differential and differential-algebraic equations. Moscow: DMK Press Publishing; 2018. 230 p.
8. Moler C., Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*; 2003; vol. 45(1):3-49
9. Rakitskij Y.V., Ustinov S.M., Chernorutskij I.G. Numerical methods for solving stiff problems. Moscow: Science Publishing; 1979. 208 p.
10. Leon O. Chua, Pen-Min Lin. Computer-aided analysis of electronic circuits. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey; 1975. 640 p.
11. G.A. Baker, Jr., P. Graves-Morris. Pade approximants. London: Addison-Wesley Publishing Company. 1981. 502 p.
12. J. Vlach, K. Singhal. Computer Methods for Circuit Analysis and Design. New York: Van Nostrand Reinhold Company. 1983. 560 p.

Burtsev Yuri Alexeevich. Philosophy doctor, senior lecturer. Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI). Scientific interests: Numerical methods for solving systems of ordinary differential equations and systems of differential-algebraic equations, Theory of electrical circuits. Email proton36@yandex.ru