

Безытерационный метод расчета завихренности в ограниченной области

Н.В. ПЕСТРЯКОВА

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается метод расчета двумерного плоского нестационарного конвективного теплопереноса слабо сжимаемой жидкостью в областях сложной формы с различными тепловыми и динамическими граничными условиями в переменных «функция тока–завихренность–температура». Используется схема расщепления, линеаризованная по конвективным членам, записанным специальным образом. Разработан безытерационный способ расчета граничных условий для завихренности. Выполнены расчеты течения в плоском канале с квадратной полостью на дне, а также для свободной конвекции в квадратной камере с боковым подогревом.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, уравнение Пуассона, завихренность, функция тока, условие Тома, конвективный теплоперенос.

DOI: 10.14357/20790279240106 **EDN:** SQPZDV

Введение

Численное моделирование играет важную роль в решении многих технических и технологических задач, связанных с конвективным теплопереносом в ограниченных областях. Одним из объектов приложения являются жилые и производственные помещения [1]. Вычислительный эксперимент позволяет получить подробные поля течения и температуры.

При разработке новых методов и моделей необходимо проведение тестовых расчетов [2,3]. Развитие вычислительной техники обеспечивает получение детализированной трехмерной картины течения в исследуемой области. Однако двумерные расчеты [4-9] сохраняют свою актуальность, поскольку это приближение является вполне допустимым для многих реальных задач, а также ввиду наглядности и интерпретируемости результатов, что позволяет оценить их достоверность.

Часто возникает проблема организации многовариантного моделирования для более тщательного изучения влияния различных параметров, нахождения основных закономерностей теплоконвективных процессов с целью их оптимизации.

В настоящей работе представлена основанная на переменных «функция тока–завихренность–температура» методика расчета двумерного нестационарного конвективного теплопереноса слабо сжимаемой жидкостью в ограниченных областях для плоской геометрии и постоянной вязкости.

Данный подход может быть обобщен на осесимметричный случай при переменной вязкости [10].

Алгоритм является универсальным для областей различной формы и широкого спектра граничных условий [11-13]. При нахождении численного решения используется линеаризованная по конвективному переносу разностная схема расщепления. Разработан и реализован безытерационный способ расчета граничных условий на стенках для завихренности.

Представляет интерес следующая история, изложенная главным научным сотрудником Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, д.ф.-м.н. В.Т. Жуковым. Как ему стало известно из первоисточников, в 2018 г. среди американских ученых российского происхождения (С. Цынков и А. Курганов) обсуждалась проблема отсутствия сходимости итераций в близких по постановке задачах. С. Цынков вспомнил статью [14], в которой был построен безытерационный алгоритм решения известной задачи о полости с движущейся стенкой. Характерной трудностью решения таких задач является то, что на функцию тока задается два граничных условия, а на завихренность – ни

одного. Обычно для отыскания решения неявной разностной схемы на верхнем по времени слое используется какой-либо итерационный процесс. Скорость сходимости такого процесса, как правило, существенно зависит от того, каким образом аппроксимируются граничные условия для завихренности. С помощью средств метода разностных потенциалов удалось избежать разностной аппроксимации граничного условия для завихренности. Оказалось, что в англоязычной среде такой результат известен не был. По запросу редактора Journal of Scientific Computing главным редактором журнала «Математическое моделирование» Б.Н. Четверушкиным было дано разрешение на перевод и публикацию английской версии статьи. Она была опубликована в 2019 году [15].

Между тем автором в 1997г. был предложен безытерационный алгоритм в более общей постановке [10]. Рассмотрен стандартный тест о свободноконвективном движении жидкости в полости квадратного сечения с подогревом. Кроме того, проведено тестирование на известной задаче о течении в плоском канале с квадратной полостью на дне, причем через основание полости может инжектироваться жидкость.

1. Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о двумерной смешанной (естественной и/или вынужденной) конвекции слабо сжимаемой вязкой теплопроводящей жидкости в проточной или непроточной односвязной области сложной формы для широкого спектра тепловых и динамических граничных условий в плоской геометрии. Математическая модель основывается на системе нестационарных уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением переноса температуры T в приближении Буссинеска.

Для скорости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и нормализованно на плотность давления p уравнение движения в поле объемной силы $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} + \text{grad} p - \nu \text{div}(\text{grad} \mathbf{v}) - g\beta T \mathbf{e} - \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, 0 < t \leq t_f,$$

где T – отклонение температуры от равновесной, ν – постоянный коэффициент кинематической вязкости, β – коэффициент объемного расширения, $\mathbf{e} = (0, 1)$ определяет направление выталкивающей силы, g – ускорение свободного падения, Ω – односвязная область, t – время.

Уравнение (1) следует дополнить уравнением несжимаемости:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f, \quad (2)$$

Перенос тепла нелинейной теплопроводностью и конвекцией с учетом объемного источника тепла $Q(\mathbf{x}, t)$ описывается уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T - \text{div}(\kappa \text{grad} T) - Q = 0, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f, \quad (3)$$

где κ – нелинейный коэффициент теплопроводности.

Граничные условия могут быть следующими.

На участках границы, соответствующих неподвижным твердым стенкам, могут выполняться условия прилипания и непротекания или условие инжекции жидкости:

$$v_\tau(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, 0 < t \leq t_f, \quad (4)$$

$$v_n(\mathbf{x}, t) = v_{inj}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, 0 < t \leq t_f,$$

причем $v_{inj} = 0$ в отсутствии инжекции; v_τ и v_n – касательная и нормальная к границе компоненты скорости.

Может также выполняться условие проскальзывания:

$$\text{rot} v(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, 0 < t \leq t_f. \quad (5)$$

На стенках либо задается значение температуры (условие первого рода), либо они являются теплоизолированными (условие второго рода):

$$\eta T(\mathbf{x}, t) + \mu \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_w, 0 < t \leq t_f, \quad (6)$$

($\eta \neq 0, \mu = 0$) – условие первого рода,

($\eta = 0, \mu \neq 0$) – условие второго рода.

Здесь и ниже \mathbf{n} – внутренняя нормаль к поверхности. Для проточной области требуется задать условия в приточном и выходном отверстиях. В приточном отверстии задаются профили скорости и температуры:

$$v(\mathbf{x}, t) = v_{in}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in}, 0 < t \leq t_f, \quad (7)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_{in}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega_{in}, 0 < t \leq t_f.$$

В выходном отверстии задаются «мягкие» условия (второго рода), соответствующие тому, что линии тока перпендикулярны плоскости выходного отверстия, а значения всех физических величин неизменны вдоль линий тока:

$$v_\tau(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v_n}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega_{out}, 0 < t \leq t_f. \quad (8)$$

В начальный момент времени задаются некоторые поля течения и температуры:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, жидкость может покоиться и иметь равновесную температуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\ T_0(\mathbf{x}) &= 0, \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Перейдем к переменным «функция тока–завихренность». Компоненты скорости выражаются через функцию тока $\psi(\mathbf{x}, t)$ следующим образом:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что условие несжимаемости (2) всегда выполнено. Завихренность определяем следующим образом:

$$\omega = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (12)$$

С целью унификации записи конвективных слагаемых для произвольного вектора $\mathbf{s}=(s_1, s_2)$ определим дифференциальный оператор конвективного переноса $V(\mathbf{s})$:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{s}) &= V(s_1) + V(s_2), \\ V(s_1)\varphi &= 0, 5 \left(\frac{\partial(s_1\varphi)}{\partial x_1} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \\ V(s_2)\varphi &= 0, 5 \left(\frac{\partial(s_2\varphi)}{\partial x_2} + s_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (11)–(13) из уравнения для скорости (1) можно получить уравнение для завихренности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + V(\mathbf{v})\omega + D\omega - \Phi(\mathbf{x}, t) &= 0, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f, \\ D\omega &= -\nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right), \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= g\beta \frac{\partial T}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (11) и (12) получаем уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} \omega &= \Lambda \psi, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f, \\ \Lambda \psi &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнение температуры с учетом введенного оператора конвективного переноса (13) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + V(\mathbf{v})T + \Delta T - Q &= 0, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f, \\ \Delta T &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Систему уравнений (14)–(16) следует дополнить начальными и граничными условиями, вытекающими из (4)–(10).

Все условия для температуры остаются без изменений.

Условия прилипания и непротекания или условие инъекции жидкости (4) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial \Omega_w, 0 < t \leq t_f. \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x}, t) = \pm v_{inj}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial \Omega_w, 0 < t \leq t_f, \quad (18)$$

причем $v_{inj} = 0$ в отсутствии инъекции.

Граничное условие Тома для завихренности на стенке определяется из разложения функции тока в ряд Тейлора в окрестности стенки с учетом уравнения Пуассона (15) и условия прилипания (17):

$$\omega_w = -\frac{2}{h_w^2} (\psi_{w \pm h_w} - \psi_w). \quad (19)$$

Здесь ψ_w и $\psi_{w \pm h_w}$ – значения функции тока на стенке и в точке, отстоящей на шаг h_w в направлении нормали. Условие проскальзывания (5) принимает вид:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial \Omega_w, 0 < t \leq t_f. \quad (20)$$

В приточном отверстии с учетом входного профиля скорости (7) по формуле (11) определяется профиль функции тока, а с помощью уравнения Пуассона (15) – завихренность.

В выходном отверстии, учитывая (8), имеем следующие условия:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \partial \Omega_{out}, 0 < t \leq t_f. \quad (21)$$

Отметим, что разность значений функции тока на стенке по обе стороны вентиляционного отверстия равна расходу воздуха через него.

В начальный момент времени задается температура внутри расчетной области, а также определяемые некоторым полем течения значения функции тока и завихренности:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{x}, 0) = \omega_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega. \quad (22)$$

В частности, для покоящейся жидкости:

$$\psi_0(\mathbf{x}) = const, \omega_0(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega. \quad (23)$$

Заметим, что стационарное решение получается в результате установления во времени и не зависит от выбора начального распределения, но время расчета тем меньше, чем ближе начальные данные к стационарному режиму.

Поставленная краевая задача (14)–(23) решается в произвольной односвязной составленной из прямоугольников области, ограничения на форму которой связаны с построением сетки, согласованной с границами.

При обезразмеривании системы уравнений (14)–(23) в качестве независимых определяющих параметров для проточной полости выбираем u_0 – характерное значение скорости, δT – характерный перепад температуры и H – характерный геометрический размер области. Безразмерные переменные и параметры имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 / H, \tilde{x}_2 = x_2 / H, \tilde{t} = u_0 t / H, \\ \tilde{v}_1 &= v_1 / u_0, \tilde{v}_2 = v_2 / u_0, \\ \tilde{v} &= v / (u_0 H) = 1 / \text{Re}, \\ \tilde{\omega} &= \omega H / u_0, \tilde{\psi} = \psi / (u_0 H), \\ \tilde{T} &= T / \delta T, \tilde{Q} = QH / (\delta T \cdot u_0), \\ \tilde{\kappa} &= \kappa / (u_0 H) = 1 / \text{Pe} = 1 / (\text{Pr} \cdot \text{Re}), \\ \tilde{G} &= \tilde{\beta} \tilde{g} = Ar = Gr / \text{Re}^2,\end{aligned}\quad (24)$$

где $\text{Re} = u_0 H / \nu$ – число Рейнольдса, $\text{Pe} = u_0 H / \kappa$ – число Пекле, $Ar = Gr / \text{Re}^2$ – число Архимеда, $Gr = g \beta \delta T H^3 / \nu^2$ – число Грасгофа, $\text{Pr} = \nu / \kappa$ – число Прандтля.

Для замкнутой полости в качестве основных параметров берем ν , δT , H и вводим следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 / H, \tilde{x}_2 = x_2 / H, \tilde{t} = \nu t / H^2, \\ \tilde{v}_1 &= v_1 H / \nu, \tilde{v}_2 = v_2 H / \nu, \\ \tilde{v} &= \nu / \nu = 1, \\ \tilde{\omega} &= \omega H^2 / \nu, \tilde{\psi} = \psi / \nu, \\ \tilde{T} &= T / \delta T, \tilde{Q} = QH^2 / (\delta T \cdot \nu), \\ \tilde{\kappa} &= \kappa / \nu = 1 / \text{Pr}, \\ \tilde{G} &= \beta g \delta T \cdot H^3 / \nu^2 = Gr.\end{aligned}\quad (25)$$

В системе уравнений (1) отсутствует давление. Его можно найти по известному решению для функции тока и завихренности, например, методом пошагового интегрирования [16], в котором полный напор давления вычисляется по его градиенту:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\nu \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \omega - \frac{\partial v_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \omega - \frac{\partial v_2}{\partial t}.\end{aligned}\quad (26)$$

В качестве последнего шага в преобразовании уравнений в частных производных, перед тем, как перейти к изложению конечно-разностного метода решения системы (14)–(23), отметим, что используемая далее линеаризованная разностная схема базируется на специальном представлении конвективных членов. Определим вектор \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2), b_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, b_2 = -\frac{\partial \omega}{\partial x_1}.\quad (27)$$

Тогда из (11), (12), аналогично [17], можно записать конвективный перенос завихренности в виде:

$$V(\mathbf{v})\omega = -V(\mathbf{b})\psi.\quad (28)$$

То есть конвективный перенос завихренности интерпретируется как некий эффективный перенос функции тока. Следовательно, с учетом (15) и (27) можно записать уравнение для завихренности (14) в виде уравнения для функции тока:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - V(\mathbf{b})\Delta \psi + D\Delta \psi - \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in \Omega, 0 < t \leq t_f.\quad (29)$$

2. Разностный аналог задачи и методика решения

При численном решении краевой задачи (14)–(23) область непрерывного аргумента заменяется сеткой с постоянным шагом по времени и переменным по пространству:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{w}_\tau \times \bar{w}_h, \bar{w}_\tau = \{t^n = n\tau\}, \\ \bar{w}_h &= \{(x_{1i}, x_{2j})\}, x_{1i} = x_{1,i-1} + h_{1i}, i = 2, \dots, N_1, \\ x_{2j} &= x_{2,j-1} + h_{2j}, j = 2, \dots, N_2, \\ \bar{h}_{1i} &= \begin{cases} 0,5h_{1i}, i = 0, \\ 0,5(h_{1i} + h_{1,i+1}), i = 1, \dots, N_1 - 1, \\ 0,5h_{1N_1}, i = N_1, \end{cases} \\ \bar{h}_{2j} &= \begin{cases} 0,5h_{2j}, j = 0, \\ 0,5(h_{2j} + h_{2,j+1}), j = 1, \dots, N_2 - 1, \\ 0,5h_{2N_2}, j = N_2.\end{cases}\end{aligned}\quad (30)$$

Прямоугольная согласованная сетка по пространству $\overline{W}_h = W_h \cup \partial W_h$ строится таким образом, чтобы она пересекалась с границей области только в узлах (W_h – множество внутренних узлов, ∂W_h – множество граничных узлов). В области больших градиентов (обычно у стенок) пространственная сетка сгущается в соответствующем направлении.

Поскольку сетка согласована с границей, форму расчетной области определяем в пространстве индексов узлов сетки.

Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются сеточные функции вида:

$$f_{ij} = f(x_{1i}, x_{2j}). \quad (31)$$

Все величины определяются в узлах сетки, кроме давления, вычисляемого в центрах сеточных ячеек, а также компонент скорости, которые отнесены к серединам соответствующих сторон контрольных объемов.

Для приближенных решений будем использовать те же обозначения, что и для точных.

Ниже используются следующие аппроксимации первых и вторых производных:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1} &= \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_{1,i+1}}, \varphi_{x_1} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_{1i}}, \varphi_{x_1} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h_{1i}} \\ \varphi_{x_1 x_1} &= \frac{1}{h_{1i}} \left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_{1,i+1}} - \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_{1i}} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что в (32) выражение первых производных через центральные разности (используемое ниже в конвективных членах), а также выражение для вторых производных, имеют второй порядок аппроксимации.

Аппроксимируем оператор конвективного переноса следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{s}) &= V(s_1) + V(s_2), \\ V(s_1)\varphi &= 0,5((s_1\varphi)_{x_1}^{\circ} + s_1\varphi_{x_1}^{\circ}), \\ V(s_2)\varphi &= 0,5((s_2\varphi)_{x_2}^{\circ} + s_2\varphi_{x_2}^{\circ}). \end{aligned} \quad (33)$$

При аппроксимации уравнения для температуры выделим множество граничных узлов с условием первого рода ∂W_h^{1T} и второго рода ∂W_h^{2T} . Конечно-разностный аналог уравнения (16) имеет следующий вид:

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} + V(\mathbf{v}^n)T^{n+1} + \Delta T^{n+1} - Q^n = R(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t), \quad (34)$$

$$\mathbf{x} \in W_h \cup \partial W_h^{2T}, 0 < t \leq t_j.$$

Функция $R(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$ отлична от нуля только в узлах, приграничных к ∂W_h^{1T} , и определяется зна-

чением температуры в граничных узлах. Сеточный диффузионный оператор в уравнении температуры задается следующим образом:

$$\Delta\varphi = -(\kappa\varphi_{x_1})_{x_1} - (\kappa\varphi_{x_2})_{x_2}. \quad (35)$$

Отметим, что на границе ∂W_h^{2T} оператор $\Delta\varphi$ модифицируется с учетом условия второго рода для φ . При этом вводится фиктивный узел вне границы, отстоящий на шаг, равный приграничному, с температурой, равной значению в приграничном узле.

При аппроксимации уравнения (29) выделим три множества: множество граничных узлов на стенке ∂W_h^w (совпадает для функции тока и для завихренности), с условием второго рода для завихренности $\partial W_h^{2\omega}$ и для функции тока $\partial W_h^{2\psi}$. Конечно-разностный аналог уравнения (29) имеет вид:

$$\frac{\partial \Lambda\psi}{\partial t} - V(\mathbf{b})\Lambda\psi + D\Lambda\psi + W(x_1, x_2)(\psi - \psi_w) - \Phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (36)$$

$$\mathbf{x} \in W_h \cup \partial W_h^{2\omega}, 0 < t \leq t_j.$$

Здесь в записанном для пристеночного узла уравнении из $D\Lambda\psi$ формально выделяется часть, относящаяся к значениям завихренности $\omega = \Lambda\psi$ на твердой стенке (согласно определению завихренности (15) и формуле Тома (19), примененной на предложенной сетке (30)). Соответственно, сеточная функция $W(x_1, x_2)$ отлична от нуля только в пристеночных узлах:

$$W(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2}{h_{1w}^4}, x_1 = x_{1,w\pm 1}, \mathbf{x}_w \in \partial W_w, \\ \frac{2}{h_{2w}^4}, x_2 = x_{2,w\pm 1}, \mathbf{x}_w \in \partial W_w. \end{cases} \quad (37)$$

Конечно-разностный аналог диффузионного оператора уравнения для завихренности (14) имеет вид:

$$D\varphi = -\nu(\varphi_{x_1})_{x_1} - \nu(\varphi_{x_2})_{x_2}. \quad (38)$$

Отметим, что на границе $\partial W_h^{2\omega}$ оператор $D\varphi$ модифицируется аналогично диффузионному оператору $\Delta\varphi$ для уравнения температуры.

Разностная схема для решения уравнения (36) аналогично [17,18] основана на естественной линеаризации, когда оператор $V(\mathbf{b})$ определяется решением на предыдущем временном слое. Используется чисто неявная факторизованная схема расщепления (аналог схемы Дугласа-Рекфорда [19]) с безытерационной реализацией граничных условий для завихренности. На первом этапе решается следующее разностное уравнение:

$$\frac{\Lambda\psi^{n+1/2} - \Lambda\psi^n}{\tau} - V(\mathbf{b}^n)\psi^n + D\Lambda\psi^{n+1/2} + W(x_1, x_2)(\psi^n - \psi_w) - \Phi = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{x} \in W_h \cup \partial W_h^{2\omega}, 0 < t \leq t_j,$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = g\beta T_{x_1}^{n+1} + (F_{x_1}^n - F_{x_1}^n).$$

Конвективный перенос и граничные условия для завихренности на стенке берутся с предыдущего временного слоя. С учетом (15) в уравнение (39) вводится завихренность:

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} - V(\mathbf{b}^n)\psi^n + D\omega^{n+1/2} + W(x_1, x_2)(\psi^n - \psi_w) - \Phi = 0, \quad (40)$$

$$\mathbf{x} \in w_h \cup \partial w_h^{2w}, 0 < t \leq t_j.$$

На втором этапе проводится коррекция по конвективному переносу и граничному условию для завихренности на стенке:

$$\frac{\Lambda\psi^{n+1} - \Lambda\psi^{n+1/2}}{\tau} - (W(x_1, x_2) - V(\mathbf{b}^n))(\psi^{n+1} - \psi^n) = 0, \quad (41)$$

$$\mathbf{x} \in w_h \cup \partial w_h^{2w}, 0 < t \leq t_j.$$

Сеточный аналог оператора Лапласа:

$$\Lambda\phi = -(\phi_{\bar{x}_1})_{x_1} - (\phi_{\bar{x}_2})_{x_2}. \quad (42)$$

На границе ∂w_h^{2w} оператор $\Lambda\phi$ модифицируется аналогично диффузионному оператору $\Delta\phi$ для уравнения температуры.

Приведем также сеточные аппроксимации следующих величин:

- компонент скорости:

$$v_1 = \psi_{x_2}^\circ, v_2 = -\psi_{x_1}^\circ; \quad (43)$$

- компонент вектора \mathbf{b} в операторе конвективно-переноса:

$$b_1 = \omega_{x_2}^\circ, b_2 = -\omega_{x_1}^\circ. \quad (44)$$

Алгоритм решения рассматриваемой задачи обеспечивает унификацию расчетов при различных конфигурациях области и граничных условий (в рамках допустимого класса). Иначе говоря, задание варианта не требует перетрансляции модулей класса вычислений. Данные, определяющие геометрию области и граничные условия, считываются в начале решения задачи. Последующие этапы являются универсальными для всего класса задач.

По известному полю решения на временном шаге n рассчитывается поле температуры T на шаге $n+1$. При этом сначала вычисляются пять диагоналей и правая часть разностного уравнения для температуры (34), и затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно температуры на очередном временном слое. На первом этапе использования чисто неявной факторизованной схемы (аналог схемы Дугласа-Рекфорда) из уравнения (40) находится новое распределение завихренности $\omega^{n+1/2}$ во внутренних узлах области с учетом полученного поля температуры T^{n+1} . Тем самым конвективный перенос и граничное условие первого рода для вихря скорости берутся с предыдущего временного слоя. При этом сначала вычисляются пять диагоналей несимме-

тричной матрицы и правая часть разностной схемы уравнения для завихренности, а затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно вихря скорости на промежуточном слое по времени.

Второй этап состоит в коррекции по конвективному переносу и граничному условию для завихренности (уравнение (41)). При решении этой несамосопряженной эллиптической задачи для определения функции тока сначала вычисляются пять диагоналей и правая часть разностного уравнения для функции тока, и затем решается линейная система с несимметричной матрицей относительно функции тока ψ^{n+1} на очередном слое по времени. Из уравнения Пуассона по полю ψ^{n+1} определяются новые значения завихренности на очередном временном слое ω^{n+1} .

В качестве критерия сходимости берется малость невязки в норме L_2 :

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i,j} (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n)^2 \bar{h}_{1i} \bar{h}_{2j} \right\}^{1/2} / \tau < \varepsilon_\psi, \\ & \left\{ \sum_{i,j} (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)^2 \bar{h}_{1i} \bar{h}_{2j} \right\}^{1/2} / \tau < \varepsilon_\omega, \quad (45) \\ & \left\{ \sum_{i,j} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n)^2 \bar{h}_{1i} \bar{h}_{2j} \right\}^{1/2} / \tau < \varepsilon_T. \end{aligned}$$

Системы сеточных уравнений решались с помощью неявного итерационного метода вариационного типа, являющегося одним из обобщений на несамосопряженный случай методов группы сопряженных направлений [20].

3. Тестирование программы

Тестирование программы выполнено на задаче о свободной конвекции жидкости в замкнутой полости квадратного сечения с боковым подогревом. Нижняя и верхняя границы являлись теплоизолированными, левая и правая – изотермичными. В качестве независимых размерных определяющих параметров использовались перепад температуры между стенками, ширина полости и значение кинематической вязкости. Расчет стационарных решений проведен методом установления. Полученные на сетке 31×31 поля течения и температуры для горячей левой и холодной правой стенок при $Pr = 1$ и $Ra = 10^4, 10^5$ и $Ra = GrPr$ – число Рэлея приведены на рис. 1,2 и соответствуют результатам аналогичных расчетов [18].

Проведено численное моделирование обтекания квадратной полости, расположенной на дне плоского канала (рис. 3) в следующей постановке. Выше полости по течению параметры входно-

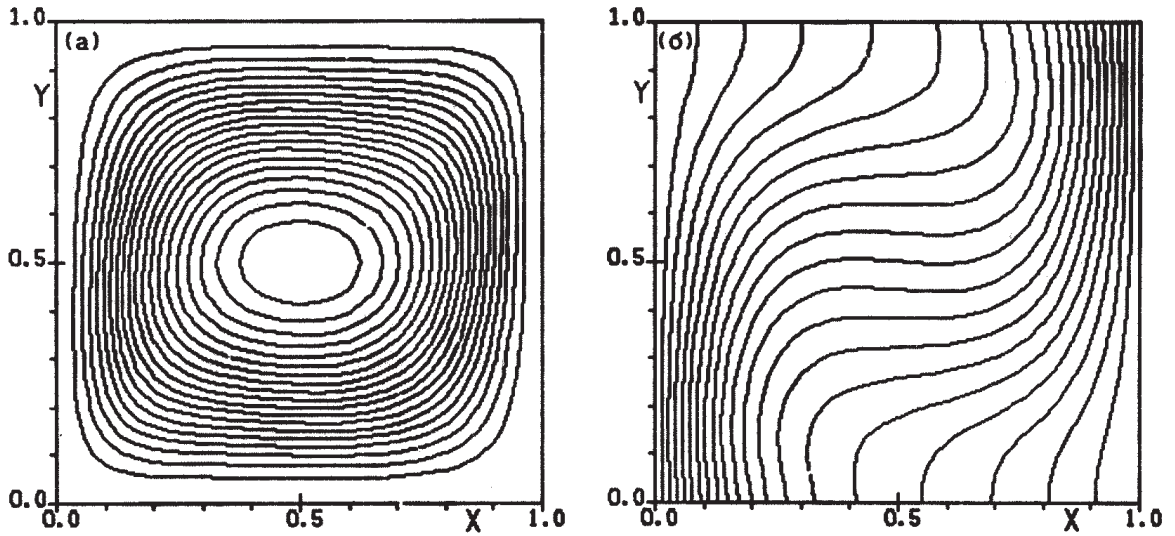


Рис. 1. Изотермы (а) и линии тока (б) для $Ra = 10^4$.

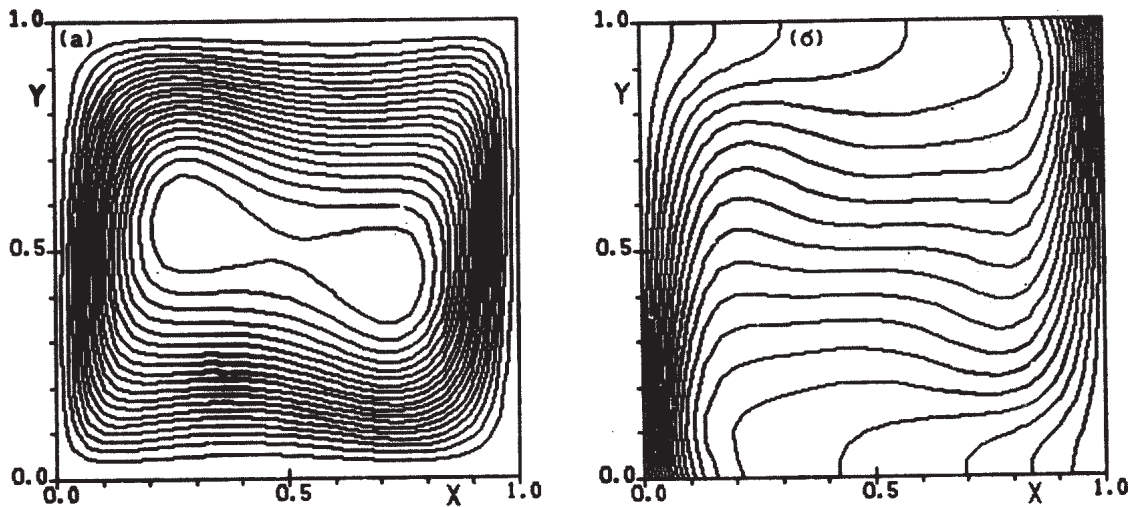


Рис. 2. Изотермы (а) и линии тока (б) для $Ra = 10^5$

го потока соответствовали течению Пуазейля. На выходном участке задавались граничные условия второго рода. Рассматривались варианты как с равномерной инъекцией жидкости через основание полости (рис. 4,5), так и без нее (рис. 3). В качестве независимых определяющих параметров использовались: B – ширина полости (равная ширине канала) и U – средняя скорость входного потока в канале. Крайняя левая граница выбиралась на расстоянии $0,8B$ вверх по потоку от полости, а правая – на расстоянии B вниз по потоку. Расчеты проводились на равномерной сетке с 57 узлами в направлении оси канала и 41 узлом в перпендикулярном направлении. Установившиеся при $Pr = 100$ поля течения в отсутствии инъекции (рис. 3), а также при скорости инъекции, составляющей 2% от U (рис. 4) и 5% от U (рис. 5) соответствуют рассчитанным в работе [21].

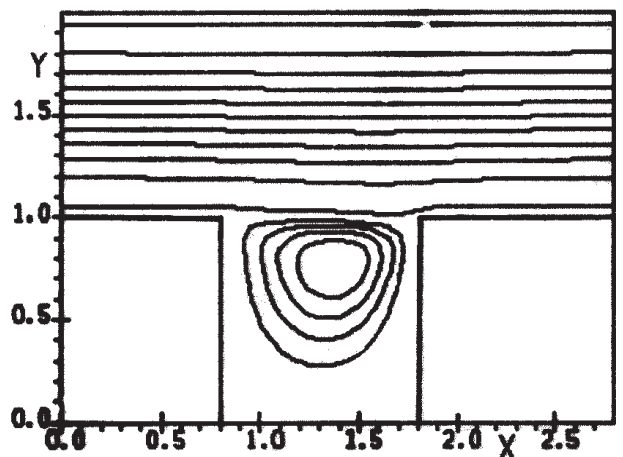


Рис. 3. Линии тока для $Re = 100$, инъекция отсутствуют

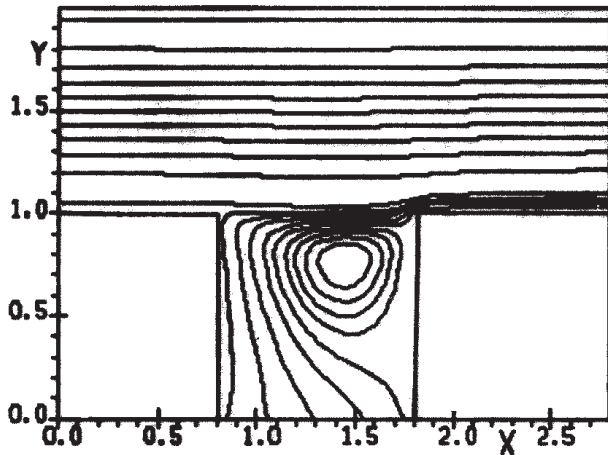


Рис. 4. Линии тока для $Re = 100$, инжекция 2%

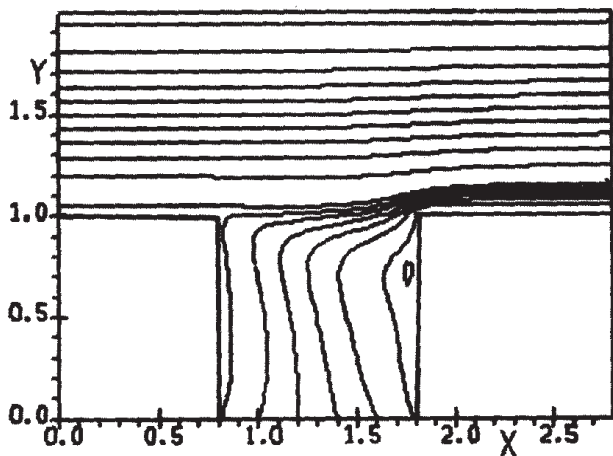


Рис. 5. Линии тока для $Re = 100$, инжекция 5%

Заключение

Разработанный алгоритм позволяет проводить расчеты двумерного плоского нестационарного конвективного теплопереноса слабо сжимаемой жидкостью в переменных «функция тока–завихренность–температура» при постоянной вязкости. Рассмотрены различные тепловые и динамические граничные условия. При разностном решении применяется схема расщепления, линеаризованная по конвективным членам, записанным специальным образом. Граничные условия для завихренности реализуются безытерационно, что было сделано впервые для проточных областей. Данный результат позволяет обходить проблемы, возникающие при итерационном расчете. Для вычислений в односвязных областях сложной формы используется разработанная авторами программа, универсальная для данного класса задач, успешно прошедшая многократное тестирование на аналитических и экспериментальных результатах. Проведено чис-

ленное моделирование течения в плоском канале с квадратной полостью на дне, а также для свободной конвекции в квадратной камере с боковым подогревом.

Литература

1. *Гримитлин М.И.* Распределение воздуха в помещениях. 3-е изд., доп. и испр. СПб.: АВОК Северо-Запад. 2004. 320 с.
2. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Марков Д.* Численное моделирование циркуляции воздуха в помещении при подаче из плоской щели. I. Отработка применения вихререзающего подхода с использованием периодической постановки // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 56–74.
3. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Марков Д.* Численное моделирование циркуляции воздуха в помещении при подаче из плоской щели. II. LES-расчеты для помещения конечной ширины // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2020. Т. 13. № 3. С. 75–92.
4. *Bennetsen J.C.* Numerical simulation of turbulent airflow in livestock buildings. – The Technical University of Denmark. The Department of Mathematical Modeling. Ph. D thesis. 1999. 205 p.
5. *Voight L.K.* Navier–Stokes simulations of airflow in rooms and around human body. – International Center for Indoor Environment and Energy, Technical University of Denmark. Department of Energy Engineering. Ph. D thesis. 2001. 169 p.
6. *Mora L., Gadgil A.J., Wurtz E.* Comparing zonal and CFD model predictions of isothermal indoor airflows to experimental data // *Indoor Air*. 2003. Vol. 13. No.2. P. 77–85.
7. *Rong L., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an annex 20 room benchmark test using Ansys CFX 11.0. – Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. 2008. DCE Technical Report. No. 46. 16 p.
8. *Dreau J.L., Heiselberg P., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an Annex 20 benchmark test using Star-CCM+. – Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering, 2013. DCE Technical Report. No. 147. 22 p.
9. *Yuce B.E., Pulat E.* Forced, natural and mixed convection benchmark studies for indoor thermal environments // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 92. March. P. 1–14.

10. Гавриков М.Б., Пестрякова Н.В. Численное моделирование конвективного теплопереноса в ограниченной области. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1997. Препринт №28. 23 с.
11. Герасимов Б.П., Губарева Л.Б., Пестрякова Н.В. Численное моделирование конвективно-диффузионных процессов в полости. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1991. Препринт №26. 17 с.
12. Герасимов Б.П., Пестрякова Н.В. Численное моделирование практических задач ламинарного воздухообмена. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1991. Препринт №24. 18 с.
13. Герасимов Б.П., Пестрякова Н.В. Моделирование турбулентных режимов вентиляции помещений. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1991. Препринт. №22. 25 с.
14. Рябенкий В.С., Торгашов В.А. Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока // Математическое моделирование. Т. 8. №10. 1996. С. 100-112.
15. Ryaben'kii V.S., Torgashov V.A. An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation. // Journal of Scientific Computing. Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature. 2019. <https://doi.org/10.1007/s10915-019-00926-1>.
16. Richards C.W., Crane C.M. Pressure Marching Schemes that Work. // Int. J. Numer. Methods Engng. 1980. V. 15. № 4. P. 599–610.
17. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Попков А.Г., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное решение задач гидродинамики в переменных «функция тока, вихрь скорости, температура». М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 1993. Препринт №22. 21с.
18. Вабищевич П.Н., Макаров М.М., Чуданов В.В., Чурбанов А.Г. Численное моделирование конвективных течений в переменных «функция тока, вихрь скорости, температура». М.: Институт математического моделирования РАН. 1993. Препринт №28.
19. Douglas J., Rachford H.H. On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82. P. 421–439.
20. Iliev O.P., Makarov M.M., Vassilevski P.S. Performance of Certain Iterative Methods in Solving Implicit Difference Schemes for 2-D Navier-Stokes Equations. // Int. J. Numer. Methods Engng. 1992.33(7): 1465-1479.
21. Джонсон Р., Данак А. Теплообмен при ламинарном обтекании прямоугольной полости при наличии инъекции жидкости. // Теплопередача. Серия С. 1976. Т. 98. № 2. С. 84–90.

Пестрякова Надежда Владимировна. Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Ведущий научный сотрудник. Доктор технических наук. Область научных интересов: вычислительная математика и физика, распознавание образов. E-mail: pestryakova@isa.ru

Noniterative implementation of the vorticity evaluation in a limited area

N.V. Pestryakova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. A numerical method is considered to predict 2D unsteady convective heat transfer by weakly compressible liquid in cavities of various forms with a number of dynamic and temperature boundary conditions in “stream function-vorticity-temperature” variables. A splitting finite-difference scheme is used, which is linearized on convective terms, written in a special way. Here is developed a noniterative implementation of the vorticity evaluation on a boundary. A flow in a channel with a square cavity on the bottom, and also a buoyancy-driven flow in a square cavity with side walls of different temperature are modeled.

Keywords: *Navier-Stokes equations, Poisson equation, vorticity, stream function, Thom condition, convective heat transfer.*

DOI: 10.14357/20790279240106 **EDN:** SQPZDV

References

1. *Grimtlin M.I.* Air distribution in the rooms. 3rd Ed. St. Petersburg: AVOK Severo-Zapad; 2004. 320 p.
2. *Zasimova M.A., Ivanov N.G., Markov D.* Numerical modeling of air circulation in a room when supplied from a flat slot. I. Testing the use of the eddy-resolving approach using periodic formulation. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti CPbGPU. Fiziko-matematicheskkiye nauki.* 2020; 13 (3): 56–74.
3. *Zasimova M.A., Ivanov N.G., Markov D.* Numerical modeling of air circulation in a room when supplied from a flat slot. II. LES-calculations for a room of finite width. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti CPbGPU. Fiziko-matematicheskkiye nauki.* 2020; 13 (3): 75–92.
4. *Bennetsen J.C.* Numerical simulation of turbulent airflow in livestock buildings. The Technical University of Denmark. The Department of Mathematical Modeling. Ph. D thesis. 1999. 205 p.
5. *Voight L.K.* Navier–Stokes simulations of airflow in rooms and around human body. International Center for Indoor Environment and Energy, Technical University of Denmark. Department of Energy Engineering. Ph. D thesis. 2001. 169 p.
6. *Mora L., Gadgil A.J., Wurtz E.* Comparing zonal and CFD model predictions of isothermal indoor airflows to experimental data *Indoor Air.* 2003; 13 (2): 77–85.
7. *Rong L., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an annex 20 room benchmark test using Ansys CFX 11.0. Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. 2008. DCE Technical Report. No. 46. 16 p.
8. *Dreau J.L., Heiselberg P., Nielsen P.V.* Simulation with different turbulence models in an Annex 20 benchmark test using Star-CCM+. Denmark, Aalborg University, Department of Civil Engineering. 2013. DCE Technical Report. No. 147. 22 p.
9. *Yuce B.E., Pulat E.* Forced, natural and mixed convection benchmark studies for indoor thermal environments. *International Communications in Heat and Mass Transfer.* 2018; 92(March): 1–14.
10. *Gavrikov M.B., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of convective heat transfer in a limited area. M.: IPM im. M.V.Keldysha. 1997. Preprint № 28. 23 p.
11. *Gerasimkov B.P., Gubareva L.B., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of convective-diffusion processes in a cavity. M.: IPM im. M.V.Keldysha. 1997. Preprint № 28. 23 p.
12. *Gerasimkov B.P., Pestryakova N.V.* Numerical modeling of practical problems of laminar air exchange. M.: IPM im. M.V.Keldysha. 1997. Preprint № 28. 23 p.
13. *Gerasimkov B.P., Pestryakova N.V.* Моделирование турбулентных режимов вентиляции помещений. M.: IPM im. M.V.Keldysha. 1997. Preprint № 28. 23 p.
14. *Ryaben'kiy V.S., Torgashov V.A.* An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation. *Matem. Modelirovaniye.* 1996; 8 (10): 100–112.
15. *Ryaben'kiy V.S., Torgashov V.A.* An Iteration-Free Approach to Solving the Navier–Stokes Equations by Implicit Finite Difference Schemes in the Vorticity-Stream Function Formulation. *Journal of Scientific Computing.* Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature. 2019. <https://doi.org/10.1007/s10915-019-00926-1>
16. *Richards C.W., Crane C.M.* Pressure Marching Schemes that Work. *Int. J. Numer. Methods Engng.* 1980; 15 (4): 599–610.

17. *Vabishchevich P.N., Makarov M.M., Popkov A.G., Chudanov V.V., Churbanov A.G.* Numerical solution of hydrodynamics problems in the variables “stream function, velocity vortex, temperature”. M.: IPM im. M.V.Keldysha. 1993. Preprint №22. 21 p.
18. *Vabishchevich P.N., Makarov M.M., Chudanov V.V., Churbanov A.G.* Numerical modeling of convective flows in the variables “stream function, velocity vortex, temperature”. M.: Institut matematicheskogo modelirovaniia RAN. 1993. Preprint №28.
19. *Douglas J., Rachford H.H.* On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space Variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. 82: 421–439.
20. *Iliev O.P., Makarov M.M., Vassilevski P.S.* Performance of Certain Iterative Methods in Solving Implicit Difference Schemes for 2-D Navier-Stokes Equations. *Int. J. Numer. Methods Engng.* 1992. 33(7): 1465-1479.
21. *Dzhonson R., Danak A.* Heat transfer in laminar flow around a rectangular cavity in the presence of liquid injection. *Teploperedacha. Seriya S.* 1976. 98 (2): 84–90.

Pestryakova N.V. Doctor of Technical Sciences, PhD in Physics and Mathematics. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: pestryakova@isa.ru