

Моделирование характеристик деятельности отраслевых и региональных подсистем

Оптимизация сроков службы совместно используемых машин

С.А. Смоляк

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются неремонтируемые объекты, подвергающиеся случайным отказам, ремонт которых технически невозможен или экономически нецелесообразен. Важной задачей здесь является назначение объекту срока службы, по достижении которого он должен быть выведен из эксплуатации и замещен аналогичным новым независимо от своего состояния. Эта задача решается для двух объектов, совместно используемых в едином технологическом процессе. Для формирования оптимальной политики замещения машин используются методы теории надежности и стоимостной оценки. Экспериментальные расчеты показывают, что экономический эффект от оптимальной политики замещения может составлять до 1,7% от общей стоимости обеих машин в зависимости от величины потерь от остановки технологического процесса. Установлено также, что зависимости назначенных сроков службы от возраста машин могут быть разрывными и не монотонными.

Ключевые слова: машины, совместное использование, отказ, замещение, назначенный срок службы, стоимостная оценка.

DOI: 10.14357/20790279240111 **EDN:** OXPVPK

Введение

Мы рассматриваем задачу одновременной оптимизации сроков службы двух совместно используемых машин¹, подвергающихся отказам. Машины считаются *неремонтируемыми*, т.е. их капитальный ремонт технически невозможен или экономически нецелесообразен.

Суть проблемы в следующем. На предприятии осуществляется технологический процесс, в

котором совместно участвуют две машины разного назначения. В конце срока службы или при отказе каждая машина заменяется аналогичной новой машиной (новым аналогом) и утилизируется (продается по утилизационной стоимости). При этом возникают потери от остановки технологического процесса. Требуется назначить каждой машине срок службы, по истечении которого она утилизируется и замещается новым аналогом независимо от своего технического состояния. Для подобных задач в теории надежно-

¹ Термин «машина» здесь и далее охватывает также оборудование и транспортные средства.

сти используются известные методы [1–6]. Однако они неприменимы к данной задаче, поскольку не учитывают совместного использования обеих машин. Разумеется, можно условно объединить обе машины в единый комплекс, т.е. назначать им одинаковый срок службы. Однако тогда не будет учтено, что машины имеют разные операционные характеристики, и их желательно было бы заменять с разной периодичностью. Ниже мы приводим более адекватную постановку этой задачи и ее решение, основанное на методах стоимостной оценки.

В Разделе 1 вводятся основные понятия и определения, в Разделах 2–4 рассмотрено применение стоимостного подхода к оптимизации срока службы отдельной машины, затем ставится и решается задача оптимизации сроков службы двух совместно работающих машин. В Разделе 6 приводится пример расчета. При этом везде предполагается отсутствие инфляции, а учету ее влияния посвящен Раздел 5.

1. Основные понятия и определения

В теории надежности техническое состояние машин обычно характеризуют их наработкой. Однако на практике учет наработки ведется не для всех машин, да и сведения о наработке продаваемых подержанных машин нередко отсутствуют или фальсифицируются. Поэтому покупатели и оценщики подержанных машин обычно ориентируются на их возраст. Мы также характеризуем состояние машин их *возрастом*, а процесс их использования рассматриваем в непрерывном времени. Машины возраста 0 лет мы называем *новыми*. Такие машины мы рассматриваем как серийно выпускаемую (массовую) продукцию. Они продаются на первичном рынке. Машины, идентичные в новом состоянии, мы относим к одной *марке*.

Состояние машины, при котором ее невозможно или экономически нецелесообразно использовать по назначению, называется *предельным*. Машина в таком состоянии подлежит утилизации. Принимается, что при отказе машина оказывается в предельном состоянии. Все остальные состояния назовем *рабочими*.

Обычно машины производятся для выполнения определенных работ и используются предприятиями по своему назначению. Мы принимаем, что каждая машина выполняет только одну работу (возможно, имеющую агрегированный характер, например, перемещение грунта), необходимую участникам рынка. Эта работа является частью определенного технологического процесса, а отказ

машины или завершение срока ее службы приводят к остановке технологического процесса и влекут за собой определенные потери.

Основными операционными характеристиками машины, отражающими объем работы, затраты на их выполнение и вероятность отказа машины в малую единицу времени, мы считаем ее производительность, интенсивность операционных затрат и опасность отказа. Мы считаем их зависящими от состояния (возраста) машины.

Мы считаем, что техническое обслуживание и текущий ремонт машины производятся в процессе ее эксплуатации и обеспечивают только поддержание (но не улучшение) ее технического состояния, а затраты на эти операции включаются в состав операционных затрат. В процессе работы ее операционные характеристики ухудшаются и она может отказаться. По этой причине машине целесообразно назначать определенный срок службы, и мы будем решать задачу оптимизации таких сроков.

Нам потребуются также некоторые сведения из теории *стоимостной оценки*. Провести стоимостную оценку можно для любого объекта, обладающего полезностью для участников рынка, в том числе для машин и выполняемых ими работ. Объекты стоимостной оценки могут быть и гипотетическими (к ним относятся и приводимые в учебниках примеры).

Нас будут интересовать только два вида стоимости – рыночная и утилизационная (УС). Основным видом стоимости объекта является его *рыночная стоимость* (РС). Детальное определение этого понятия дается и раскрывается в стандартах оценки [7].

Под рыночной стоимостью объекта на дату оценки понимается расчетная денежная сумма, за которую состоялся бы обмен объекта на эту дату между типичными покупателями и продавцами в результате стандартной сделки. При этом:

- *типичными* считаются участники рынка, проводящие надлежащий маркетинг, ведущие себя расчетливо и хорошо осведомленные о характере, свойствах и способах использования актива, а также о состоянии рынка на дату оценки;
- *стандартной* считается сделка, совершаемая на *открытом и конкурентном* рынке, между сторонами, не связанными между собой какими-либо отношениями и действующими независимо.

РС новой машины обычно оценивают на основе сложившихся на первичном рынке цен машин той же марки с учетом затрат на доставку новой машины покупателю. Однако оценка стоимости подержанных машин представляет значительные

трудности, поскольку все подержанные машины одной марки в некотором смысле уникальны, отличаясь друг от друга по тем или иным эксплуатационным характеристикам.

Для того чтобы стандартная сделка между типичными покупателями и продавцами совершалась, необходимо, чтобы цена сделки была «наилучшей из достижимых, по разумным соображениям, для продавца и наиболее выгодной из достижимых, по разумным соображениям, для покупателя» [7, МСО 104, п. 30.2а]. Применительно к нефинансовым активам (включая машины) это означает, что в такой сделке:

- продажа актива по РС была бы для продавца не менее выгодной, чем использование его наиболее эффективным способом;
- покупка актива по РС и использование его наиболее эффективным способом была бы для покупателя не менее выгодной, чем вложение тех же средств в альтернативные и доступные для всех участников рынка направления инвестирования.

Отсюда следует, что РС нефинансового актива должна оцениваться при предпосылке о наиболее эффективном способе его использования, и потому, как отмечено в МСО [там же, п. 30.4], «будет отражать его наиболее эффективное использование».

При стоимостной оценке объектов часто используется *принцип ожидания выгод*. В соответствии с [7] его можно сформулировать так [3,6].

РС объекта на дату оценки не меньше ожидаемой суммы дисконтированных к этой дате выгод от его использования в некотором периоде после даты оценки и дисконтированной РС объекта в конце периода, и совпадает с этой ожидаемой суммой, если объект в этом периоде используется наиболее эффективно. При этом длительность периода может быть произвольной, т.к. РС объекта на дату оценки от нее не зависит.

Это определение нуждается в двух комментариях. Под (доналоговыми) выгодами от *использования машины по назначению* (т.е. от ее работы) в некотором периоде мы понимаем РС выполненных ею работ за вычетом операционных затрат за этот период. Отметим сразу же, что оценщики обычно не оценивают РС выполняемых машинами работ (исключение составляют работы по транспортировке пассажиров и грузов и некоторые строительно-монтажные и ремонтные работы).

Под *ожидаемым* значением показателя мы понимаем его математическое ожидание. Поэтому для дисконтирования ожидаемых выгод, согласно МСО, потребуется использовать номинальную до-

налоговую безрисковую ставку² r (при отсутствии инфляции она совпадает с реальной). Тем самым, выгоды, получаемые через время t после даты оценки, приводятся к этой дате умножением на коэффициент дисконтирования e^{-rt} .

В качестве важного примера применения принципа ожидания выгод рассмотрим (гипотетически) объект, приносящий выгоды в течение неограниченного времени с интенсивностью B . Пусть V – его РС. За малый период времени dt он принесет выгоды Bdt , а в конце периода окажется в том же состоянии, что и в начале и, следовательно, будет иметь ту же РС V . Применяя принцип ожидания выгод, получим, что³ $V = Bdt + e^{-rdt}V \approx Bdt + (1 - rdt)V$, откуда находим $V = B/r$.

РС машины в предельном состоянии называется *утилизационной (УС)*. Обычно она оценивается как РС всех узлов и деталей машины⁴ за вычетом затрат на демонтаж и продажу ее элементов. Мы принимаем, что УС машин не зависит от их возраста.

Следует различать РС машины «на месте» и «для перемещения». В первом случае машина оценивается в месте ее установки как часть действующего предприятия, во втором случае предполагается ее перемещение на новое место (например, для передачи новому собственнику). Далее под РС машины понимается ее стоимость «на месте», однако УС машины отражает ее РС «для перемещения». Поэтому РС утилизируемой машины «на месте» будет меньше ее УС на величину потерь от остановки технологического процесса. Отметим, что РС машин «для перемещения» может оказаться отрицательной, если их перемещение требует больших затрат.

2. Оптимизация срока службы отдельной машины

Назначить оптимальный срок службы отдельной неремонтируемой машине позволяет стоимостной подход [3,6]. Введем следующие обозначения: K – РС новой машины «на месте»; U – УС машин; T – оптимальный назначенный срок службы машин; L – потери, связанные с остановкой технологического процесса и выводом машины из эксплуатации в случае отказа машины или оконча-

² Обычно она оценивается по данным о доходности государственных обязательств.

³ Здесь и далее мы пренебрегаем малыми более высокого порядка по сравнению с dt . Соответствующие равенства и неравенства обозначаются знаками \approx , \lesssim , \gtrsim .

⁴ Отдельные узлы и детали могут продаваться и в качестве металлолома.

нии срока ее службы; $V(t)$, $W(t)$, $C(t)$ и $\lambda(t)$ – РС, производительность, интенсивность операционных затрат и опасность отказа машины, дожившей

до возраста t ; $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$ – накопленная

опасность отказа этой машины; p – РС единицы выполняемых машиной работ. Как и раньше, мы считаем, что функция $W(t)$ убывающая, а функции $C(t)$ и $\lambda(t)$ – неограниченно возрастающие. Время, необходимое для устранения последствий остановки технологического процесса, обычно невелико, и мы будем им пренебрегать.

Работы, выполняемые машинами, оценщики обычно не оценивают, поэтому величину p мы считаем неизвестной и будем ее оценивать, как и РС подержанных машин $V(t)$.

Разность $N = L - U$ между потерями от остановки технологического процесса и УС машины назовем чистыми утилизационными потерями. Обратная разность отражает РС машины в конце срока службы: $V(T) = U - L = -N$. Поскольку с возрастом состояние машин не улучшается, то РС машин возраста $t \geq T$ такая же, а у машин возраста $t < T$ – больше.

Рассмотрим на дату оценки машину возраста $t < T$. При использовании ее по назначению в малом периоде времени dt возможны две ситуации. Если машина откажет (вероятность – $\lambda(t)dt$), то выгоды от этого составят $U - L$. В противном случае она выполнит работу в объеме $W(t)dt$. На это потребуются затраты $C(t)dt$, а в конце периода машина будет иметь возраст $t + dt$ и стоимость $V(t + dt)$, поскольку инфляция отсутствует.

Оценим теперь РС машины в начале периода, используя принцип ожидания выгод и учитывая вероятности обеих ситуаций:

$$V(t) \gtrsim \lambda(t)dt \cdot (-N) + [1 - \lambda(t)dt] [pW(t)dt - C(t)dt + (1 - rdt)V(t + dt)],$$

причем знак равенства здесь возможен только при $t < T$.

Поскольку $V(t + dt) \approx V(t) + V'(t)dt$, отсюда вытекает, что

$$V'(t) - [r + \lambda(t)]V(t) + [pW(t) - C(t) - \lambda(t)N] \leq 0.$$

Умножив это на $e^{-rt - \Lambda(t)}$ и проинтегрировав, получим, что при $t \leq s$

$$V(t)e^{-rt - \Lambda(t)} \geq V(s)e^{-rs - \Lambda(s)} + \int_t^s [pW(x) - C(x) - \lambda(x)N]e^{-rx - \Lambda(x)} dx,$$

причем и здесь знак равенства имеет место только при $t \leq s \leq T$.

В частности, при $t = 0 \leq s$ эта формула дает оценку стоимости K новой машины $V(0)$:

$$K \geq V(s)e^{-rs - \Lambda(s)} + \int_0^s [pW(x) - C(x) - \lambda(x)N]e^{-rx - \Lambda(x)} dx = [V(s) + N]e^{-rs - \Lambda(s)} + \int_0^s [pW(x) - C(x) + rN]e^{-rx - \Lambda(x)} dx - N.$$

Поскольку знак равенства в этой формуле достигается при $s \leq T$, а $V(s) > -N$ при $s < T$ и $V(s) = -N$ при $s \geq T$, из данной формулы следует, что

$$p \geq \frac{K + N + \int_0^s [C(x) - rN]e^{-rx - \Lambda(x)} dx}{\int_0^s W(x)e^{-rx - \Lambda(x)} dx} = Z(s), \quad (1)$$

причем знак равенства здесь достигается только при $s = T$.

Входящий сюда множитель $e^{-rx - \Lambda(x)}$ можно трактовать как коэффициент дисконтирования денежных потоков, осуществляемых в момент x , учитывающий вероятность того, что машина доживет до этого возраста. Поэтому числитель дроби $Z(s)$, стоящей в (1) справа, можно трактовать как отношение суммарных за срок службы s ожидаемых дисконтированных затрат на приобретение и эксплуатацию машины (с учетом чистых утилизационных потерь). Знаменатель этой дроби можно трактовать как суммарный ожидаемый дисконтированный объем работ, выполненных машиной за срок службы s . Это позволяет назвать дробь $Z(s)$ удельными (на единицу работ) ожидаемыми затратами (УОЗ). Близкие по структуре и содержанию критерии использовались в [3,5] и других работах по теории надежности, но не сопровождались должными экономическими обоснованиями, что правомерно отмечено в [1].

Как видно из формулы (1), минимальное значение УОЗ достигается при оптимальном сроке службы машины $s = T$, и это значение совпадает с РС единицы выполняемых машиной работ.

Обратим внимание, что, если прямо решать задачу минимизации УОЗ, окажется, что оптимальный срок службы $s = T$ удовлетворяет условию: $p = [C(T) - rN] / W(T)$. Иными словами, РС выполняемых машиной работ совпадает с удельными операционными затратами (за вычетом упущенной выгоды от утилизации машины) в конце оптимального срока службы.

К сожалению, повторить подобные рассуждения и получить сравнительно простой критерий для оптимальных сроков службы совместно используемых машин не удастся, хотя общая идея приведенной выше модели сохраняется.

3. Характеристики процесса совместного использования машин

Перейдем теперь к задаче назначения сроков службы двум⁵ неремонтируемым машинам, совместно используемым в осуществляемом на предприятии едином технологическом процессе. Для определенности будем считать, что этот процесс состоит в обработке некоторого продукта (например, сырья или детали), так что обе машины обрабатывают в единицу времени одно и то же количество продукта. Поэтому производительность рассматриваемых машин (если измерять ее количеством обрабатываемого продукта в единицу времени) одинакова, и мы примем ее за единицу.

Несмотря на то, что обе машины находятся в разных местах, выполняют разные операции и «физически» не связаны друг с другом, объединим их в один объект оценки – (машинный) **комплекс** («большую машину») и поставим задачу оптимизации управления его использованием. В связи с этим отметим, что в стандартах оценки особо отмечается необходимость учета «степени интеграции актива с другими активами», например, того факта, что «отдельная машина может быть частью интегрированной производственной линии, где ее функциональность зависит от других активов» [7, МСО 300, п. 20.7]. Мы ограничиваемся двумя формами использования комплекса: *работа* (обе машины используются в технологическом процессе) и *замещение* (технологический процесс останавливается и одна или обе машины комплекса замещаются новыми аналогами). Временем, необходимым для замещения машин, мы будем пренебрегать. Поскольку машины комплекса последовательно замещаются новыми аналогами, срок службы этого комплекса – бесконечный, хотя возможно, что через какое-то время придется одновременно заменить обе машины комплекса, и он окажется в том же состоянии, что и в начале эксплуатации.

Состояние комплекса мы характеризуем парой (t_1, t_2) , где t_i – возраст i -й машины. Состояние $(0,0)$, в котором обе машины – новые, назовем новым.

Разобьем срок службы комплекса на циклы, в конце которых хотя бы одна из машин заменяется. Поэтому в начале каждого цикла одна из машин всегда имеет возраст 0. Циклы, начинающиеся с состояний $(0,z)$ и $(z,0)$, обозначим соответственно через A_{z1} и A_{z2} . Однако обозначения A_{01} и A_{02} относятся к одному и тому же циклу, начинающемуся

с нового состояния $(0,0)$. Теперь любая политика замещения машин комплекса определяется длительностями всех циклов и теми решениями по замещению машин, которые должны быть приняты при отказе или окончании срока службы любой из машин в каждом цикле.

Введем ряд обозначений:

K_i – рыночная стоимость (РС) i -й машины в новом состоянии (в момент ввода ее в эксплуатацию);

U_i – утилизационная стоимость i -й машины;

L – потери, связанные с остановкой технологического процесса и выводом машины из эксплуатации при отказах или замещении машин;

$C_i(t)$ – интенсивность операционных затрат i -й машины возраста t . Принимается, что функции $C_i(t)$ неограниченно возрастают по t ;

r – номинальная рыночная доналоговая ставка дисконтирования;

$\lambda_i(t)$ и $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(x) dx$ – опасность и накопленная

опасность отказа i -й машины возраста t . Отметим, что вероятность безотказной работы i -й машины в течение времени t при этом будет равна $e^{-\Lambda_i(t)}$. Разность $N = L - U_1 - U_2$ при этом, как и раньше, будет отражать чистые утилизационные потери от одновременной утилизации обеих машин.

Работа, выполняемая комплексом в единицу времени (мы принимаем ее за единицу работы) имеет свою (вообще говоря, неизвестную) рыночную стоимость. Обозначим ее через p .

Длительность цикла A_{zi} обозначим через $D_i(z)$, а РС комплекса в начале этого цикла – через $V_i(z)$. Очевидно, что обе функции $V_i(z)$ – невозрастающие. Поскольку новые аналоги обеих машин комплекса продаются на рынке по отдельности (они объединены в комплекс лишь для удобства рассмотрения), то РС комплекса в состоянии $(0,0)$ составляет $V_1(0) = V_2(0) = K_1 + K_2$.

Под (доналоговыми) *выгодами* от работы комплекса в некотором периоде мы понимаем РС выполняемой им в этом периоде работы за вычетом операционных затрат на выполнение этой работы. В частности, выгоды от безотказной работы комплекса, находящегося в состоянии (t_1, t_2) , за малое время dt составляют $[p - C_1(t_1) - C_2(t_2)] dt$. Поскольку функции $C_i(t)$ неограниченно возрастают по t , то при любом p найдется такое конечное $T^* = T^*(p)$, что при $t_1 > T^*$ или $t_2 > T^*$ указанные выгоды будут отрицательны. Отсюда вытекает, что $D_i(z) \leq T^*$ при всех i и z , и $D_i(z) = 0$ при $z > T^*$. Под выгодами от замещения i -й машины мы понимаем выгоды от ее утилизации за вычетом потерь от остановки технологического процесса и затрат на

⁵ Случай трех и более машин рассматривается аналогично, но получаемые уравнения оказываются сложнее, а решение их сопряжено со значительными трудностями.

приобретение аналога, т.е. сумму $U_i - K_i - L$. Аналогично, выгоды от замещения обеих машин составят: $U_1 + U_2 - L - K_1 - K_2 = -N - K_1 - K_2$.

Заметим, что, в каком бы рабочем состоянии ни находился комплекс, за единицу времени он будет производить работы рыночной стоимости p , что потребует определенных затрат и, возможно, приведет к потерям от остановки технологического процесса. Поэтому РС комплекса будет не больше, чем у объекта, приносящего выгоды с постоянной интенсивностью p , т.е. не больше, чем p/r . В то же время эта РС будет не меньше, чем $-N$. Действительно, если остановить технологический процесс и заместить обе машины новыми аналогами, то комплекс перейдет в новое состояние. Поэтому, согласно принципу ожидания выгоды, РС комплекса будет не меньше, чем выгоды от такого способа его использования, составляющие $(-N - K_1 - K_2) + (K_1 + K_2) = -N$.

Модель, позволяющую оптимизировать назначенные длительности $D_i(z)$ циклов A_{zi} для всех i и z и решить, какую (или какие) из машин комплекса экономически целесообразно заместить при отказе или в конце каждого цикла, приводится ниже.

4. Оптимизационная модель

Зафиксируем некоторое значение z . Предположим, что для цикла A_{z1} назначена длительность D . РС комплекса, отработавшего время t в этом цикле, т.е. находящегося в состоянии $(t, z+t)$, обозначим временно через $b(t)$. РС этого комплекса при этом составит $b(t) - N$. Заметим, что с увеличением t техническое состояние комплекса не улучшается, так что функция $b(t)$ не возрастает и $b(t) \leq b(0) = V_1(D)$. Будем искать $b(t)$ и D .

Пусть вначале $t = D$, так что комплекс находится в состоянии $(D, z + D)$, т.е. в конце цикла A_{z1} . Здесь имеются три варианта использования комплекса: заместить либо первую, либо вторую, либо обе машины.

Замещение первой машины принесет выгоды $U_1 - K_1 - L$. При этом комплекс перейдет в состояние $(0, z + D)$, где будет иметь РС $V_1(z + D)$. Сумма выгоды от замещения и РС комплекса после замещения будет равна $U_1 - K_1 - L + V_1(z + D) = V_1(z + D) - K_1 - U_2 - N$. Аналогично, при замещении второй машины сумма выгоды от замещения и стоимости комплекса после замещения составит $V_2(D) - K_2 - U_1 - N$. Наконец, как показано выше, при замещении обеих машин сумма выгоды от замещения и стоимости комплекса после замещения, т.е. в состоянии $(0, 0)$, составит $(-N - K_1 - K_2) + (K_1 + K_2) = -N$.

В силу принципа ожидания выгоды, РС комплекса в конце цикла должна быть не меньше максимальной из найденных сумм и совпадать с ней при выборе оптимального $D = D(z)$:

$$b(D) \geq \max[V_1(z + D) - K_1 - U_2 - N; V_2(D) - K_2 - U_1 - N; -N] = \max[V_1(z + D) - K_1 - U_2; V_2(D) - K_2 - U_1; 0] - N. \quad (2)$$

Знак равенства здесь достигается при оптимальном $D = D_1(z)$, и тогда необходимо замещать первую, вторую или обе машины в зависимости от того, какая из величин в квадратной скобке является максимальной.

Для нахождения $b(t)$ при $t < D$ заметим, что здесь комплекс должен работать в течение, по крайней мере, малого периода времени dt . При этом могут возникнуть три ситуации.

1. С вероятностью $\lambda_1(t)dt$ откажет первая машина. Тогда придется заместить либо первую, либо обе машины. Повторив приведенные выше рассуждения, мы увидим, что наибольшая сумма выгоды от замещения и РС комплекса после замещения составит $\max[V_1(z + t) - K_1 - U_2; 0] - N$. Если эта величина окажется равной $-N$, то эффективнее заместить обе машины, в противном случае — только отказавшую.
2. С вероятностью $\lambda_2(z + t)dt$ откажет вторая машина, так что придется заменить ее или обе машины. Аналогично п. 1 оказывается, что лучшему варианту будет отвечать сумма выгоды от замещения и РС комплекса после замещения, равная $\max[V_2(t) - K_2 - U_1; 0] - N$. И здесь замещать обе машины эффективнее, если эта величина окажется равной $-N$.
3. С вероятностью $1 - [\lambda_1(t) + \lambda_2(z + t)]dt$ ни одна из машин не откажет. Тогда выгоды от работы комплекса за время dt составят $[p - C_1(t) - C_2(z + t)]dt$, а комплекс перейдет в состояние $(t + dt, z + t + dt)$, где будет иметь РС $b(t + dt)$. Сумма выгоды от работы комплекса за этот период и дисконтированной стоимости комплекса в конце периода составит:

$$[p - C_1(t) - C_2(z + t)]dt + (1 - rdt)b(t + dt) \approx \approx b(t) + [b'(t) - rb(t) + p - C_1(t) - C_2(z + t)]dt.$$

Учитывая вероятности трех ситуаций и применив принцип ожидания выгоды, найдем следующее неравенство для РС машины в начале периода:

$$b(t) \gtrsim \lambda_1(t)dt \left\{ \max[V_1(z + t) - K_1 - U_2; 0] - N \right\} + \lambda_2(z + t)dt \left\{ \max[V_2(t) - K_2 - U_1; 0] - N \right\} + \left\{ 1 - [\lambda_1(t) + \lambda_2(z + t)]dt \right\} \left\{ b(t) + [b'(t) - rb(t) + p - C_1(z + t) - C_2(t)]dt \right\}.$$

Легко видеть, что такое неравенство возможно только если

$$b'(t) - [r + \lambda_1(t) + \lambda_2(z+t)] [b(t) + N] + G_1(z, t) \leq 0, \quad (3)$$

где

$$G_1(z, t) = p + rN - C_1(t) - C_2(z+t) + \lambda_1(t) \max[V_1(z+t) - K_1 - U_2; 0] + \lambda_2(z+t) \max[V_2(t) - K_2 - U_1; 0]. \quad (4)$$

Введем обозначение⁶:

$$\alpha_1(z, t) = e^{-rt - \Lambda_1(t) - \Lambda_2(z+t)}. \quad (5)$$

Умножив неравенство (3) на $\alpha_1(z, t)$ и проинтегрировав, найдем:

$$b(t) + N \geq \int_t^D G_1(z, x) \frac{\alpha_1(z, x)}{\alpha_1(z, t)} dx + [b(D) + N] \frac{\alpha_1(z, D)}{\alpha_1(z, t)}. \quad (6)$$

Если заменить здесь $b(D)$ оценкой (2) и положить $t=0$, мы сможем оценить $b(0)$, т.е. РС комплекса в состоянии $(0, z)$, которую ранее мы обозначили через $V_1(z)$:

$$V_1(z) \geq \int_0^D G_1(z, x) \frac{\alpha_1(z, x)}{\alpha_1(z, 0)} dx + \max[V_1(z+D) - K_1 - U_2; V_2(D) - K_2 - U_1; 0] \frac{\alpha_1(z, D)}{\alpha_1(z, 0)} - N.$$

Учтем теперь, что знаки равенства в полученной формуле, как и в (2) и (3), достигаются при оптимальном значении $D = D_1(z)$. Поэтому:

$$V_1(z) = \max_D \left\{ \int_0^D G_1(z, x) \frac{\alpha_1(z, x)}{\alpha_1(z, 0)} dx + \max[V_1(z+D) - K_1 - U_2; V_2(D) - K_2 - U_1; 0] \frac{\alpha_1(z, D)}{\alpha_1(z, 0)} \right\} - N. \quad (7)$$

Как уже отмечалось, максимум здесь достигается при оптимальной длительности цикла A_{z1} , т.е. при $D = D_1(z) \leq T^*(p)$. Выражение, стоящее в фигурной скобке в формуле (7), является непрерывной, но не выпуклой функцией от D , поэтому может иметь несколько локальных максимумов, из которых глобальным будет, вообще говоря, только один. Однако при изменении z количество и расположение локальных максимумов может меняться, а глобальный максимум $D_1(z)$, т.е. оптимальная длительность цикла A_{z1} , может «перепрыгивать» из одного локального максимума в другой. По этой причине функция $D_1(z)$ может иметь разрывы при таких z , когда глобальный максимум достигается в нескольких точках.

Точно так же, при рассмотрении цикла A_{z2} получаем уравнение:

$$V_2(z) = \max_D \left\{ \int_0^D G_2(z, x) \frac{\alpha_2(z, x)}{\alpha_2(z, 0)} dx + \max[V_1(D) - K_1 - U_2; V_2(z+D) - K_2 - U_1; 0] \frac{\alpha_2(z, D)}{\alpha_2(z, 0)} \right\} - N. \quad (8)$$

⁶ Эту величину можно трактовать как коэффициент дисконтирования (к началу цикла A_{z1}) выгод, приносимых комплексом в состоянии $(t, z+t)$, учитывающий риск отказов.

где

$$G_2(z, t) = p - C_1(z+t) - C_2(t) + rN + \lambda_1(z+t) \max[V_1(t) - K_1 - U_2; 0] + \lambda_2(t) \max[V_2(z+t) - K_2 - U_1; 0]; \quad (9)$$

$$\alpha_2(z, t) = e^{-rt - \Lambda_2(z+t) - \Lambda_1(t)}. \quad (10)$$

Аналогично, оптимальным будет замещение в конце цикла первой, второй или обеих машин в зависимости от того, какой из элементов в выражении $\max[V_1(D_2(z)) - K_1 - U_2; V_2(z+D_2(z)) - K_2 - U_1; 0]$ окажется максимальным.

Обратим внимание, что при $z=0$ уравнения (7) и (8) совпадают. Мы получаем, таким образом, что оптимизация политики замещения при фиксированном p свелась к решению системы уравнений (7)-(8), которую можно отнести к числу задач динамического программирования.

До сих пор стоимость единицы работ комплекса p предполагалась известной. Чтобы найти ее, заметим, что с ростом p функции $V_i(z)$, являющиеся решениями системы (6)-(7), не убывают, а значения $V_i(0)$ возрастают. Поэтому искомым p будет единственным корнем уравнения:

$$V_1(0) = V_2(0) = K_1 + K_2. \quad (11)$$

Решить систему уравнений (7)-(8) при фиксированном p можно методом последовательных приближений. Мы уже знаем, что все $V_i(z) \geq 0$, поэтому в качестве первого приближения примем $V_i(z)=0$, а каждое новое приближение находить, поставив предыдущее приближение в правую часть равенств (4), (7), (8), (9). Нетрудно убедиться, что каждое новое приближение будет не меньше предыдущего, так что последовательность этих приближений будет неубывающей. Кроме того, она будет ограниченной, ибо, как показано выше, все $V_i(z) \leq p/r$. Поэтому построенная последовательность будет иметь предел, который будет парой искомых функций $V_i(z)$. Можно доказать, что других решений у системы (7)-(8) нет.

Как уже отмечалось, для решения задачи необходимо при каждом p решать систему уравнений (7)-(8), а затем подбирать значение p из условия $V_1(0)=V_2(0)=K_1+K_2$. Существенно, что с увеличением p величина $V_1(0)=V_2(0)$ возрастает. Чтобы задать первое приближение, условимся использовать комплекс как одну «большую машину». Тогда срок его службы и отвечающую ему РС работ p находят из изложенным выше методом.

Эффективность оптимальной ремонтной политики можно оценить, сравнив ее с существующей, для которой также выполняются равенства (7)-(8), только уже при заданных владельцем пред-

приятия длительностях циклов $D(z,0)$ и $D(0,z)$. Однако при существующей политике на единицу производимого технологической линией продукта будут приходиться более высокие ожидаемые затраты (совпадающие с РС единицы работ) p_c , а эффект от применения оптимальной политики будет выражаться снижением $p_c - p$ ожидаемых затрат на единицу этого продукта.

Если функции $V_i(z)$ найдены, то стоимость машины в любом состоянии $(z+t, t)$ можно найти из формулы (6), обращающейся в равенство при оптимальной длительности цикла $D = D_1(z)$. Аналогичную формулу можно получить и для стоимостей машин в состояниях $(t, z+t)$.

Полученные формулы применимы и к ситуациям, когда одну из машин заменяют не новым, а *подержанным* аналогом. Тогда после замены комплекс окажется не в начале, а в «середине» какого-то цикла.

Для практического применения модели оказывается важным, что при установлении оптимальных длительностей циклов можно не принимать в расчет так называемые *постоянные* (условно-постоянные, не зависящие от возраста машины) операционные затраты. Дело в том, что при уменьшении функции $C_i(t)$ на константу на ту же константу вырастут обе функции $G_i(z, t)$ и уменьшится РС единицы работ p , но все соотношения модели и сроки службы машин в каждом цикле не изменятся. Это позволяет при практическом использовании модели заменить все интенсивности операционных затрат $C_i(t)$ на $C_i(t) - C_i(0)$.

5. Учет инфляции

При построении модели было сделано важное и нереалистичное допущение об отсутствии инфляции. Однако в наших рассуждениях мы использовали только то обстоятельство, что за малое время после даты оценки ни УС машин, ни РС машин одного и того же возраста, ни потери от остановки технологического процесса не изменяются. Освободиться полностью от этих допущений невозможно, однако их можно существенно ослабить.

Начнем с того, что и оценщики машин и государственные органы постоянно наблюдают за ситуацией на первичном рынке, где продаются новые машины, и оценивают темпы роста цен на новые машины различных марок и видов. Это позволяет дать краткосрочный прогноз изменения цен на новые машины обоих видов, участвующих в технологическом процессе.

Однако надежно установить динамику цен подержанных машин, невозможно. Между тем,

вариант покупки подержанной машины обычно сравнивается с вариантом покупки аналогичной новой. Поэтому оценщики принимают, что цены на вторичном рынке растут теми же темпами, что и на первичном. Если говорить более строго, они принимают, что РС машин одной марки и одного возраста (включая и подлежащие утилизации) растут с тем же темпом, что и РС новых машин этой марки. Такое явление можно назвать *групповой инфляцией*, а соответствующий темп роста рыночных стоимостей – темпом групповой инфляции [3,6].

На этом основании допущение об отсутствии инфляции в построенной модели можно заменить двумя более слабыми:

- для машин каждого вида, участвующих в технологическом процессе, имеет место групповая инфляция с известным темпом i ;
- потери (L) от остановки технологического процесса в связи с инфляцией растут с тем же темпом i , что и РС машин.

Если теперь повторить вывод формулы (4), учитывая групповую инфляцию, мы увидим, что доналоговая номинальная ставка дисконтирования r заменится на $r-i$. Такая ставка, по сути, близка к реальной, но при ее вычислении из номинальной ставки вычитается не средний темп роста цен в стране, а темп роста РС машин (i). При этом все стоимостные характеристики машин, входящие в формулы (3), (6)-(9), например, стоимости K_p , U_i и функции $C_i(t)$ и $V_i(z)$, будут выражены в ценах на дату оценки. Это позволяет использовать модель не только для назначения сроков службы машин комплекса, но и для стоимостной оценки комплекса в любом его состоянии, учитывая инфляцию путем корректировки ставки дисконтирования.

6. Пример расчета

Принимается линейная зависимость (приростной) интенсивности операционных затрат и опасности отказов от возраста:

$$C_i(t) = a_i t; \quad \lambda_i(t) = 2t/\tau_i^2; \quad \Lambda_i(t) = t^2/\tau_i^2.$$

При этом

$$\alpha_1(z, t) = e^{-rt - [(z+t)/\tau_1]^2 - (t/\tau_2)^2};$$

$$\alpha_2(z, t) = e^{-rt - [(z+t)/\tau_2]^2 - (t/\tau_1)^2}.$$

Время работы i -й машины до отказа при этом имеет распределение Рэля со средним значением $S_i = \tau_i \sqrt{\pi}/2 \approx 0,886\tau_i$. В расчетах задавались более наглядные характеристики надежности каждой машины – среднее время ее работы до отказа S_p , а

значения параметров τ_i определялись по формуле: $\tau_i = 2S_i/\sqrt{\pi}$.

Равенство (4) и уравнение (7) здесь принимают вид:

$$G_1(z, t) = p + rN - a_2z - (a_1 + a_2)t + 2t \max[V_1(z+t) - K_1 - U_2; 0] / (\tau_1^2 + 2(z+t) \max[V_2(t) - K_2 - U_1; 0] / \tau_2^2).$$

$$V_1(z) = \max_D \left\{ \int_0^D G_1(z, x) e^{-x[r+(2z+x)/\tau_1^2+x/\tau_2^2]} dx + \max[V_1(z+D) - K_1 - U_2; V_2(D) - K_2 - U_1; 0] e^{-D[r+(2z+D)/\tau_1^2+D/\tau_2^2]} \right\} - N.$$

Аналогичный вид принимают равенства (9) и (8).

Для расчетов приняты следующие значения параметров модели (время измеряется в годах, стоимости – в условных денежных единицах):

$$K_1 = 77; K_2 = 23; U_1 = 4; U_2 = 2; c_1 = 9; c_2 = 27; S_1 = 2,5; S_2 = 4; r = 0,1.$$

Графики функций $V_i(z)$ и $D_i(z)$ приведены на рис. 1 и 2.

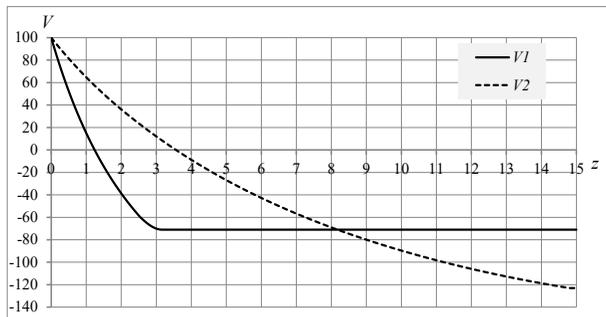


Рис. 1. Зависимости PC комплекса $V_i(z)$ в начале циклов от z

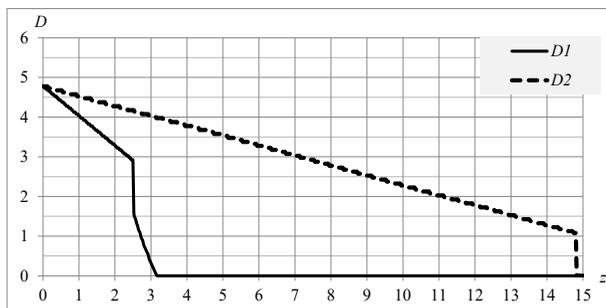


Рис. 2. Зависимости оптимальной длительности циклов $D_i(z)$ от z

Обратим внимание, что $V_2(z)$ – PC комплекса «на месте» в состоянии $(0, z)$ – при $3,55 < z < 14,8$ оказывается отрицательной, однако такой комплекс может некоторое время эффективно эксплуатироваться. Это обусловлено тем, что прекращение его эксплуатации сопряжено с достаточно большими затратами и потерями (напомним, что потери от остановки технологического процесса в данном примере – в полтора раза больше стоимости самого комплекса). Для циклов $A_1(z)$ ситуация иная, поскольку здесь с увеличением z быстро растут операционные затраты второй машины в начале цикла. К тому же здесь проявляется и невыпуклость выражения, стоящего в фигурной скобке в формуле (8), из-за которой функция $D_2(z)$ оказывается разрывной.

PC работ, выполняемых за год комплексом составляет в этом примере $p = 159,47$. Если рассматривать комплекс как единый объект оценки, замещаемый при отказе любой из машин, такая политика становится менее эффективной. Отвечающая ей стоимость выполняемых работ $p_c = 157,73$. Таким образом, оптимальная политика замещения позволяет получить эффект от снижения затрат на замещение и потерь от остановки технологического процесса в размере $\Delta p = 1,74$ денежных единиц или, что то же самое, 1,74% от PC комплекса в год. Размер этого эффекта существенно зависит от величины потерь L , возникающих при остановке технологического процесса и сокращается с ростом L . Соответствующая зависимость представлена на рис. 3.

При «традиционной» политике замещения назначенные сроки службы каждой машине устанавливаются отдельно. Такой политике отвечали бы достаточно большие УОЗ (совпадающие с PC выполняемых комплексом работ) $p_c = 194,5$ (соответствующий эффект $\Delta p = 36,8$, т.е. 37% стоимости ком-

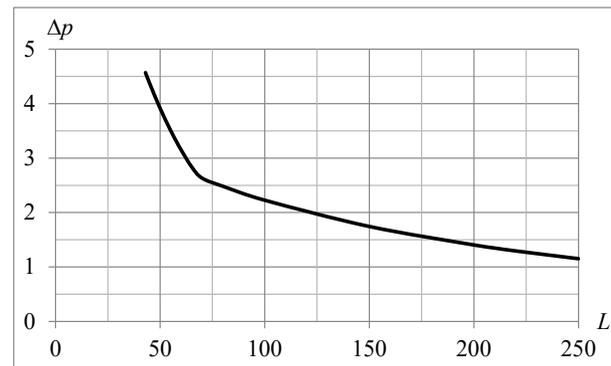


Рис. 3. Влияние потерь от остановки технологического процесса на годовую эффект оптимальной политики замещения Δp (в % к стоимости комплекса)

плекса). Эта политика будет близка к оптимальной, только если потери от остановки технологического процесса будут малы по сравнению с РС комплекса.

Казалось бы, чем старше машины комплекса, тем меньший срок службы в соответствующем цикле ему надо назначать, так что функции $D_i(z)$ должны быть невозрастающими, как на рис. 2. Оказывается, что так бывает не всегда. На рис. 4 представлены зависимости $D_i(z)$ для того же примера, но с $L=45$. Как видим, при небольших z функция $D_2(z)$ возрастает.

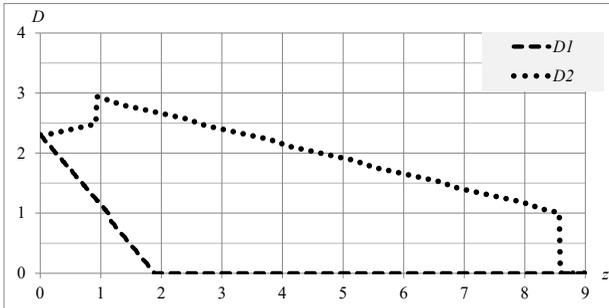


Рис. 4. Зависимости оптимальной длительности циклов $D_i(z)$ от z при $L=45$

Заключение

Построенная модель совместного использования машин в едином технологическом процессе и проведенные расчеты по этой модели позволяют сделать ряд важных выводов.

1. Назначать срок службы каждой из совместно используемых машин целесообразно, учитывая состояние и остальных машин и потери от остановки технологического процесса. Политика, при которой срок службы каждой машины устанавливается только на основе ее операционных характеристик (включая и характеристики надежности), существенно снижает экономическую эффективность всего технологического процесса, особенно в условиях относительно больших указанных потерь.
2. При оптимальной политике замещения машин зависимость назначенных сроков их службы от возраста могут быть разрывными и не монотонными.
3. Если потери от остановки технологического

процесса достаточно велики, целесообразно рассматривать всю совокупность используемых машин как единый технологический комплекс, которому и должен назначаться определенный срок службы. Однако при не слишком больших (по сравнению со стоимостью комплекса) потерях такая политика менее эффективна.

4. Применение стоимостного подхода позволяет дать экономическое обоснование критерию ожидаемых удельных затрат, используемому при оптимизации срока службы отдельной машины в теории надежности. Однако при назначении сроков службы совместно используемым машинам прямо использовать такой критерий не удастся. В то же время использование стоимостного подхода сводит эту задачу к динамическому программированию.

Литература

1. Terborgh G. Dynamic Equipment Policy. McGraw Hill. 1948.
2. Van Horenbeek A., Pintelon L., Muchiri P. Maintenance optimization models and criteria. International Journal of System Assurance Engineering and Management. 2010. No.1(3). P. 189-200.
3. Hartman J.C., Tan C.H. Equipment Replacement Analysis: A Literature Review and Directions for Future Research. The Engineering Economist. 2014. No. 59(2). P. 136-153. doi:10.1080/0013791x.2013.862891
4. Смоляк С.А. Экономический критерий оптимизации назначенного срока службы машин и оборудования // Экономическая наука современной России. 2022. № 1 (96). С. 45-55.
5. Fan W., Machemehl R., Kortum K. Equipment Replacement Optimization. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. 2011. P. 88–98. doi:10.3141/2220-11
6. Смоляк С.А. О назначении сроков службы технических систем в условиях инфляции // Бизнес-Информатика. 2022. Т.16. №2. С. 74-88.
7. Международные стандарты оценки: вступают в силу 31 января 2020 года / пер. с англ. М.: Российское общество оценщиков. 2020. 193 с.

Смоляк Сергей Абрамович. Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор экономических наук. Область научных интересов: математическое моделирование экономических процессов. E-mail: smolyak1@yandex.ru.

Optimizing the service life of machines working together

S.A. Smolyak

Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

Abstract. We consider non-repairable objects subject to random failures. In this case, the failure of the object leads to losses in production, and the restoration of its performance due to (major) repairs is technically impossible or economically unreasonable. An important task here is to assign a service life to an object, upon reaching which it must be decommissioned and replaced with a similar new one, regardless of its condition. We solve this problem for two objects, each of which performs its work in the same technological chain. Methods of reliability theory and valuation are used to form an optimal policy for replacement of machines. Experimental calculations show that the financial effect of the optimal replacement policy can be up to 8% of the total cost of both machines, depending on the amount of losses from stopping the process. We also found that the dependencies of the assigned service life on the age of the machines can be discontinuous and not monotonous.

Keywords: *machinery, equipment, collaboration, failure, replacement, assigned service life, cost estimation*

DOI: 10.14357/20790279240111 **EDN:** OXPVPK

References

1. *Terborgh G.* Dynamic Equipment Policy. McGraw Hill. 1948.
2. *Van Horenbeek A., Pintelon L., Muchiri P.* Maintenance optimization models and criteria. *International Journal of System Assurance Engineering and Management.* 2010;1(3):189-200.
3. *Hartman J.C.; Tan C.H.* Equipment Replacement Analysis: A Literature Review and Directions for Future Research. *The Engineering Economist.* 2014;59(2):136–153. doi:10.1080/0013791x.2013.862891
4. *Smolyak S.A.* Economic criteria for optimizing the assigned service life of machinery and equipment. *Economics of contemporary Russia.* 2022;96(1): 45-55.
5. *Fan W., Machemehl R., Kortum K.* Equipment Replacement Optimization. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board.* 2011; 2220:88–98. doi:10.3141/2220-11
6. *Smolyak S.A.* On the service life assignment for technical systems under inflation. *Business Informatics.* 2022; 16(2): 74-88.
7. *International Valuation Standards.* 2019. London: International Valuation Standards Council.

Smolyak Sergey A. Doctor of Economic Sciences. Central Economics and Mathematics Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. E-mail: smolyak1@yandex.ru